高等学校教学参考书

张量分析

张量分析

陈子荫 编著

中国矿业学院出版社

高等学校教学参考书

张量分析

陈子荫 编

中国矿业学院出版社

内 容 提 要

张量分析在现代连续介质力学书籍和文献中已被广泛应用。本书从工科大学生的数学力学训练水平出发，利用字母标号法阐述张量分析用于力学方面的基本内容。全书分笛卡儿张量及一般张量两章，可供需用校深力学知识的工科专业高年级学生及研究生学习参考，也适合具备数学分析、线性代数及弹性力学基本知识的工程技术人员自学之用。

责任编辑　莫国震

高等学校教学参考书

张量分析

陈子荫　编

中国矿业学院出版社出版

江苏省新华书店发行　中国矿业学院印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/16　印张6.25　字数150千字

1987年8月第1版　1987年3月第1次印刷

印数1—3000册

ISBN 7-81021-000-9/TD·1

统一书号：15443·017　定价：1.15元

目　录

第一章 笛卡儿张量

第一节 概 述

在连续介质力学的现代书籍和文献中，已广泛采用张量分析。

有些物理量，例如空间一点的温度，在单位选定以后，它的量值只需要一个实数就可以完全表征，而且，这个量值与坐标系的选用无关。这样的量在数学上称为绝对标量，以后就简称为标量，或称为零阶张量。

另一些较为复杂的物理量，例如空间某一质点的位移，要想表征它，就不但需要能说明其大小的量值，还需要说明其方向。这类量在几何上可用一个带箭头的线段来表示。如果要想把大小和方向这两点解析地表示出来，就需要选择一个坐标系，在单位确定以后，用位移在三个坐标轴上的分量来表示。显然，当改用另一个坐标系时，则表示这同一位移的三个分量也变化。一点位移是一个矢量，或称为一阶张量。

还有一些更为复杂的物理量，例如某一点的应力，要解析地表示它，就需要选定一个坐标系，一点的应力有九个分量，坐标系改变，九个分量的数值也改变，但九个分量所表示的总体，即一点的应力却没有变。

这里，我们遇到这样一个问题：本来与坐标系无关的物理量，现在却要用与坐标系选用有关的量去表征它。

如果不利用张量分析，那么，表示同一物理规律的数学表达式在一类坐标系中具有一种形式，在另一类坐标系中又具有另一种形式。例如，在一些弹性力学教材中，弹性力学的基本方程组在直角坐标系下建立一遍，在圆柱坐标系下又建立一遍，而且具有不同的最终形式。

在作理论研究的情形下，这当然不是我们所希望的。因为，在研究一些物理量之间的规律时，这样做的结果，就把与物理规律无关的坐标系选用和物理量之间的本质关系混杂在一起了。

能不能把坐标系选用的影响排除掉来建立反映物理规律的数学表达式呢？回答是肯定的，这就是本书要介绍的张量分析。用张量写法建立起来的数学表达式是坐标变换下的不变式。

如果坐标变换只限于直角坐标系范围内，那么，所表示的张量叫做笛卡儿张量；在一般曲线坐标系中表示的张量叫做一般张量。可见，笛卡儿张量是一般张量的特例。目前在固体力学的书籍及文献中，有相当多的部分只用到笛卡儿张量，一些内容更复杂的部分则用一般张量来描述。用笛卡儿张量来写，只能起到方程简化写法的目的；用一般张量写出的方程对任意坐标系都适用。从这里看出，张量写法的优越性恰恰是在使用一般张量时才突出地表现出来。

本书先介绍笛卡儿张量，然后过渡到一般张量。两者有许多类似的概念。第一章中用到张量二字，都应理解为笛卡儿张量；而在第二章中，则应理解为一般张量。两者都只限于在三维空间中讨论。

第二节 张量的字母标号表示及求和约定

对张量的表示，最常用的一种方法是字母标号法。在三维空间中，一个 n 阶张量有 3^n 个分量，如果每个分量都用不同的字母去表示，那将要发生很大的混乱，字母也会不够用。因此，在张量写法中，对同一个物理量的各个分量用同一字母表示，不同分量就用附标的具体数字来区别。例如，一点的位移的三个分量不用 u、v、w 三个字母，而用一个字母，譬如用 u 来表示，原来的 u、v、w 现在表示为 $u_i(i=1, 2, 3)$，i 就称为字母标号。又例如，一点的应力共有九个分量，应力分量可用字母 σ 表示，原来九个分量 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{yx}、τ_{zy}、τ_{xz}，现在表示为 $\sigma_{ij}(i, j=1, 2, 3)$，也有些书用 τ_{ij} 表示。

这种表示法有两个显著的优点。第一，不同阶的张量从字母标号的个数就可以清楚地看出来。例如 u_i 只有一个字母标号 i，就是一阶张量；σ_{ij} 有两个字母标号，它是一个二阶张量。第二，例如 σ_{ij}，它既表示一点应力这个总体，又可以表示应力九个分量中的任一个，在作后一种理解时，只要我们对 i，j 赋以数值 1、2 或 3，这样，列出一个张量方程，就很容易写出用分量表示的一组方程；反之，用分量写出的一组方程，也比较易于听出张量方程。

