数学百科全书

第二卷

D－H

科学出版社

数学百科全书

第二卷

D — H

科学出版社

1995

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书由三类条目组成. 首先是介绍数学的各个主要方向的综述性条目(采用了一种很好的分科办法), 对这类条目的基本要求是尽可能通俗全面地阐明有关领域发展的现状; 这些条目一般可供大学数学系学生和数学邻近领域的研究生阅读, 根据专业需要, 还可供在工作中用到数学方法的其他科学领域的专家、工程师和数学教师阅读. 其次, 是一些中等篇幅的条目, 专门介绍某些具体的数学问题和方法, 这类条目内容较深, 是为水平较高的读者而写的. 最后, 还有一类简短的条目, 可供查阅定义时参考. 本书附有主题索引, 其中不仅包括所有条目的标题, 还包括在前两类条目中给出定义的许多概念, 以及在条目中提到的一些最重要的结果. 多数条目附有参考文献. 这部大型数学工具书的功能是很齐全的, 读者范围是十分广泛的.

责任编辑　杜小杨　夏墨英　张鸿林
特邀编辑　卢景波　朱学贤　沈永欢
　　　　　郑洪深　葛显良　戴中器

数学百科全书
第二卷
《数学百科全书》编译委员会 编译
科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1995年10月第一版　开本: 787×1092 1/16
1995年10月第一次印刷　印张: 60 3/4
印数: 0001—3100　字数: 2214000

ISBN 7-03-004127-5/Z・231
定价: 128.00 元

数学天元基金

中国科学院科学出版基金资助出版　国家自然科学基金委员会资助出版

數學百科全書

蘇步青題

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

《数学百科全书》

（第二卷）

编译委员会

顾　　问	苏步青	陈省身	吴文俊	程民德
	王　元			
主任委员	杨　乐	严士健*	石钟慈*	谈德颜
委　　员	冯克勤	史树中	任南衡	沈世镒
	沈信耀	严绍宗	李　忠	李荣华
	吴　方	陈天权	陈翰馥	林　群
	张恭庆	张景中	胡和生	胡迪鹤
	潘承洞	潘承彪	张鸿林*	杜小杨*

（加*号者为常务委员）

序

在人类的思想史上，数学有一个基本和独特的地位。几千年来，从巴比伦的代数、希腊的几何、中国、印度、阿拉伯的数学，直到近代数学的伟大发展，虽然历史有时中断，但对象和方法则是一致的。数学的对象不外“数”与“形”，虽然近代的观念，已与原始的意义，相差甚远。数学的主要方法，是逻辑的推理。因之建立了一个坚固的思想结构。这些结果会对其他学科有用，是可以预料的。但应用远超过了想象。数学固然成了基本教育的一部分。其他科学也需要数学作理想的模型，从而发现相应科学的基本规律。

在这样蓬勃的发展中，数学的任务是艰巨的：它既需充实已有的基础，还需应付外来的冲击。一部完整的数学百科全书，便有迫切的需要。但兹事体大，许多合格的数学家，都望而却步。

我们有幸有这一套苏联的《数学百科全书》。它对数学的贡献，将无法估计。我们要了解，数学是一种“活”的学问：它的内容，不断在变化，在进展。我们现在大学研究院数学活动的内容，大部分在五十年前是不存在的，其他一部分则是昔贤伟大思想的精华，将历久而弥新。我建议《百科全书》每两年出一附录，包括新项目和旧项目的重写。如有佳构，不必拘泥编辑的方针。《百科全书》每隔若干年宜有新版。

面对着这座巨大的建筑，令人惶惑。百科全书原不为有涯之身所能控制的。数学工作者的使命在对某些选定的项目，增加了解和探索。本书将便利他们思考范围的推广。

我相信数学将有一个黄金时代，其中将有多数的中国数学家参加。希望本书能起相当的作用。

陳省身

出 版 说 明

数学的重要性是尽人皆知的。一个人从进小学开始到大学毕业为止，不论哪个专业，学习数学的时间至少都有12年至14年之久。一些自然科学领域，如天文学、力学、物理学、化学等，以及各工程技术学科，历来都是以数学为基础的。随着电子计算机的迅速发展和普及，生命科学、地学、军事科学和管理科学等方面也愈来愈多地用到数学，使这些学科从定性研究向定量研究发展。

由于数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义和特定的符号，它的研究对象是抽象的数量关系和空间形式，没有相当的训练和基础知识的人是难于入门的，所以数学又使人望而生畏。另一方面，数学发展很快，文献数量呈指数增加，浩如烟海。一个人很难了解数学的许多方面，这就加重了数学发展和应用的困难。

苏联大百科全书出版社从1977年到1986年，历时10年，出版了苏联科学院院士、世界著名数学家 ИМ 维诺格拉多夫（Виноградов）主编、几百位数学家共同撰写的一部《数学百科全书》(Математическая энциклопедия)，约900万字。它的重要性是极为显著的。不久，荷兰的莱德尔出版公司出版了由180位西方数学家参加翻译的英文版 (Encyclopaedia of mathematics)。英文版增补了大量最新成果、重要的西方文献和编者注，因而其内容更加充实和完善。

苏联《数学百科全书》出版后，我国很多著名数学家和数学教师纷纷要求将这部书译成中文出版，使我国广大科学工作者（特别是数学工作者)、工程技术人员、教师和学生有一部内容极其丰富的工具书，可以从中查阅所需要的数学知识及作进一步了解的线索。这无疑是一件十分重要的事情。

中国数学会常务理事会经过认真讨论，完全支持我国广大数学家和科技人员的要求，决定领导这部《数学百科全书》的编译工作，并将它列为

中国数学会最重要的工作之一；随后，立即成立了编译委员会，负责具体的组织工作。由于我国广大数学家的热情支持和参加，所以编译工作进展比较顺利。必须指出，科学出版社始终将这项工作作为该社的一项重点任务来抓，编辑人员为此付出了长期的艰苦劳动。

本书中文版分五卷，包括了俄文版的全部内容和英文版增补的内容。为尽快出版，条目按英文字母顺序排列。在第五卷中，附有详尽的中文和外文索引，此外还增加了600余篇数学家小传。

本书除中文简体字版本以外，还有繁体字版，繁体字版由台湾九章出版社出版发行。这也是海峡两岸数学家和出版界人士的一次良好合作。

老一辈数学家苏步青教授为本书题写书名，陈省身教授作序，苏步青、陈省身、吴文俊、程民德教授应邀担任编译委员会顾问。对于他们的支持，谨致以衷心的感谢!

