高等学校教学用书

代数与初等函数習題集

A. K. 达維鐸夫著

高等教育出版社

28

高等学校教学用書

代数与初等函数習題集

A. K. 达維鐸夫著
惠仰淑　洪　波譯

高等教育出版社

本書系根据苏俄教育部教科書出版社 (Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР) 1955 年出版的达維鐸夫 (А. К. Давыдов) 著“代数与初等函数習題集”(Сборник задач по алгебре и элементарным функциям) 譯出的。原書經苏俄教育部批准为师范学院及师范專科学校数学参考書。

本書可供我国高等师范学校数学系师生以及中学数学教师参考用。

代数与初等函数習題集

A. K. 达維鐸夫著

惠印淑 洪 波譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

商務印書館上海廠印刷 新华書店总經售

統一書号 13010·311 开本 850×1168 1/32 印張 8 8/16 字数 200,000 印数 1—9,000

1957年8月第1版 1957年8月上海第1次印刷 定价(8) ¥1.00

序　言

本習題集的作者希望他这本作品不仅对师范專科学校的学生有用处，而且对师范学院的学生和中等学校的教师也有所裨益。

最后，作者認为必須向 C. И. 諾窪塞洛夫，雪必略夫教授，里亞平和 E. Г. 叔利琴斐尔講师表示深刻的謝意，承他們費心来审閱本習題集的稿子，并給以許多宝貴的意見和指示，同时也向奧亨斯克师范專科学校校長 Ф. С. 潑拉克苏先生致謝。

作者

于莫洛托夫省奧亨斯克城

目　錄

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第三部分　复数体 K

第四部分　不等式

第五部分　初等函数

第一部分　有理数体 P

第一章　数环和数体．有理数体

§1．有理数的絕对值

口答下列各問題：

1．a 或 $3a$ 哪一个大一些？

2．在怎样的条件下可以断定 $a-b$ 小于 $a+b$？

3．在怎样的条件下可以断定 $ab>\frac{a}{b}$？

4．a 是什么数值时，$2a-3$ 是正的？

5．是否可以断定 $x+1$ 大于 1？

6．在什么条件下，a^2-b^2 是正的？

7．式子 $(x^2+1)^4-1$ 可以有非正値嗎？

8．不用絕对值的符号，写出式子：（а）$|x-2|$；（б）$|3-2x|$。

9．x 是什么数值时，下列等式是正确的：

（а）$|(x-2)+(x-9)|=|x-2|+|x-9|$；

（б）$|(x-4)-(x-6)|=|x-4|-|x-6|$；

（в）$|(x-5)-(x-7)|=(x-5)-(x-7)$；

（г）$|(x-2)(x-3)|=(x-2)(x-3)$；

（д）$|(x-7)(x-3)|=|x-7|\cdot|x-3|$；

（е）$|(x-1)(x-4)|=-(x-1)(x-4)$；

（ж）$\left|\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x-0.7}\right|=\dfrac{\left|x-\frac{1}{2}\right|}{|x-0.7|}$；

(з) $\left|\frac{2-x}{x-3}\right|=\frac{2-x}{x-3}$; (и) $\left|\frac{x-3}{2-x}\right|=\frac{x-3}{2-x}$?

§2. 数环和数体

指出下面所列举的集合中可以实施的算术运算,并且判定这些集合中,哪一些構成数环,哪一些構成数体:

10. 由一个元素 0 所組成的集合。

11. 由一个元素 1 所組成的集合。

12. 自然数列的集合 N。

13. 由 0 和自然数列所組成的集合。

14. 整数集合。

15. 正有理数集合。

16. 有理数集合。

17. 由数 k 的倍数所組成的整数的集合,此处 k 是一自然数。

18. 奇数集合。

19. 偶数集合。

20. 数: 0; ± 2; ± 4; ± 6; $\cdots$; $\pm 2n$; $\cdots$所組成的偶数集合,是否为数环?

21. 数: 0; ± 3; ± 6; $\cdots$; $\pm 3n$; $\cdots$, 是否为数环?

22. 已知以下形式的二进有理分数的集合:

$$m+\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k}{2^k},\quad p_k=0;\,1,$$

其中 m 是任意(正的或負的)整数,$n\in N$。这个集合是否为数环?

23. 已知数集: 0; 1^2; 2^2; 3^2; $\cdots$; n^2; $\cdots$。这个数集是否为数环?

24. 数集: 1; ± 3; $\pm 3^2$; $\pm 3^3$; $\pm\cdots$; $\pm 3^n$; $\cdots$, 是否为数环?