在使用字母标号法时，我们约定：同一字母标号若在一项中重复出现、就意味着求和。例如：

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

求和符号 Σ 不必写出，这些就称为求和约定。

根据这种约定，同一项中重复出现的字母标号已丧失代表任一分量的作用，而表示求和。这种标号称为哑标。既然哑标表示求和，所以使用哪个字母表示哑标都可以，即

$$a_{ii} = a_{jj} = a_{kk} = \cdots\cdots$$

改变哑标字母在以后的运算中经常要用到。有时，同一项中虽然有重复出现的字母标号，但不表示求和，此时需立即注明。求和约定只适用于字母标号，不适用于数字标号。

在同一项中不重复的字母标号叫做自由标号。利用自由标号可以把若干个式子写成一个式子，而利用哑标可以把一个式子中某些三项求和写成一项。这样一来，就可以把一组式子写得很简洁。

在字母标号法中，函数 $\varphi(x, y, z)$ 对坐标的偏导数写成 $\varphi_{,i}$，它代表 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$、$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$、$\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ 中任一个或其总体。$\varphi_{,ij}$ 代表 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}$、$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}$、$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3}$、……九个中的任一个，或其总体。逗号“，”在此表示对“，”之后的字母标号所代表的坐标求导。这里，x、y、z 已用 $x_i(i=1, 2, 3)$ 表示。

例如：弹性力学的平衡方程组在直角坐标系下通常的一种写法是

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z}+Z=0$$

这里，σ，τ 都是表示应力分量。用字母标号法，应力分量统一用字母 σ 表示。这三个式子可写成

$$\sigma_{ij,j}+X_i=0 \qquad (i,j=1,\ 2,\ 3)$$

i 是自由标号，因此，这个式子代表三个式子。j 是哑标，代表三项求和，原来三个式子在这里用一个式子就可以表示；原来式子的前三项在这里用一项就表示出来了。显然，张量写法简洁得多。

又如：应力边界条件原来写成（在 S_T 上）

$$\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n=T_x$$
$$\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n=T_y$$
$$\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n=T_z$$

用字母标号法则写为

$$\sigma_{ij}l_j=T_i \qquad (i,j=1,\ 2,\ 3)$$

这里，方向余弦 l，m，n 用 l_j 表示。

几何方程原来是九个式子（独立的是六个）：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\gamma_{yx}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\gamma_{zy}$$

$$\gamma_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\gamma_{xz}$$

这里，γ 表示纯角应变，和工程角应变差一个系数 $\frac{1}{2}$。凡用张量写法时均用纯角应变。

九个式子用一个式子就可以表示出来，这时需要两个自由标号，应变用 ε_{ij}，位移用 u_i，则张量写法为：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)$$

还有一种字母标号既不是自由标号，也不是哑标，称为有序标号。它在一项中不重复出现，因此易与哑标区别。它在一个式子中不必每项都有，因此易与自由标号区别。这种

标号的特点是，当取具体数字时要按一定顺序排列和轮换，例如：

$$A_i = B_i + C_j b_k - C_k b_j \qquad (i, j, k\text{为有序标号})$$

它代表下列三个式子：

$$A_1 = B_1 + C_2 b_3 - C_3 b_2$$

$$A_2 = B_2 + C_3 b_1 - C_1 b_3$$

$$A_3 = B_3 + C_1 b_2 - C_2 b_1$$

这种标号用得较少，用到时应注明是有序标号。

第三节　矢量分量的变换规则

在三维空间中，零阶张量只有一个分量，且在坐标系变换时，其值不变。一阶张量（即矢量）有三个分量，二阶张量有九个分量，三阶张量有二十七个分量等等，这些分量在坐标系变换时，其值是要变化的。既然物理量（其数学表示就是各阶张量）本身应该与坐标系选用无关，要解析地表示它们时，其分量取值又与坐标系选用有关。可见，同一张量在不同坐标系的分量之间应有某种确定的关系。所以，并不是任意三个数的组合（a_1，a_2、a_3）就叫做一阶张量（矢量），任意九个数 b_{ij} 的组合就叫二阶张量。不同阶的张量，其分量在坐标系变换时变换的规则不同，但应具有某种指定的形式。在弹性力学中已知道应力、应变的转轴公式，其中应力张量、应变张量都是二阶张量，那里的转轴公式就是这里所说的：在坐标系变换时其分量变换的指定形式即分量变换规则。因为都是二阶张量，所以分量变换的指定形式也一样。

既然不同阶的张量其分量在坐标系变换时有不同的变换规则，因此，一个表示某种物理规律的张量方程，如果列得正确的话，它的各项的张量阶数应该相同，否则就不能保证它是坐标变换下的不变式。这就如一个物理方程中各项的量纲都应该相同一样。

矢量分量的变换规则是最基本的，张量分量的变换规则就先从这里讲起，下一节才进而讨论二阶及高阶张量的分量变换规则。

这里讲的是笛卡儿张量。所谓坐标系变换，是指由一个直角坐标系变为另一个直角坐标系。任意的这种变换，可通过将原坐标系经平移、旋转及反射来达到。反射的结果，是把一个右（左）手系变为左（右）手系。