最后，对于书中欠妥和错误之处，还望读者不吝指教。

《数学百科全书》编译委员会

本书的排版得到科学出版社技术室的大力协助，并由河北省雄县电脑服务部负责植字。谨此致谢!

D

δ-σ 运算 [δ-σ-**operation**; δ-σ-**операция**]

一个集合论运算，其作用于集合序列 (E_n) 的结果可记为：

$$\Phi(E_n)=\bigcup_{z\in N}\bigcap_{n\in z}E_n,$$

其中 N 是正整数集的系统，称为 δ-σ 运算的基 (base of the δ-σ-operation). 见**描述集合论** (descriptive set theory).

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., 《Матем. сб.》, **35** (1928), 3–4, 415–422.

[2] Хаусдорф, Ф., Теория множеств, М.-Л., 1937 (译自德文).

[3] Александров, П. С., Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств, М., 1978, 35–40, 53–58.

[4] Очан, Ю. С., 《Успехи матем. наук》, **10** (1955), 3, 71–128.

[5] Колмогоров, А. Н., 《Успехи матем. наук》, **21** (1966), 4, 275–278.

А. Г. Елькин 撰 张锦文、赵希顺 译

D 模 [D-**module**; D-**модуль**]

【补注】 D 模理论是**线性偏微分方程** (linear partial differential equation) 理论的代数化形式. 它涉及微分算子环上的**模** (module), 是由 I. N. Bernstein, J. E. Björk, 柏原正樹, 河合隆裕, B. Malgrange, Z. Mebkhout 和其他人发展的. 不久前 D 模理论在数学的很多方面得到了应用, 例如奇异空间的**上同调** (cohomology), 相交上同调上的 **Hodge 结构** (Hodge structure), 奇点理论 (见**可微映射的奇异性** (singularities of differentiable mappings)), **Gauss-Манин 联络** (Gauss-Manin connection), **表示论** (representation theory), 和 Kazhdan-Lusztig 猜想 (Kazhdan-Lusztig conjectures). 关于 D 模理论的两篇综述论文是 [A10] 和 [A14]. 在基础流形是代数的情况下有十分漂亮的 D 模理论 (见 [A4]). 解析理论的启发性陈述可在 [A15] 中找到 (亦见 [A2], [A3]). 有力的技巧是微局部工作与引进微微分算子 (见 [A7], [A9], [A18]). 然而关于 D 模的微局部结果下文将不陈述.

以后, 以 X 表示 C 上的一个复解析流形 (见**复流形** (complex manifold)) 或一个光滑**代数簇** (algebraic variety). X 的结构层用 $\mathscr{O}_X$ 表示. X 上的微分算子层 D_X 是由 $\mathscr{O}_X$ 和 C 线性导子层 $\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_X)$ 生成的 $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_X)$ 的子层. 因此在一个以 $x_1, \cdots, x_n$ 为坐标的卡 $U\subset X$ 上, 一个元素 $P\in\Gamma(U, D_X)$ 能表达为一个有限和 $P=\sum a_{i_1\cdots i_n}\partial_1^{i_1}\cdots\partial_n^{i_n}$, 这里 $a_{i_1\cdots i_n}\in\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ 和 $\partial_i=\partial/\partial x_i$. 特别在代数的情况下, 将略为更一般些, 若 $X=\mathrm{Spec}\,k[x_1, \cdots, x_n]$, 这里 k 是一个特征为零的域, 则 $\Gamma(X, D_X)=k[x_1, \cdots, x_n][\partial_1, \cdots, \partial_n]=A_n(k)$ 是 k 上的第 n 个 **Weyl 代数** (Weyl algebra). 层 D_X 是非交换左和右 Noether 环上的**凝聚层** (coherent sheaf) (见 [A3]). 结构层 $\mathscr{O}_X$ 自然地成为一个凝聚左 D_X 模. 更一般地, 设 $\mathscr{V}$ 是 X 上的一个有可积**联络** (connection) ∇ 的**向量丛** (vector bundle). $\mathscr{V}$ 上的 $\mathscr{O}_X$ 结构扩充为一个左 D_X 模结构是通过对所有局部截面 $\xi\in\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_X)$ 与 $v\in\mathscr{V}$ 命 $\xi\cdot v=\langle\nabla_\xi, v\rangle$. 反之, 其基础 $\mathscr{O}_X$ 模为凝聚的每个左 D_X 模都具有这个形式.

通常人们只考虑左 $\mathscr{O}_X$ 模. 这是无妨的, 因为人们可以自由地交换左和右 D_X 模. 即 X 上的最高阶微分形式的 $\mathscr{O}_X$ 模 Ω_X^n ($n=\dim X$) 带有一个凝聚右 D_X 模的

自然结构：对所有 $\omega\in\Omega_X^n$，$\xi\in\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_X)$，置 $\omega\cdot\xi=-L_\xi\omega$，此处 L_ξ 表示关于 ξ 的 **Lie 导数**（Lie derivative）．对任一左 D_X 模 M，$\Omega_X^n\otimes_{\mathcal{O}_X}M$ 有一个右 D_X 结构，而对任一右 D_X 模 N，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^n, N)$ 有一个左 D_X 结构．

设 (P_{ij}) 是系数 $P_{ij}\in\Gamma(X, D_X)$ 的一个 $(p\times q)$ 矩阵，且考虑左 D_X 线性映射 $P: D_X^p\to D_X^q$，它由矩阵 (P_{ij}) 从右面作用在 D_X^p 上来定义，则 $M=\mathrm{Coker}(P)$ 是一个凝聚左 D_X 模．显然地，$\mathrm{Hom}_{D_X}(M,\mathcal{O}_X)=\{f\in\mathcal{O}_X^q: \sum_{j=1}^q P_{ij}f_j=0\}$．因此，线性系统 $(P_{ij})u=0$ 的全纯解能被解释为 $\mathbf{C}$ 向量空间 $\mathrm{Hom}_{D_X}(M,\mathcal{O}_X)$ 的一些元素，反之亦然．这引导人们对任一左 D_X 模 M 去考虑导出解复形 $\mathrm{R\,Hom}_{D_X}(M,\mathcal{O}_X)$．将 $\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_X)$ 等同于 D_X 的一个子层使得人们能构造复形 $\Omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}M$．将它表示为 $\mathrm{DR}(M)$ 并称为 M 的 de Rham 复形（de Rham complex）．