第二章　有理数体上的多項式

§3. 函数．有理式

25. 变数 x 和函数 $f(x)$ 所对应的規則由下列式子給定：

(а) $f(x)=|2x-3|+|5x-2|$；

(б) $f(x)=|4x+5|-|2x-7|$；

(в) $f(x)=|4x-7|-|2x+5|$。

試不用絕对值的符号，写出这些对应規則的表示式，并且算出 $f(1)$。

对于下列各函数，变数在有理数体中所允許取得的数值是什么：

26. $f(x)=\frac{2}{x}$。　**27.** $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$。

28. $f(x)=\frac{x+4}{x^2-5x+6}$。

29. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$。　**30.** $f(x)=\frac{x-b}{x^2-2ax+a^2}$。

§4. 关于兩个多項式恒等的定理．待定系数法

确定下列多項式 $\varphi(x)$ 中参变数 $A, B, C, \cdots$ 的数值，要使得多項式 $\varphi(x)$ 恒等于多項式 $f(x)$，假使：

31. $f(x)=1$,

$$\varphi(x)=A(x^2+1)+Bx^2+Cx(x^2+1)。$$

32. $f(x)=x+1$,

$$\varphi(x)=A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2。$$

33. $f(x)=2x-3$,

$$\varphi(x)=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)。$$

34. $f(x)=x-5$,

$$\varphi(x)=A(x-2)^2+B(x+1)+C(x^2-x+2)。$$

35. $f(x)=3x^2-5x+3$,

$$\varphi(x)=Ax(x-1)+B(x+2)(x-1)+Cx(x+2)。$$

36. $f(x)=2x$,

$$\varphi(x)=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3)。$$

37. $f(x)=2x^2+5$,

$$\varphi(x)=A(x^2-x-12)+B(x^2-6x+8)+C(x^2+x-6)。$$

38. $f(x)=2x^3+3x^2-x+1$,

$$\varphi(x)=(Ax+B)(x^2-4x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)。$$

39. $f(x)=3x^4+x^3+4x^2+1$,

$$\varphi(x)=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)x(x^2+1)。$$

40*. 当多項式:

$$f(x)=x^4+Ax^3+Bx^2-8x+4$$

为多項式 $\varphi(x)=x^2+Cx+D$ 的完全平方时, 求系数 A, B, C 和 D。

41. 当多項式:

$$f(x)=9x^4+12x^3-26x^2-20x+25$$

为多項式 $\varphi(x)=Ax^2+Bx+C$ 的完全平方时,求系数 A, B, C。

42*. 求在什么条件下,多項式:

$$f(x)=4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2$$

为三項式 $\varphi(x)=2x^2+ax+b$ 的完全平方。

43. 要使得多項式:

$$f(x)=x^4+6x^3+7x^2-6x+a$$

为多項式 $\varphi(x)=Ax^2+Bx+C$ 的完全平方,問 $f(x)$ 的常数項应該是什么。求出 $\varphi(x)$ 来。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

44. 要使得多項式:

$$f(x)=8x^6-36ax^5+66a^2x^4-63a^3x^3+33a^4x^2-9a^5x+a^6$$

为多項式 $\varphi(x)=Ax^2+Bx+C$ 的立方，多項式 $\varphi(x)$ 的系数应該是什么?

依照 $(x-c)$ 的冪来展开多項式 $f(x)$:

45. $f(x)=3x-5$,　　$c=2$。

46. $f(x)=2x^2-6x+7$,　　$c=1$。

47. $f(x)=x^3+6x^2+4x-7$,　　$c=-1$。

48. $f(x)=x^3+5x^2-7x-3$,　　$c=4$。

49. $f(x)=3x^4-5x^3+x-4$,　　$c=-2$。

§5. 多項式环

50. 下列形式的多項式集合是否为一环:

(a) $f_{2n}(x)=a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2(n-1)}+\cdots+a_1x^2+a_0$, 其中 a_i 是任意数。而 n 是非負的整数?

(б) $f_{2n-1}(x)=a_nx^{2n-1}+a_{n-1}x^{2n-3}+\cdots+a_1x+a_0$, 其中 a_i 是任意整数，而 n 是非負的整数?

(в) $f_{3n}(x)=a_nx^{3n}+a_{n-1}x^{3(n-1)}+\cdots+a_1x^3+a_0$, 其中 a_i 是任意整数，而 n 是非負的整数?

51. 偶系数的多項式集合是否为一环?

52. 証明有理系数的多項式集合構成一环。

53. 証明正系数的多項式集合不能構成一环。

54*. 証明，假使对于适合条件 $a_{m-k}=a_k$ 的整系数多項式。施行乘法运算，那么所得多項式的系数也适合这个条件。

§6. 多項式的整除性。有余式的除法

55. 不进行乘法，判断下列多項式的除法是否能整除:

(a) $f(x)=(x^2-4)(x+3)$ 除以二項式 $x+2$;

(б) $f(x)=(x^2-12x+32)(x^2+x+1)$ 除以二項式 $x-8$;

(в) $f(x)=(2x^2-5x+3)(4x^2+5x+1)$ 除以二項式 $4x+1$。

56*. 假使多項式 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的每一个都不能被多項式 $\psi(x)$ 整除,那么是否可以断定,它們的乘积也不能被 $\psi(x)$ 整除?