我们将仅研究坐标系绕原点旋转的变换和反射变换，对平移这类变换将不去研究。这是由于在大多数应用中，都是在一个点的无限小邻域上研究各物理量之间的关系。此外，象计算矢量的坐标等问题时，原点的位置不同没有任何影响，即此时坐标系平移不会引起分量变化。

从解析几何知道，直角坐标系的定义要点是：取空间一点 O 为坐标原点，过 O 取三个互相垂直的单位矢量 $\overline{i}$，$\overline{j}$，$\overline{k}$ 称为坐标系的基矢，则直角坐标系就完全确定。空间任一点的位矢在这个坐标系中可以写为：

$$\overline{P} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$$

式中右边的各项系数 x, y, z 就是位矢 $\overline{P}$ 在这个坐标系[O；$\overline{i}$，$\overline{j}$，$\overline{k}$]上的分量（或称坐标）。

按字母标号法，这里应用 $\overline{i}_1$，$\overline{i}_2$，$\overline{i}_3$ 分别代替 $\overline{i}$，$\overline{j}$，$\overline{k}$，而上面的分解式写为：

$$\overline{P} = a_i \overline{i_i}$$

这里，字母上加一横划也表示矢量，a_1，a_2，a_3 分别表示位矢的三个分量 x，y，z。以后，对基矢总是写成 $\overline{i_1}$，$\overline{i_2}$，$\overline{i_3}$ 这类形式。

将坐标系［O；$\overline{i_i}$］绕原点旋转（或反射，或两者兼有），得到一个新的坐标系［O，$\overline{i_i^*}$］，$\overline{i_1^*}$，$\overline{i_2^*}$，$\overline{i_3^*}$ 是新坐标系的基矢。在这个新坐标系中，位矢 $\overline{P}$ 写成

$$\overline{P} = a_i^* \overline{i_i^*}$$

这里，a_i^* 是同一位矢 $\overline{P}$ 在新坐标系［O；$\overline{i_i^*}$］上的分量（或称坐标）。

现在要回答的问题是：a_i^* 和 a_i 的关系有什么样的指定形式。在回答这个问题之前，先看一下，新坐标系的基矢 $\overline{i_i^*}$ 和旧坐标系的基矢 $\overline{i_i}$ 的关系。

从解析几何知道，空间中每一矢量都可以表示成坐标系基矢的线性组合，而且这种表示是唯一的。新坐标系的基矢 $\overline{i_i^*}$ 也是空间中的矢量，当然也可以在坐标系［O；$\overline{i_i}$］上分解，即有

$$\begin{cases} \overline{i_1^*} = A_{11}\overline{i_1} + A_{12}\overline{i_2} + A_{13}\overline{i_3} \\ \overline{i_2^*} = A_{21}\overline{i_1} + A_{22}\overline{i_2} + A_{23}\overline{i_3} \\ \overline{i_3^*} = A_{31}\overline{i_1} + A_{32}\overline{i_2} + A_{33}\overline{i_3} \end{cases}$$

也可以写成一个式子，即

$$\overline{i_i^*} = A_{ij}\overline{i_j}$$

系数 A_{ij} 是第 i 个新基矢在第 j 个旧基矢上的分量。

根据矢量点乘的定义，有：

$$\begin{cases} \overline{i_1} \cdot \overline{i_1} = \overline{i_2} \cdot \overline{i_2} = \overline{i_3} \cdot \overline{i_3} = 1 \\ \overline{i_1} \cdot \overline{i_2} = \overline{i_2} \cdot \overline{i_3} = \overline{i_3} \cdot \overline{i_1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{i_1^*} \cdot \overline{i_1^*} = \overline{i_2^*} \cdot \overline{i_2^*} = \overline{i_3^*} \cdot \overline{i_3^*} = 1 \\ \overline{i_1^*} \cdot \overline{i_2^*} = \overline{i_2^*} \cdot \overline{i_3^*} = \overline{i_3^*} \cdot \overline{i_1^*} = 0 \end{cases}$$

对点乘，交换律成立，因此上面等于0的等式每组还有三个，即 $\overline{i_1}$，$\overline{i_2}$，$\overline{i_3}$ 之间及 $\overline{i_1^*}$，$\overline{i_2^*}$，$\overline{i_3^*}$ 之间各有九个等式。如果我们对 δ_{ij} 作如下定义

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{当 } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

则同组基矢间的关系可各用一个式子表示如下：

$$\overline{i_i} \cdot \overline{i_j} = \delta_{ij}$$

$$\overline{i_i^*} \cdot \overline{i_j^*} = \delta_{ij}$$

这里，δ_{ij} 称为 Kronecker delta，它的性质和应用在张量计算中很重要，稍后一些还要详细说明。现在回到原来讨论的问题。

新坐标系的基矢在旧坐标系中的分解已经写出，但分量（即系数）A_{ij} 还不知道，对

$$\overline{i_1^*} = A_{11}\overline{i_1} + A_{12}\overline{i_2} + A_{13}\overline{i_3}$$