***D* 模上的运算**．为了合适地描述 D 模理论，导出范畴和导出函子的工具是必不可少的．以 $\mathrm{Mod}(D_X)$（分别地，$\mathrm{Coh}(D_X)$）表示左（分别地，凝聚）D_X 模的范畴．以 $\mathrm{D^b}(D_X)$ 表示左 D_X 模的有界复形的**导出范畴**（derived category）．设 $f: X\to Y$ 是两个复解析（或光滑代数）流形之间的一个全纯映射．设 N 是一个左 D_Y 模．$\mathcal{O}_X$ 模 $f^*N=\mathcal{O}_X\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}f^{-1}N$ 带有一个自然的左 D_X 结构．置 $D_{X\to Y}=f^*D_Y$．这是一个左 D_X，右 $f^{-1}D_Y$ 双模．逆象函子 Lf^* 则由

$$Lf^*N=D_{X\to Y}\overset{L}{\underset{f^{-1}D_Y}{\otimes}}f^{-1}N$$

对所有 $N\in\mathrm{D^b}(D_Y)$ 给出．

用左右原理产生一个左 $f^{-1}D_Y$，右 D_X 双模 $D_{Y\leftarrow X}$．这时直接象函子 f_+ 对所有 $M\in\mathrm{D^b}(D_X)$ 定义为

$$f_+M=\mathrm{R}f_*[D_{Y\leftarrow X}\overset{L}{\underset{D_X}{\otimes}}M].$$

经常用 $\int_f M$ 来表示直接象．在代数范畴中，有如下结果：若 $g: Y\to Z$ 是另一个态射，则 $(gf)_+=g_+f_+$．在解析范畴中，当 f 是真映射时，这个结果同样成立．

在 $i: X\to Y$ 是一个闭嵌入的情况下，直接象 i_+ 是一个从 $\mathrm{Mod}(D_X)$ 到 $\mathrm{Mod}(D_Y)$ 的**正合函子**（exact functor），它保持凝聚性．事实上有如下结果（柏原等价（Kashiwara equivalence））：i_+ 建立了 $\mathrm{Coh}(D_X)$ 与支集包含在 X 内的凝聚 D_Y 模范畴之间的一个等价．在**浸没**（submersion）$\pi: X\to Y$ 和 D_X 模 $M\in\mathrm{Mod}(D_X)$ 的情况下，相对微分形式的复形 $\Omega_{X/Y}$ 引出相对 de Rham 复形（relative de Rham complex）$\mathrm{DR}_{X/Y}(M)$．故直接象是 $\pi_+M=\mathrm{R}\pi_*(\mathrm{DR}_{X/Y}(M))[d]$，此处 $d=\dim X-\dim Y$．

设 $Z\subset X$ 是由理想 $I\subset\mathcal{O}_X$ 定义的闭子簇．对任一左 D_X 模 M，定义 $\Gamma_{[Z]}M=\lim_{\to}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I^k, M)$．它是一个由被 I 的某个幂次零化的截面组成的 M 的 D_X 子模．这类似于通常的"具有支集的截面"函子．它的第 i 次**导出函子**（derived functor）常常表示为 $\mathscr{H}^i_{[Z]}$．当然在代数范畴中 $\Gamma_{[Z]}=\Gamma_Z$．

完整 *D* 模（holonomic D-module）．层 D_X 为微分算子的阶所滤过．相伴的分次 $\mathrm{gr}\,D_X$ 可以等同于 T^*X 上的在纤维上是多项式的全纯函数层．由于一个凝聚 D_X 模 M 具有局部有限表示，它局部带有一个所谓好的**滤过**；见**滤过模**（filtered module）．这至少局部地给出一个 $\mathrm{gr}\,D_X$ 内的凝聚理想，即 $\mathrm{gr}M$ 的零化子．已证明**其根基**（radical）不依赖于滤过，所以合在一起得到一个在 $\mathcal{O}_{T^*X}$ 中的根基齐次理想．它的轨迹定义了一个 T^*M 的闭圆锥子簇 $\mathrm{SS}(M)$，称为 M 的奇异支集（singular support）或特征簇（charactristic variety）．与其紧密相关的是特征闭链（charactristic cycle）$\mathrm{char}(M)$．它是 $\mathrm{SS}(M)$ 的计及重数的不可约分量的形式线性组合．

余切丛 T^*X 具有**辛流形**（symplectic manifold）结构．下面的基本结果是由柏原正樹、河合隆裕和佐藤幹夫 1971 年在 Katata 会议上用微局部分析证明的：一个凝聚 D_X 模 $M\neq 0$ 的特征簇 $\mathrm{SS}(M)$ 是对合的．一个代数的证明是由 O. Gabber（[A5]）给出的．有人也用"上迷向"（co-isotropic）来替代对合．回忆 T^*X 的一个对合子簇 V 有 $\dim V\geqslant\dim X$．若等式成立，则 V 是一个 **Lagrange 流形**（Lagrangian manifold）．现在一个非零 D_X 模称为完整的（holonomic），若它是凝聚的和它的特征簇是 Lagrange 的．零模也定义为完整的．例如，任一个有可积联络的向量丛 $\mathscr{V}$ 是完整的，因为它的特征簇是 T^*X 的零截面．进而，它的 de Rham 复形 $\mathrm{DR}(\mathscr{V})=\mathrm{Ker}(\nabla,\mathscr{V})$ 是 X 上的一个局部系统．

一个完整 D_X 模 M 的特征簇形式为 $\mathrm{SS}(M)=\bigcup_\alpha\overline{T^*_{S_\alpha}X}$，这里 $S_\alpha=\pi(V_\alpha)_{\mathrm{reg}}$，$V_\alpha$ 是 $\mathrm{SS}(M)$ 的不可约分量，而 $\pi: T^*X\to X$ 表示投影．完整模的一个重要性质是下面柏原正樹的结果（例如，见[A7]），它说：完整 D_X 模 M 的 de Rham 复形 $\mathrm{DR}(M)$ 是可构造的．回忆一个 X 上的向量空间的层称为可构造的（constructible），若存在一个**分层化**（stratification）$X=\bigcup_\alpha S_\alpha$ 使得 F 在每个层 S_α 上的限制是一个局部系统．用 $\mathrm{D}_c^b(X)$ 表示具有可构造上同调的 $\mathbf{C}$ 向量空间的层有界复形的导出范畴．一个完整 D_X 模 M 的解复形也是可构造的，因为它同构于 $\mathrm{DR}(M)$ 的 Verdier 对偶（见**导出范畴**（derived category））（见[A12]）．

Bernstein-佐藤多项式（Bernstein-Sato polynomial）．一个凝聚 D_Y 模 N 的逆象不一定是一个凝聚 D_X 模．然而，如假定 N 是完整的，则 f^*N 也是完整的，并且特别是凝聚的．再者，对每个闭子簇 $Z\subset X$ 和每个完整 D_X 模 M，对所有 j 局部上同调 $H^j_{[Z]}M$ 是完

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

整的．与此紧密相关的是下面的陈述，它成为 D 模理论的奠基石之一．设 $f\in\mathscr{O}_X$，则存在一个非零多项式 $b(s)$ 和 $P(s)\in D_X[s]$，使得 $P(s)f^{s+1}=b(s)f^s$．

次数最低的满足上面等式的首一多项式称为 Bernstein-佐藤多项式(Sato polynomial)或 f 的 b 函数(b-function) $b_f(s)$．在代数情况下这个结果为 Bernstein 证明，在解析情况下为 Björk 所证明．柏原正树证明 b 函数的所有根都是有理数．若 $f:(\mathbf{C}^{n+1},0)\to(\mathbf{C},0)$ 是全纯函数的一个芽，Malgrange 证明集合 $\{\exp(2\pi i\alpha)$: α 是 $b_f(s)$ 的一个根$\}$包含所有维的单值化的所有本征值．这方面亦有 D. Barlet 的工作；例如在[A1]中，他证明 b 函数的根产生 $|f|^{2\lambda}$ 的亚纯延拓的极点．更精确地讲，若 α 是 $b_f(s)$ 的一个根，则存在一个整数 N 使得 $\alpha-N-v$ 是 $|f|^{2\lambda}$ 的一个极点，对每一个非负整数 v．最后，b 函数与 P. Deligne 的**消没闭链**(vanishing cycle)函子有关．对此例如见[A11]．

正则完整 D 模(regular holonomic D module)．正则奇异性的概念在一维时是经典的(见**正则奇点**(regular singular point))．回忆定义在 $\mathbf{C}$ 内 0 的一个邻域内的一个**微分算子**(differential operator) $P=a_0\partial^m+\cdots+a_m$ $(a_0\neq 0)$ 称为在 0 有正则奇异性(regular singularity)，如果微分方程 $Pu=0$ 的多值解有一个适度的增长性．由 Fuchs 的经典定理，它等价于 $\operatorname{ord}(a_i/a_0)\geqslant -i$，对所有 i．Malgrange 给出的一个等价公式是 $\chi(P,\mathscr{O})=\chi(P,\hat{\mathscr{O}})$，这里 $\hat{\mathscr{O}}$ 是 $\mathscr{O}=\mathbf{C}\{z\}$ 的形式完全化．指数 χ 定义为 $\chi(A,\mathscr{F})=\sum(-1)^i\dim_{\mathbf{C}}\operatorname{Ext}^i_D(A,\mathscr{F})$．例如见[A4]第 3，4 章．正则性概念由 Deligne 推广到高维．到 D 模的推广是由柏原正树，Mebkhout, Oshima 和 J. P. Ramis 给出的．在文献中有各种等价的正则性定义，下面是本文给出的：一个完整 D_X 模 M 称为有正则奇异性(regular singularities)，若 $\chi(M_x,\mathscr{O}_{X,x})=\chi(M_x,\hat{\mathscr{O}}_{X,x})$，对所有 $x\in X$．

注意在代数范畴中要求"在无穷远点"都是正则的(关于 Bernstein 给的定义见[A4]第 7 章)．设 X 是一个光滑代数簇，且设 $j:X\to\bar{X}$ 是一个光滑完全化．设 M 是一个完整 D_X 模，则 M 是正则的，当且仅当 j_*M 是正则的．由 GAGA，这相当于 $(j_*M)^{an}$ 在基础复解析流形 $(\bar{X})^{an}$ 上的正则性．在代数情况下正则性对于直接象与逆象是保持的．在解析情况下，直接象函子在真映射下保持正则完整性(见[A9])．对非真映射情况的一个结果见[A6]．逆象函子是保持正则性的．对任一闭子空间 $Z\subset X$ 和任一正则完整 D_X 模 M，$H^j_{[Z]}(M)$ 有正则奇性，对所有 j．

Riemann-Hilbert 对应(Riemann-Hilbert correspondence)．它断言 de Rham 函子 DR 建立了 $\mathrm{D}^b_{rh}(D_X)$ 和 $\mathrm{D}^b_c(X)$ 两个范畴之间的一个等价关系，这里 $\mathrm{D}^b_{rh}(D_X)$ 表示具有正则完整上同调的 D_X 模的有界复形的导出范畴．这个结果是由柏原正树，河合隆裕(见[A8]，[A9])和 Mebkhout([A13])独立给出的．不言而喻，此处假定 X 是解析的．在代数情况下，$\mathrm{D}^b_c(X)$ 必须由 $\mathrm{D}^b_c(X^{an})$ 代替(见[A4])．这个对应是 D 模理论中最精采的部分之一．它在解析对象(正则完整 D 模)和几何对象(可构造层)两者之间建立了一座桥．

反常层(perverse sheaf)．一个可构造层 $F\in\mathrm{D}^b_c(X)$ 称为一个反常层，如果 1) $H^i(F)=0$，当 $i<0$ 和 codim supp$(H^i(F))\geqslant i$ 时；2) Verdier 对偶 $(F)^*$ 也满足 1)．这时 Riemann-Hilbert 对应诱导了正则完整 D_X 模范畴和 X 上的反常层范畴之间的一个等价关系．反常层的一个例子是相交上同调复形 IC_Y，这里 $Y\subset X$ 是一个闭解析空间．在 Y 是投影的情况，已猜测相交上同调群 $IH(Y)$ 带有一个纯 Hodge 结构．应用 D 模框架，这为斋藤正彦所确认(见[A16]，[A17])．他也对 Beilinson, Bernstein, Deligne 和 Gabber 的分解定理(decomposition theorem)给出一个解析证明．

参考文献

[A1] Barlet, D., Monodromie et pôles du prolongement méromorphe de $\int_X|f|^{2\lambda}\Box$, *Bull. Soc, Math. France*, **114** (1986), 247 - 269.