两边点乘$\overline{i_1}$，并利用已得到的同组基矢之间的关系式

$$\overline{i_i} \cdot \overline{i_j} = \delta_{ij}$$

得到 $$\overline{i_1} \cdot \overline{i_1^*} = A_{11}$$

同理，若是点乘$\overline{i_2}$，得

$$\overline{i_2} \cdot \overline{i_1^*} = A_{12}$$

一般地，有 $$\overline{i_i^*} \cdot \overline{i_j} = A_{ij}$$

由于$\overline{i_i^*}$，$\overline{i_j}$都是单位矢量，即其长度为 1 单位，所以 A_{ij}在数值上就是$\overline{i_i^*}$与$\overline{i_j}$夹角的余弦。需注意的是，A_{ij}中第一个下标 i 属于新坐标系，第二个下标 j 属于旧坐标系，即 $A_{新旧}$。

新坐标系是由旧坐标系旋转或反射得来。只要新坐标系基矢和旧坐标系基矢的夹角知道，则A_{ij}就立即可以计算出来。A_{ij}一共有九个元素，它们之间存在一定的关系，即独立的元素并没有九个。把这九个元素排成矩阵形式，即

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

称为基矢变换矩阵。这九个元素之间存在的关系是：同行元素的平方之和等于 1，两行相对应（同列）元素的乘积之和等于零。这个结论可按下述步骤求得

由 $$\overline{i_i^*} = A_{ij}\overline{i_j} \quad 有$$

$$\overline{i_1^*} \cdot \overline{i_2^*} = (A_{11}\overline{i_1} + A_{12}\overline{i_2} + A_{13}\overline{i_3}) \cdot (A_{21}\overline{i_1} + A_{22}\overline{i_2} + A_{23}\overline{i_3})$$

再利用 $\overline{i_i^*} \cdot \overline{i_j^*} = \delta_{ij}$，$\overline{i_i} \cdot \overline{i_j} = \delta_{ij}$ 故

$$\overline{i_1^*} \cdot \overline{i_2^*} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23} = 0$$

类似地有

$$\overline{i_2^*} \cdot \overline{i_3^*} = A_{21}A_{31} + A_{22}A_{32} + A_{23}A_{33} = 0$$

$$\overline{i_3^*} \cdot \overline{i_1^*} = A_{31}A_{11} + A_{32}A_{12} + A_{33}A_{13} = 0$$

这正是上面讲的，两行相对应元素的乘积之和为零。利用同样步骤，新坐标系基矢自乘结果为

$$\overline{i_1^*} \cdot \overline{i_1^*} = (A_{11}\overline{i_1} + A_{12}\overline{i_2} + A_{13}\overline{i_3}) \cdot (A_{11}\overline{i_1} + A_{12}\overline{i_2} + A_{13}\overline{i_3})$$
$$= A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 = 1$$

$$\overline{i_2^*} \cdot \overline{i_2^*} = A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 = 1$$

$$\overline{i_3^*} \cdot \overline{i_3^*} = A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 = 1$$

这正是上面讲的，同行元素的平方之和等于 1 。

以上讨论的A_{ij}各元素之间的关系，用一个式子就可以表示出来，即

$$A_{ij}A_{kj}=\delta_{ik} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3)$$

如果一个矩阵的各元素间满足这套关系，这个矩阵就叫做正交矩阵。如果基矢变换矩阵是正交的，那么可以肯定：它表示从一个直角坐标系到另一个直角坐标系的变换。

反过来，旧坐标系的基矢用新坐标系的基矢的线性组合来表示，则有

$$\overline{i_1}=A_{11}^{*}\overline{i_1^{*}}+A_{12}^{*}\overline{i_2^{*}}+A_{13}^{*}\overline{i_3^{*}}$$

$$\overline{i_2}=A_{21}^{*}\overline{i_1^{*}}+A_{22}^{*}\overline{i_2^{*}}+A_{32}^{*}\overline{i_3^{*}}$$

$$\overline{i_3}=A_{31}^{*}\overline{i_1^{*}}+A_{32}^{*}\overline{i_2^{*}}+A_{33}^{*}\overline{i_3^{*}}$$

类似前面的做法，系数A_{ij}^{*}可由下求得：

$$A_{ij}^{*}=\overline{i_i}\cdot\overline{i_j^{*}} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

与 $\qquad A_{ij}=\overline{i_i^{*}}\cdot\overline{i_j}$

比较，有 $\qquad A_{ij}^{*}=A_{ji}$

可见，矩阵(A_{ij}^{*})与矩阵(A_{ij})不但互为转置，而且这两个矩阵决定互逆的变换。所以，这两个矩阵又是互逆的，一个矩阵的逆矩阵即其转置矩阵，这正是正交矩阵的性质。