[A2] Björk, J.-E., Analytic D-module, Acad. Press, to appear.

[A3] Björk, J.-E., Rings of differential operators, North-Holland, 1979.

[A4] Borel, A., et al., Algebraic D-Modules, Acad. Press, 1987.

[A5] Gabber, O., The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. Math.*, **103** (1981), 445 - 468.

[A6] Houzel, C. and Schapira, P., Images directes de modules différentiels, *C. R. Acad. Paris Sér. 1 Math.*, **298** (1984), 461 - 464.

[A7] Kashiwara, M., Systems of microdifferential equations, Birkhäuser, 1983.

[A8] Kashiwara, M., The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **20** (1984), 319 - 365.

[A9] Kashiwara, M. and Kawai, T., On the holonomic systems of micro-differential equations Ⅲ, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **17** (1981), 813 - 979.

[A10] Lê, D. T. and Mebkhout, Z., Introduction to linear differential systems, in P. Orlik (ed.): Singularities, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 40, 2, Amer. Math. Soc., 1983, 31 - 63.

[A11] Malgrange, B., Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, *Astérisque. Analyse et topologie sur les espaces singuliers* (Ⅱ-Ⅲ), **101-102** (1983), 243 - 267.

[A12] Mebkhout, Z., Théorèmes de bidualité locale pour les D_X-modules holonomes. *Ark. Mat.*, **20** (1982), 111 − 124.

[A13] Mebkhout, Z., Une autre équivalence de catégories, *Compos. Math.*, **51** (1984), 63 − 88.

[A14] Oda, T., Introduction to algebraic analysis on complex manifolds, in S. Iitaka (ed.): Algebraic varieties and analytic varieties, North-Holland, 1983, 29 − 48.

[A15] Pham, F., Singularitiés des systèms différentiels de Gauss-Manin, Birkhäuser, 1979.

[A16] Saito, M., Hodge structure via filtered D-modules, *Astérisque. Systèmes différentiels et singularitiés*, **130** (1985), 342 − 351.

[A17] Saito, M., Modules de Hodge polarisables, *Preprint RIMS*, **553** (1986).

[A18] Schapira, P., Microdifferential systems in the complex domain., Springer, 1985.

M. G. M. van Doorn 撰 陈志华 译

d'Alembert 准则（关于级数收敛性的）[d'Alembert criterion (convergence of series); д'Аламбера признак]

对于数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

如果存在数 q, $0<q<1$, 使得从某一项起，不等式

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<q$$

均成立，则这个级数绝对收敛；如果从某一项起，均有

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\geqslant 1,$$

则这个级数发散．特别是，如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1$$

存在，则这个级数绝对发散，而如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1,$$

则这个级数发散．例如，对于一切复数 z, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

绝对收敛，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{z^n}{n!}\right|}=0;$$

而对于一切 $z\neq 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$ 发散，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+1)!z^{n+1}|}{|n!z^n|}=+\infty.$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=1,$$

则级数可能收敛也可能发散；两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

都满足这个条件，但第一个级数是收敛的，而第二个级数是发散的．

这个准则是 J. d'Alembert 确立的 (1768).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 这个准则也称为比值检验法 (ratio test), 见 [A1].

参考文献

[A1] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953 (中译本：W. 卢丁，数学分析原理，高等教育出版社，1979).

张鸿林 译

d'Alembert 方程 [d'Alembert equation; д'Аламбера уравнение]

形如

$$y=x\varphi(y')+f(y')$$

的微分方程，其中 φ 和 f 是可微函数；J. d'Alembert 于 1748 年首先进行研究．亦称 Lagrange 方程 (Lagrange equation).

БСЭ-2

【补注】 对于 $\varphi(y')=y'$, d'Alembert 方程简化为 **Clairaut 方程** (Clairaut equation). 关于（解）d'Alembert 方程的某些结果，例如见 [A1].

参考文献

[A1] Ince, E. L., Integration of ordinary differential equations, Oliver & Boyd, 1963, p. 43ff.

张鸿林 译

d'Alembert-Euler 条件 [d'Alembert-Euler conditions; д'Аламбера-Эйлера условия]

见 **Cauchy-Riemann 条件** (Cauchy-Riemann conditions)

d'Alembert 公式 [d'Alembert formula; д'Аламбера формула]

表示只含一个空间变量的波动方程的 Cauchy 问题之解的公式．设给定的函数 φ, ψ 分别属于空间 $C^2(-\infty, +\infty)$ 和 $C^1(-\infty,+\infty)$, 而函数 $f(t,x)$ 及其对 x 的一阶偏导数在半平面 $\{t\geqslant 0, -\infty<x<+\infty\}$ 上是连续的．这时，**Cauchy 问题** (Cauchy problem)

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \tag{2}$$

在 $\{t>0,\ -\infty<x<+\infty\}$ 中的经典解 $u(t,x)$ 可以由 d'Alembert 公式

$$u(t,x)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]$$

来表示，如果函数 φ 和 ψ 是已知的，且在区间 $\{|x-x_0|<aT\}$ 上满足上述光滑性条件，而函数 $f(t,x)$ 在三角形

$$Q_{x_0}^T=\{|x-x_0|<a(T-t),\ t\geqslant 0\}$$

中满足上述条件，则 d'Alembert 公式给出 Cauchy 问题 (1)，(2) 在 $Q_{x_0}^T$ 中的唯一解，如果关心的是某种广义解，则对已知函数的这些要求可以减弱．例如，由 d'Alembert 公式可知，如果 f 关于任何三角形 $Q_{x_0}^T$ 都是可积的，ψ 是局部可积的，φ 是连续的，则 Cauchy 问题 (1)，(2) 的弱解可以定义为具有光滑已知数据的经典解（在任何 $Q_{x_0}^T$ 中）的一致极限，而且也可由 d'Alembert 公式来表示．

这个公式因 J. d'Alembert 而得名 (1747)．

参考文献

[1] Владимиров, В.С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971 (英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984).

[2] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966 (中译本: А. Н. 吉洪诺夫、А. А. 萨马尔斯基，数学物理方程，高等教育出版社，1956－1957).

А. К. Гущин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本: R. 柯朗、D. 希尔伯特，数学物理方法，II，科学出版社，1977).

张鸿林 译

d'Alembert-Lagrange 原理 [d'Alembert-Lagrange principle; д'Аламбера-Лагранжа принцип]

一种基本的、最通用的微分经典力学的变分原理 (variational principle of classical mechanics)，它表达了受理想约束的质点系统的真实运动与给定的主动力相对应的充分必要条件．在 d'Alembert-Lagrange 原理中，系统在其真实运动中的位置是与该时刻约束允许的无限接近的位置相比较的．

根据 d'Alembert-Lagrange 原理，在系统真实运动过程中，由给定的主动力和惯性力在所有可能位移上所作的元功之和，在任何时刻都等于或小于零，

$$\sum_\nu(F_\nu-m_\nu w_\nu)\,\delta r_\nu\leqslant 0. \qquad (*)$$

对可逆的可能位移，等号成立，而对不可逆的可能位移 δr_ν，符号 $\leqslant$ 成立；F_ν 为给定的主动力，m_ν 和 w_ν 分别为质点的质量和加速度．方程 (*) 是具有理想约束的系统的普遍动力学方程；它包括了所有的运动方程和定律，因此可以认为，全部动力学可归结为一个普遍公式 (*).

该原理是由 J. L. Lagrange ([1]) 借助 **d'Alembert 原理** (d'Alembert principle)，将**虚位移原理** (virtual displacements, principle of) 推广而建立的．对具有双边约束的系统，Lagrange 本人在公式 (*) 的基础上推出了多个物体运动的普遍性质和定律以及运动方程，并用于求解一系列动力学问题，包括不可压、可压和弹性液体的运动问题，从而将“动力学和流体力学统一成同一原理的分支和由同一普遍公式得出的结论”．

参考文献

[1] Lagrange, J., Mécanique analytique, Paris, 1788.

В. В. Румянцев 撰

【补注】 d'Alembert-Lagrange 原理非常接近于变分原理 (variational principle)，后者认为受（完整的）约束的力学系统的演变路径构成一条作用积分的极值曲线，见 [A2]，§ 21.

参考文献

[A1] Goldstein, H., Classical mechanics, Addison-Wesley, 1962.

[A2] Arnol'd, V. I., Méthodes mathématiques de la mécanique classique, MIR, 1976 (译自俄文).

唐福林 译

d'Alembert 算子 [d'Alembert operator 或 d'Alembertian; д'Аламбера оператор 或 д'Аламбертиан]，波动算子 (wave operator)

二阶微分算子，在 Descartes 坐标中具有下列形式:

$$\Box u\equiv\Delta u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2},$$

其中 Δ 是 Laplace 算子，c 是常数．在球面坐标中，它的形式是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2};$$

在柱面坐标中，它的形式是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right]+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2};$$

在一般曲线坐标中，它的形式是

$$\square u=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial u}{\partial x^{\mu}}\right],$$

其中 g 是由度量张量的系数 $g^{\mu\nu}$ 构成的矩阵 $\|g^{\mu\nu}\|$ 的行列式．

因 J. d'Alembert (1747) 而得名，他在解一维波动方程时考虑了这个算子的最简单的形式．

А. Б. Иванов 撰

【补注】 在上面的最后一个方程中，对其右端可应用 Einstein (求和) 约定 (即存在遍及 μ，ν 的求和法).

参考文献

[A1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本: R. 柯朗、D. 希尔伯特，数学物理方法，Ⅱ，科学出版社，1977).

[A2] John, F., Partial differential equations, Springer, 1968 (中译本: F. 约翰，偏微分方程，科学出版社，1986).

张鸿林 译

d'Alembert 原理 [**d'Alembert principle**; **д'Аламбера принцип**]

具有约束的力学系统的基本原理之一；它包括一通用方法，借助它任一力学系统的运动方程均能以力平衡方程的形式导出 (在此意义上，d'Alembert 原理将动力学"归结"成静力学)，还可决定约束的反作用这原理是由 J. d'Alembert ([1]) 作为决定用绳索或刚性杆连结而相互作用的几个物体的运动 (即速度矢量) 的一种法则提出的：传给物体的每一运动都分解成两种运动——物体实际上接受到的运动和某一其他运动，且这两种运动必须是这样的，即如果物体完成的只是第一种运动，则它们将互不干扰地完成该运动，如果物体完成第二种运动，则它们将保持静止．

此原理曾被 d'Alembert 及其他科学家成功地用于解决一系列问题．然而，按此原理分解运动以及确定那些应该互相抵消的力是一件困难的任务．这促使 J. Lagrange ([2]) 在建立力与由力产生的但指向相反的运动之间的平衡的基础上，提出 d'Alembert 原理的另一种表述，这一表述接近此学科的现代想法．令 F_ν 和 R_ν 分别为给定的主动力和作用在质点上的约束的反作用，这里质点的质量为 m_ν，以加速度 w_ν 运动，则根据 d'Alembert 原理・

$$F_\nu+R_\nu-m_\nu w_\nu=0,\quad \nu=1,2,\cdots\cdots,\qquad (*)$$

亦即，在任一时刻主动力和运动质点所受约束的反作用，被质点的惯性力 $-m_\nu w_\nu$ 所平衡．换言之，假如力 F_ν 被分解成两个分量力，

$$F_\nu=m_\nu w_\nu+P_\nu,$$

则方程 (*) 将取形式

$$P_\nu+R_\nu=0,\quad \nu=1,2,\cdots\cdots,$$

亦即，在任一时刻"失去的力" $P_\nu=F_\nu-m_\nu w_\nu$ 被约束的反作用力所平衡 ([3]).

参考文献

[1] d'Alembert, J., Traité de dynamique, Paris, 1743.

[2] Lagrange, J. L., Mécanique analytique, Paris, 1788.

[3] Суслов, Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М. -Л., 1946.

В. В. Румянцев 撰

【补注】有时，d'Alembert 原理阐述成：外力、惯性力和约束力之和为零，见 ([A2]), ([A3]). 亦见 **d'Alembert-Lagrange 原理** (d'Alembert-Lagrange principle).

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文).

[A2] Synge, J. L. and Griffith, B. A., Principles of mechanics, McGraw-Hill, 1959.