(A_{ij})的转置(A_{ji})也是一个直角坐标系变换到另一个直角坐标系的基矢变换矩阵。所以，$A_{ji}A_{jk}=\delta_{ik}$也成立。

既然$A_{ij}^{*}=A_{ji}$，那么两套坐标系基矢之间的关系就用不着两套系数，都用A_{ij}就可以了，即有

$$\overline{i_1}=A_{11}\overline{i_1^{*}}+A_{21}\overline{i_2^{*}}+A_{31}\overline{i_3^{*}}$$

$$\overline{i_2}=A_{12}\overline{i_1^{*}}+A_{22}\overline{i_2^{*}}+A_{32}\overline{i_3^{*}}$$

$$\overline{i_3}=A_{13}\overline{i_1^{*}}+A_{23}\overline{i_2^{*}}+A_{33}\overline{i_3^{*}}$$

写成一个式子，即 $\qquad \overline{i_i}=A_{ji}\overline{i_j^{*}}$

有了基矢变换的这些知识，空间任意一个矢量的分量变换规则就不难从如下的讨论中得出。

用$\overline{P}$表示空间任一矢量，它在新旧坐标系中分别表示为

$$\overline{P}=a_i^{*}\overline{i_i^{*}}$$

$$\overline{P}=a_j\overline{i_j}$$

类似于新坐标系基矢在旧坐标系上的分量的求法，两个等式两边都点乘$\overline{i_i^{*}}$得到

$$\overline{P}\cdot\overline{i_i^{*}}=a_i^{*}$$

$$\overline{P}\cdot\overline{i_i^{*}}=(a_j\overline{i_j})\cdot\overline{i_i^{*}}$$

对比这两个等式，有

$$a_i^{*}=a_j\overline{i_j}\cdot\overline{i_i^{*}}$$

把前面已得到的$\overline{i_i^{*}}\cdot\overline{i_j}=A_{ij}$代入，得

$$a_i^{*}=A_{ij}a_j$$

这就是空间任一矢量在新旧坐标系中分量之间的关系。和前面已得到的基矢变换关系$\overline{i_i^{*}}=A_{ij}\overline{i_j}$比较，关系是相同的。这样一来，给出新旧坐标系的相对位置，A_{ij}就知道

了，而任一矢量在两个坐标系中的分量关系就很容易找出来。

这里$a_i^* = A_{ij}a_j$就是想得到的矢量分量在坐标变换下的变换规则。因此，可以把矢量重新定义如下：矢量是包含三个分量的一个总体，其分量在坐标变换时服从上述变换规则。所以，不是任意三个数组合起来的有序数组都表示一个矢量。

张量概念的本质是：其分量在坐标系变换时有一定的变换规则。从这个意义上来看，矢量也是张量，称为一阶张量。

第四节　二阶张量及高阶张量的分量变换规则

判断一组量所表示的总体是否是一个r阶张量，有两个条件：第一，在三维空间中，这组量的个数是否是3^r个；第二，这组量在坐标系变换时的变化是否满足指定的规则。两个条件都满足了，这组量所代表的总体就是一个r阶张量。

二阶张量的概念可以从两个矢量相乘来引入。从矢量代数已经知道，两个矢量的乘法有两种，一种是点乘，一种是叉乘。点乘用“·”表示，叉乘用“×”表示。对点乘，交换律和分配律都成立；对叉乘，交换律不成立，分配律成立。

现在定义两个矢量的第三种乘法，即并矢乘。在符号上，这种乘法把两个矢量并列，中间不加运算符号。对并矢乘，分配律成立，交换律不成立。

一个矢量在坐标系中分解为三项，即

$$\overline{u} = u_1\overline{i_1} + u_2\overline{i_2} + u_3\overline{i_3}$$

$$\overline{v} = v_1\overline{i_1} + v_2\overline{i_2} + v_3\overline{i_3}$$

$\overline{u}$与$\overline{v}$并矢乘为

$$\begin{aligned}\overline{u\ v} &= (u_1\overline{i_1} + u_2\overline{i_2} + u_3\overline{i_3})(v_1\overline{i_1} + v_2\overline{i_2} + v_3\overline{i_3})\\ &= u_1v_1\overline{i_1\ i_1} + u_1v_2\overline{i_1\ i_2} + u_1v_3\overline{i_1\ i_3} + u_2v_1\overline{i_2\ i_1} + u_2v_2\overline{i_2 i_2}\\ &\quad + u_2v_3\overline{i_2\ i_3} + u_3v_1\overline{i_3\ i_1} + u_3v_2\overline{i_3 i_2} + u_3v_3\overline{i_3 i_3}\end{aligned}$$

右边出现九项。如果现在讲的不是并矢乘，而是$\overline{u}$与$\overline{v}$的点乘，那么，每项中两个基矢之间就要加一个点乘符号“·”，这时九项中有六项两个基矢点乘为0，其余三项基矢点乘为1。结果，右边是一个三项相加的标量。如果讲的是$\overline{u}$和$\overline{v}$的叉乘，那么上式每项中两个基矢之间就要加一个叉乘符号“×”。此时，利用三个基矢是单位基矢量及两两正交的条件，九项中有三项为0。对于并矢乘，我们还没有定义两个基矢并矢乘怎样计算，但是右边出现九个分量u_iv_j。这九个数的总体也表征一类物理量（或几何量），是有应用背景的。我们称这九个数的总体为二阶张量T_{ij}，即有

$$T_{ij} = u_i v_j$$

上节已经得到矢量分量的变换规则，现在，又从两个矢量的并矢乘引出二阶张量，则二阶张量的分量变换规则就容易从矢量分量的变换规则推出。不仅如此，高阶张量也可以仿此定义出来。例如，三阶张量$B_{ijk} = u_iv_jw_k$。这里，u_i，v_j，w_k是三个矢量。