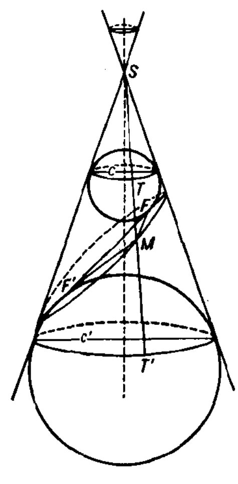
[A3] Targ, S., Theoretical mechanics, Moscow, no date (俄文).

[A4] Arnol'd, V. I., Méthodes mathématiques de la mécanique classique, MIR, 1976 (译自俄文).

唐福林 译

Dandelin 球面 [**Dandelin spheres**; **Данделена шары**]

利用立体图形作出平面曲线椭圆、双曲线、抛物线的方法中，所牵涉到的两个球．例如，两个球面 (也称为 Dandelin 球面 (Dandelin spheres)) 与一圆锥面沿着圆 c 和 c' 相切，又与某一平面 π 相切于点 F 和 F' (见图)．



如果在锥面和平面 π 的交线上任取一点 M，并且母线 SM 分别与圆 c 和圆 c' 交于点 T 和 T'，则当 M 变化时，点 T 和 T' 分别沿着圆 c 和圆 c' 而运动，同

时保持距离 TT' 不变，则锥面与平面 π 的交线是一个椭圆（$MF'+MF=TT'$，$MF'=MT'$，$MF=MT$）．在双曲线的情形，两个 Dandelin 球面各位于锥面的一叶内．

这个作法系 G．Dandelin 在1822年提出的．

参考文献

[1] Моденов, П. С., Аналитическая геометрия, М., 1969. А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 2, Springer, 1987（中译本：M．贝尔热，几何，第二卷，科学出版社，1989）．

马传渔 译 黄正中 校

Daniell 积分 [Daniell integral；Даниеля интеграл]

由 P. Daniell（[1]）提出的关于积分概念的一种推广．此积分的构造格式，称为 Daniell 格式（Daniell scheme），是由原来对某个函数类（所谓初等函数类）定义的积分到更广函数类的一种推广．当保留推广方法但改变原来的初等函数集的内容时，便能够获得积分概念的种种推广．在此格式中初等积分概念是公理化定义的，这与 Lebesgue 格式（见 **Lebesgue 积分**（Lebesgue integral））不同，在后一情形测度概念是公理化定义的．

设 X 为任一集合并设 L_0 为定义在 X 上的实有界函数的某一集合；这些函数称为初等的（elementary）．这里假定 L_0 为向量格（vector lattice），即对 $f,g\in L_0$ 与 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ 有 $\alpha f+\beta g\in L_0$ 且

$$f,g\in L_0 \text{ 蕴涵 } \sup(f,g),\ \inf(f,g)\in L_0.$$

设 I 是定义在 L_0 上的实泛函，满足

1) $I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g)$（线性）；

2) $f\geqslant 0\Rightarrow I(f)\geqslant 0$（非负性）；

3) 若 $f_n(x)\downarrow 0$，对一切 x，则 $I(f_n)\to 0$（关于单调收敛的连续性）．

这样的泛函称为初等函数类上的积分或初等积分（elementary integral）．集合 $M\subset X$ 称为零测度集（set of measure zero），如果对每个 $\varepsilon>0$，存在非减序列 $\{g_n\}\subset L_0$，使对一切 x 有 $\sup_n g_n(x)\geqslant\chi_M(x)$，且 $\sup I(g_n)\leqslant\varepsilon$．这里 χ_M 表示 M 的特征函数．

X 上函数 f 属于类 L^+，指的是存在序列 $\{f_n\}\subset L_0$ 使几乎处处（almost-everywhere）有 $f_n(x)\uparrow f(x)$ 且 $I(f_n)\leqslant c<+\infty$．数 $I(f)=\lim_n I(f_n)$ 称为 f 的积分（integral）．积分 $I(f)$ 不依赖于特殊逼近序列 $\{f_n\}$ 的选取．

用类（class）L 表示这样的函数 f 的集合，它们定义于 X 上且可表成 $f=f_1-f_2$，其中 $f_1,f_2\in L^+$．类 L 中的函数称为可和的（summable），而数

$$I(f)=I(f_1)-I(f_2)$$

称为函数 f 的 Daniell 积分（Daniell integral）．类 L 是某些有限函数所组成的某一个向量格（函数确定到零测度集），它关于几乎处处收敛且具有限积分的序列是封闭的，而可和函数的 Daniell 积分具有线性，非负性，关于具有优可和函数的序列几乎处处收敛的连续性（关于积分号下取极限的 Lebesgue 定理），以及积分的一些其他自然性质．

若 $X=[a,b]$ 且 L_0 为阶梯函数

$$f(x)=c_i,\quad a_i\leqslant x<b_i,\quad \bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)=[a,b),\quad b_i=a_{i+1}$$

组成的集合，则 Daniell 积分成为 $[a,b]$ 上可和函数类的 Lebesgue 积分．Daniell 格式可用来构造取值于 σ 完全格的函数的积分．

参考文献

[1] Daniell, P., A general form of integral, *Ann. of Math.*, **19** (1917), 279–294.

[2] Шилов, Г. Е. и Гуревич, Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд., М. 1967（英译本：Shilov, G. E. and Gurevich, B. L., Integral, measure and derivative: a unified approach, Dover, reprint, 1977）.

[3] Loomis, L. H., An introduction to abstract harmonic analysis, v. Nostrand, 1953. В. И. Соболев 撰

【补注】 上面非负线性泛函 I 所满足的性质 3)（即当对一切 x，$f_n(x)\downarrow 0$ 时有 $I(f_n)\to 0$）称为 Denjoy 条件（Denjoy condition），并且是一项很重要的要求．

上文所述类 $L^+(L)$ 中函数显然允许在一个零测度集改变其值；如此得到的等价类仍称为函数（说得含糊些），正像通常在测度论中所作的那样．这样，L 成为向量格这一陈述应理解为：L 中等价类的集合构成一个向量格．

如果**向量格**（vector lattice）L_0 具有如下性质：

$$f\in L_0 \quad \text{蕴涵} \quad \inf(1,f)\in L_0,$$

则在 X 上由 L_0 生成的 σ 域上有唯一的 σ 有限 σ 可加**测度**（measure）μ，使得 L 为 $L_1(\mu)$，且对 $f\in L$，$I(f)$ 即为 $\int f d\mu$（见[3]）．实际上，Daniell 积分常用来构造泛函分析中的测度．

参考文献

[A1] Stromberg, K., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

[A2] Szökefalvi-Nagy, B., Real functions and orthogonal expansions, Oxford Univ. Press, 1965. 郑维行 译

Dante 空间 [Dante space；Дантово пространство]

拓扑空间的一个类型．设 X 是一拓扑空间，Y 是它的子空间，且设 τ 和 λ 是无限基数．如果对每个满足 $\mathrm{card}A\leqslant\tau$ 的 $A\subset Y$，在 X 中的闭包 $[A]$ 是权 $\leqslant\tau$ 的紧统，则称空间 Y 为 X 中的 τ 单块．若由 $\lambda\geqslant\tau$，$A\subset Y$，

及 card $A \leqslant \exp\lambda$，可推出存在 $A' \subset X$，使得 $[A'] \supseteq A$ 且 card $A' \leqslant \lambda$，则称空间 $X\tau$ 抑制子空间 Y．如果对每个无限基数 τ，存在 X 的一个处处稠密的子空间 Y，它自身是单块，又被 $X\tau$ 抑制，则称空间 X 为 Dante 空间 (Dante space)．Dante 空间类包含二进紧统类（见二进紧统 (dyadic compactum)）．　Б. А. Ефимов 撰

【补注】 这些概念的应用见 [A1].

参考文献

[A1] Arkhangel'skii, A. V., Factorization theorems and spaces of continuous functions: stability and monolithicity, *Sov. Math. Dokl.*, **26** (1982), 177－181 (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **265** (1982), 5, 1039－1043.)

许依群、罗嵩龄、徐定宥 译

Darboux 方程 [Darboux equation；Дарбу уравнение]

1) 常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)+yR(x,y)}{Q(x,y)+xR(x,y)},$$

其中 P, Q 和 R 是 x 和 y 的整多项式，这个方程是 G. Darboux 首先研究的 ([1])．**Jacobi 方程** (Jacobi equation) 是 Darboux 方程的特例．设 n 是多项式 P, Q, R 的最高次数；如果 Darboux 方程具有 s 个已知的代数特解，则当 $s \geqslant 2+n(n+1)/2$ 时，不必求积分即可得到它的通解；而当 $s=1+n(n+1)/2$ 时，可以找到积分因子 ([2])．如果 P 和 Q 是 m 次齐次函数，R 是 k 次齐次函数，则当 $k=m-1$ 时，Darboux 方程是齐次微分方程；当 $k \neq m-1$ 时，Darboux 方程通过代换 $y=zx$ 可以化为 **Bernoulli 方程** (Bernoulli equation)．

参考文献

[1] Darboux, G., Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré, *Bull. Sci. Math.*, **2** (1878), 60－96.

[2] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

Н. Х. Розов 撰

2) 双曲型方程

$$u_{tt} - \Delta u + \frac{\lambda(t,x)}{t} u_t = 0, \quad t \neq 0,$$

其中 $\lambda(t,x)$ 是 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的非负连续可微函数．对于 Darboux 方程的解和波动方程的解，下述唯一性定理成立．如果 Darboux 方程的某个二次连续可微的解 $u(x,y)$ 及其对 t 的导数在处于平面 $t=0$ 上的特征锥的底上等于零，则解 $u(x,y)$ 在由这个锥所围成的整个区域内等于零．特征锥的形状与**波动方程** (wave equation) 相同．如果 $\lambda(t,x)=n-1>0$，则 Darboux 方程满足初始条件

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t(t,x)|_{t=0}=0$$

的解是函数

$$u(x,t)=\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}t^{n-1}}\int_{|x-y|=1}\varphi(y)\,dS_y,$$

其中 φ 是二次连续可微函数，$\Gamma(z)$ 是 Γ 函数．在 Darboux 方程的这个解与波动方程满足条件

$$v(t,x)|_{t=0}=\varphi(x), \quad v_t(t,x)|_{t=0}=0$$

的解 $v(t,x)$ 之间存在关系式

$$u(t,x)=2\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{\pi}}\int_0^1 v(t\beta,x)(1-\beta^2)^{(n-3)/2}d\beta.$$

这个方程因 G. Darboux 而得名．

参考文献

[1] John, F., Plane waevs and spherical means applied to partial differential equations, Interscience, 1955.

А. К. Кушнин 撰　张鸿林 译

Darboux 网不变量 [Darboux net invariants；Дарбу инварианты сети]

从 Laplace 方程（在微分直线几何中）

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} = a\frac{\partial\theta}{\partial u} + b\frac{\partial\theta}{\partial v} + c\theta \qquad (*)$$

的系数导出的表达式 h 和 k，

$$h=c+ab-\frac{\partial a}{\partial u}, \quad k=c+ab-\frac{\partial b}{\partial v}.$$

在 $n(\geqslant 3)$ 维射影空间中，当一点 x 描绘出一个二维曲面上 u 线和 v 线的**共轭网** (conjugate net) 时，点 x 的齐次坐标便满足方程 (*)．G. Darboux ([1]) 证明了，当点 x 的坐标的规范化改变时，Darboux 不变量 h 和 k 的值不变．对 Darboux 不变量加上某种条件便可得到特殊形式的共轭网．

参考文献

[1] Barboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces et ses applications géométriques du calcul infinitesimal, 2, Gauthier-Villars, 1889.

[2] Tzitzeica, G., Geométrie différentielle projective des réseaux, Paris-Bucharest, 1924.

[3] Фиников, С. П., Теория конгруэнций, М.-Л., 1950.

В. Т. Базылев 撰

【补注】 表达式 h 和 k 通常称为网的 Darboux 不变量 (Darboux invariants of a net)．　沈一兵 译

Darboux 二次曲面 [Darboux quadric；Дарбу квадрика]

与三维射影空间 P_3 里的一个曲面 S 在点 x 处具有二阶切触的一个二次曲面，且它与曲面 S 的交线在点 x 处具有一种特殊类型的奇点．在 x 处与 S 具有二阶切触的二次曲面的集合中可以选出如下的二次曲面：它们与 S 的交线有一个具有三条重合切线的奇点 x．曲

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com