下面分析二阶张量的分量变换规则。

因为坐标系变换后，矢量$\overline{u}$的分量由u_i变为u_i^*、矢量$\overline{v}$的分量由v_j变为v_j^*，按二阶张量的定义，在新坐标系中应有

$$T^*_{ij} = u^*_i v^*_j$$

今 $u^*_i = A^*_{ii'} u_{i'}$， $v^*_j = A^*_{jj'} v_{j'}$ 代入得：

$$T^*_{ij} = A^*_{ii'} A^*_{jj'} u_{i'} v_{j'} = A^*_{ii'} A^*_{jj'} T_{i'j'}$$

这就是二阶张量的分量变换规则。＊号写起来很麻烦，不妨写成

$$T^*_{ij} = A_{il} A_{jm} T_{lm}$$

利用同样途径，三阶张量的分量变换规则为

$$B^*_{ijk} = u^*_i v^*_j w^*_k = A^*_{ii'} A^*_{jj'} A^*_{kk'} u_{i'} v_{j'} w_{k'}$$
$$= A^*_{ii'} A^*_{jj'} A^*_{kk'} B_{i'j'k'}$$

也不妨写成

$$B_{ijk} = A_{il} A_{jm} A_{kn} B_{lmn}$$

类似地，可以写出任意阶张量的分量变换规则。

这样，如果给出3^r个数的有序数组，就可以判断它们的总体是否为 r 阶张量。

第五节　二 阶 张 量 δ_{ij}

在第三节中我们已定义了一个符号 δ_{ij}：

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1, & i = j \\ \delta_{ij} = 0, & i \neq j \end{cases}$$

这个定义并不涉及坐标系，实际就是说，这个定义在任何一个直角坐标系中都适用。

δ_{ij} 有九个数，这一点满足它是二阶张量的第一个条件。但究竟它是不是二阶张量，还要看当坐标系变换时，下列关系是否成立：

$$\delta_{ij} = A_{im} A_{jn} \delta_{mn}$$

在第三节中得到过A_{ij}九个元素之间的关系式：$A_{ji} A_{jk} = \delta_{ik}$。现在把标号所用字母改一下，即有

$$A_{lm} A_{ln} = \delta_{mn}$$

故 $$A_{im} A_{jn} \delta_{mn} = A_{im} A_{jn} A_{lm} A_{ln} = \delta_{il} \delta_{jl}$$

$\delta_{il}\delta_{jl}$有两个自由标号，一个哑标。有两个自由标号表示有九个分量，有一个哑标表示每个分量是三项和。九个分量有两种类型，一种是 i，j 取相同的值，这有三个；一种是 i，j 取不同的值，这有六个。

当 i，j 取值相同，例如 $i=1$，$j=1$，则

$$\delta_{il}\delta_{jl} = \delta_{11}\delta_{11} + \delta_{12}\delta_{12} + \delta_{13}\delta_{13} = 1 + 0 + 0 = 1$$

这个例子的结果可以推广到 $i=j$ 的所有其他情形，即

$$i = j \qquad \delta_{il}\delta_{jl} = 1$$

当 i，j 取值不同，例如 $i=1$，$j=2$，则

$$\delta_{il}\delta_{jl} = \delta_{11}\delta_{21} + \delta_{12}\delta_{22} + \delta_{13}\delta_{23} = 0 + 0 + 0 = 0$$

这个例子的结果可以推广到 $i \neq j$ 的所有其他情形，即

$$i \neq j \qquad \delta_{il}\delta_{jl} = 0$$

这些结果合起来，说明

$$\delta_{il}\delta_{jl} = \delta_{ij}$$

这就是说，$\delta_{ij}\delta_{jl}$的结果是把哑标去掉，得δ_{il}。回到原来问题

$$A_{im}A_{jn}\delta_{mn}=\delta_{il}\delta_{jl}=\delta_{ij}$$

这样，就证明了δ_{ij}确是一个二阶张量。同样可证

$$\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km}=\delta_{ik}\delta_{km}=\delta_{im}$$

和上述不同，$\delta_{ij}\delta_{ij}$的标号全是哑标。因为有两个哑标，因此，应是九项和，即

$$\begin{aligned}\delta_{ij}\delta_{ij}&=\delta_{i1}\delta_{i1}+\delta_{i2}\delta_{i2}+\delta_{i3}\delta_{i3}\\&=\delta_{11}\delta_{11}+\delta_{21}\delta_{21}+\delta_{31}\delta_{31}\\&\quad+\delta_{12}\delta_{12}+\delta_{22}\delta_{22}+\delta_{32}\delta_{32}\\&\quad+\delta_{13}\delta_{13}+\delta_{23}\delta_{23}+\delta_{33}\delta_{33}\\&=1+0+0+0+1+0+0+0+1\\&=1+1+1=3\end{aligned}$$

也可以这样写

$$\delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{ii}=\delta_{jj}=\delta_{kk}$$

总之，只是去掉一个哑标。

δ_{ij}在运算中的重要作用在于：它能起变换字母标号的作用。例如

$$a_{ij}\delta_{jk}=a_{ik}$$

$$a_i\delta_{ij}=a_j$$

证明很简单，把左边展开写出，利用δ_{jk}的定义就可以证明。以第一式的证明为例，左边有两个自由标号，故有九个分量，还有一个哑标，所以每个分量都是三项和；右边没有哑标，应只是一项。左边每个分量是三项和，右边则是一项，这似乎出现了矛盾，但由于δ_{ij}的定义，左边每个分量的三项和中有两项总是零，例如$i=1$，$k=1$则：

$$a_{1j}\delta_{j1}=a_{11}\delta_{11}+a_{12}\delta_{21}+a_{13}\delta_{31}=a_{11}$$

正好和右边相等。

这种代换作用就使合并运算能够进行。例如$a_{ij}\xi_j-\lambda\xi_i$是一个两项式，利用$\xi_i=\xi_j\delta_{ij}$则得

$$a_{ij}\xi_j-\lambda\xi_i=(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})\xi_j$$

这种代换作用也可在求导中利用。如：

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial a_{jk}}=\frac{\partial(a_{lk}\delta_{lk})}{\partial a_{jk}}=\delta_{jk}\frac{\partial a_{jk}}{\partial a_{jk}}=\delta_{jk}$$

又
$$x_{i,j}=\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\frac{\partial(\delta_{ij}x_j)}{\partial x_j}=\delta_{ij}$$

正因为δ_{ij}有这样重要的作用，所以也称它为代替算子。

由于有了δ_{ij}，其中有六个分量为0，有三个分量为1，有些原来似乎难用一个式子而需用多个式子表示的关系，现在可用一个式子来表示。例如，均质各向同性线性弹性体的物理方程的一种形式为：

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z \\ \tau_{xy} = 2G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yx} = 2G\gamma_{yx} \\ \tau_{yz} = 2G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zy} = 2G\gamma_{zy} \\ \tau_{zx} = 2G\gamma_{zx}, \quad \tau_{xz} = 2G\gamma_{xz} \end{cases}$$

前三式右侧为两项，后六式右侧为一项，似乎很难用一个式子写出，但现在有了δ_{ij}，九个式子可写成一个式子：

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\theta + 2G\varepsilon_{ij}$$

$i \neq j$时σ_{ij}表示剪应力分量，此时$\delta_{ij}=0$，上式第一项消失。而i、j取同一数字时，σ_i表示正应力分量，此时$\delta_{ij}=1$，故右侧第一项存在。这正好与原来九个方程一致。

第六节　置换张量ε_{ijk}

置换符号e_{ijk}有三个标号，把相邻标号的位置对调，就称为移置。对e_{ijk}，定义如下：

$$\begin{cases} e_{ijk} = 1 & \text{偶置换} \\ e_{ijk} = -1 & \text{奇置换} \\ e_{ijk} = 0 & \text{三个标号中，有两个或两个以上取同一数字时。} \end{cases}$$

此处和前面一样，i，j，$k=1$，2，3。偶置换就是指相邻标号移置偶次，奇置换则是移置奇次，一律从e_{123}算起，$e_{123}=1$。

例如，e_{213}就是奇置换，它是由e_{123}把数字标号“1”和“2”掉换一次而得，所以$e_{213}=-1$。若再把数字标号“1”和“3”掉换一次，即一共移置两次，得到的是e_{231}，因是偶置换，故$e_{231}=1$。又$e_{112}=0$，因为三个标号中有两个都取数字“1”。e_{ijk}一共有二十七个元素。

图1-1

判断是偶置换还是奇置换利用图1-1很方便。标号数字的排列，顺时针方向即属偶置换；逆时针方向就属奇置换。

下面先看看这样定义的置换符号e_{ijk}在行列式计算中的应用。

从矢量代数得知，两个矢量叉乘可以用来表示一个平行四边形的面积。这个平行四边形的邻边就分别是这两个矢量。根据叉乘定义有：

$$\begin{aligned} \overline{c} &= \overline{a} \times \overline{b} \\ &= (a_1\overline{i_1} + a_2\overline{i_2} + a_3\overline{i_3}) \times (b_1\overline{i_1} + b_2\overline{i_2} + b_3\overline{i_3}) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)\,\overline{i_3} + (a_2b_3 - a_3b_2)\,\overline{i_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\overline{i_2} \\ &= c_1\overline{i_1} + c_2\overline{i_2} + c_3\overline{i_3} \end{aligned}$$

其中　$c_1 = a_2b_3 - a_3b_2$，$c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$，$c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$

叉乘的结果可以用e_{ijk}表示，即

$$c_i = e_{ijk}a_jb_k$$

这一眼看不出来，需要分析一下。这个式子只有一个自由标号，因此代表三个式子。右面项有两个哑标，代表九项求和，但利用 e_{ijk} 的定义，只有两项不为0，以 $i=1$ 为例，当 $i=1$ 或 $k=1$ 或 $j=k$ 时，$e_{ijk}=0$。所以，九项中分别含 e_{111}、e_{112}、e_{113}、e_{121}、e_{122}、e_{131}、e_{133} 的七项都为0，只剩下含 e_{123} 及 e_{132} 的项。而按定义，$e_{123}=1$、$e_{132}=-1$。故有 $c_1=a_2b_3-a_3b_2$，这正与叉乘结果相符。另两个 c_2、c_3 的表达式也是如此.

叉乘的结果也可以用行列式表示，这由行列式展开即可看出：

$$\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \overline{i_1} \\ a_2 & b_2 & \overline{i_2} \\ a_3 & b_3 & \overline{i_3} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \overline{i_1} & \overline{i_2} & \overline{i_3} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \overline{i_1} & \overline{i_2} & \overline{i_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

后面三种写法都一样，这利用行列式基本性质即知。

既然如此，行列式值也就可用 e_{ijk} 表示，例如：

$$|L|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}=e_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$$

右边没有自由标号，有三个哑标，表示二十七项求和，结果是一个标量。根据 e_{ijk} 的定义，二十七项中只有六项不为0。这六项就是分别含 e_{123}、e_{321}、e_{231}、e_{321}、e_{132}、e_{213}、的六项。

行列式转置，其值不变，因此可写成

$$|L|=e_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}$$

行列式的基本性质，利用这种表示很容易得到证明。

e_{ijk} 有二十七个元素，现在把它附在直角坐标系上，并把字母改一下，即

$$e_{ijk}=\varepsilon_{ijk}$$

考察 ε_{ijk} 是不是三阶张量，这就要看它的分量在坐标系变换时是否满足三阶张量的分量变换规则。这里要注意到，在定义 e_{ijk} 时，并未与坐标系发生关系。现在把它附在坐标系上，定义没有变，也就是，对任意直角坐标系，原来的定义都是有效的。这就和上节对待 δ_{ij} 一样，区别只是把 δ_{ij} 附在坐标系上时，字母没有改写。

这里所讲的坐标系变换包括绕原点旋转和反射。所谓反射就是两个坐标轴不变，另一个轴转180°。例如，新坐标系基矢与旧坐标系基矢成下述关系：

$$\overline{i_1^*}=-\overline{i_1},\qquad \overline{i_2^*}=\overline{i_2},\qquad \overline{i_3^*}=\overline{i_3}$$

反射结果，右（左）手系变成左（右）手系。要证明 ε_{ijk} 是三阶张量，就是要证明：

$$\varepsilon^*_{ijk}=A_{i^*i}A_{j^*j}A_{k^*k}\varepsilon_{ijk}$$

成立，或写成

$$\varepsilon^*_{ijk}=A_{ip}A_{jq}A_{kr}\varepsilon_{pqr}$$

左边的上标"*"也可去掉。

以 $i^*=1$，$j^*=2$，$k^*=3$ 为例，若坐标系变换就是上述反射，则注意到 ε_{ijk} 只有 (i,j,k) 取 (1, 2, 3)，(2, 3, 1)，(3, 1, 2) 时为1；取 (1, 3, 2)，(3, 2, 1)，(2, 1, 3) 时为 -1；取其他组合时均为零。

故 $$\varepsilon^*_{123} = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33}$$

再注意到，$A_{ij} = \overline{i_i^*} \cdot \overline{i_j}$，按上述反射变换，当 $i \neq j$ 时 $A_{ij} = 0$。因此，不为零的只有 A_{11} $(=-1)$，A_{22}，$A_{33}(=1)$。这样一来，当以 $i^*=1$，$j^*=2$，$k^*=3$ 为例时，右边只有 $i=1$、$j=2$、$k=3$ 项非 0，故

$$\varepsilon^*_{123} = (-1)(1)(1)\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{123} \neq \varepsilon_{123}$$

可见，在反射变换下，ε_{ijk} 并不满足三阶张量的分量变换规则，但相差只是一个正负号。

但是，若坐标系变换仅限于绕原点旋转时，ε_{ijk} 却是满足三阶张量分量变换规则的。为了作出证明，先介绍一些准备知识。

坐标系变换是旋转或反射，这可由基矢变换矩阵相应的行列式值来判断。用 $|L|$ 表示这个行列式，则 $|L| = +1$ 是旋转变换；$|L| = -1$ 是反射变换。与反射变换不同，旋转变换后，右（左）手系仍然保持为右（左）手系。这个行列式值可作为判断标准的证明如下，因

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ 是正交矩阵}$$

故 $$(A_{ij})^{-1} = (A_{ij})^T$$

而 $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

即 $$|L|^2 = 1 \qquad \text{而 } |L| = \pm 1$$

$|L| = +1$ 叫正则变换，$|L| = -1$ 叫非正则变换。旋转变换是正则变换，反射变换是非正则变换。

$|L|$ 是 A_{ij} 的连续函数。现在，$|L|$ 只有两个值，不是 $+1$ 就是 -1。先取两个极端情形来考虑。

若新旧两个坐标系重合，则此时基矢变换矩阵具有如下形式：

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

此时 $$|L| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$