57. 作兩个多項式 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$,使它們的乘积能被 x^2-4 整除,但它們的每一个却不能被 x^2-4 整除。

58. 作兩个多項式 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$,使它們的乘积能被 x^3-8 整除,但它們的每一个却不能被 x^3-8 整除。

59. 不施行式中所指出的运算,判断下面的多項式的除法是否能整除:

(a) 多項式 $f(x)=5(x^2-6x+5)-x(x^2-3x+2)$ 除以二項式 $x-1$;

(б*) 多項式 $f(x)=5(x^2-7x+12)+11(x^2-8x+15)$ 除以二項式 $x-3$;

(в) 多項式 $f(x)=7(x^4-10x^2+16)-9(x^4-11x^2+24)$ 除以多項式 x^2-8。

60*. 作这样的兩个多項式,使得它們的和能被 $x+3$ 整除,但它們的每一个却不能被 $x+3$ 整除。

61. 假使多項式 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都不能被多項式 $\psi(x)$ 整除,那么是否能断定,它們的和 $F(x)=f(x)+\varphi(x)$ 也不能被 $\psi(x)$ 整除?

完成下面所指出的运算:

62. $(a^nx^{m+n}-4a^{2n}x^{m+n-1}-27a^{3n}x^{m+n-2}+$
$+42a^{4n}x^{m+n-3})\div(a^nx^m-7a^{2n}x^{m-1})$。

63. $[(a^3-1)x^3-(a^3+a^2-2)x^2+$
$+(4a^2+3a+2)x-3a-3]\div[(a-1)x^2-(a-1)x+3]$。

64. 除式是 $\varphi(x)=2x^2+x-3$，商式是 $q(x)=x^2+3$，余式是 $r(x)=3x-5$。求出被除式 $f(x)$。

65. 被除式是 $f(x)=x^4+ax^3-5a^2x^2+12a^3x$，商式是 $q(x)=-x^2+3ax-a^2$，余式是 $r(x)=2a^2x^2+10a^3x$。求除式 $\varphi(x)$。把多項式 $f(x)$ 表示成 $f(x)=\varphi(x)\cdot q(x)+r(x)$ 的形式。

66. 証明，有理系数的多項式能被 $x-1$ 整除的必要和充分条件是：它的系数之和等于零。

67. 証明，有理系数的多項式能被 $x+1$ 整除的必要和充分条件是：它的偶次項系数之和等于奇次項系数之和。

68. 証明，一个正系数的多項式不能够有正根。

69*. 証明，若一个奇次多項式的系数满足条件 $a_{n-k}=a_k$，那么当 $x=-1$ 时，它的值等于 0。

70. 証明，若一个奇次多項式的系数满足条件 $a_{n-k}=-a_k$，那么当 $x=1$ 时，它的值等于 0。

利用裴蜀定理的結果，进行二項式 $x^n\pm a^n$ 除以 $x\pm a$ 的除法：

71. $(243x^5-32)\div(3x-2)$。

72. $(a^4x^4-b^4)\div(ax-b)$。

73. $(81x^4-c^{12}n^8)\div(3x-c^3n^2)$。

74. $\left(x^{10}-\dfrac{1}{32}\right)\div(x^2-0.5)$。

75. $\left(3\dfrac{3}{8}a^6+8n^{12}\right)\div(1.5a^2+2n^4)$。

76. $(x^{30}-1)\div(x^5+1)$。

77. $(a^{28}x^{14n}+1)\div(a^4x^{2n}+1)$。

78. 証明，假使 n 和 p 是整数，那么：

(a) 当 n 能被 p 整除时，x^n-a^n 能被 x^p-a^p 整除；

(б) 当 $n=(2k+1)p$（k 是整数）时，x^n+a^n 能被 x^p+a^p 整除；

(B) 当 $n=2kp$(k 是整数)时，x^n-a^n 能被 x^p+a^p 整除。

79*. 要使形式如 10^n+1 的数目能被 11 整除，問整数 n 应該是什么样的数?

80*. 要使形式如 7^n-1 的数目能被 8 整除，又能被 6 整除，問整数 n 应該是什么样的数?

81*. 証明，多項式 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$，其中 n 是奇数，能被乘积 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 整除。

82. 証明，多項式 $x^my^n+y^mz^n+x^nz^m-x^ny^m-y^nz^m-x^mz^n$ 能被 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 整除。

83. 証明，多項式 $x^my^nz^p+x^py^mz^n+x^ny^pz^m-x^py^nz^m-x^my^pz^n-$ $-x^ny^mz^p$ 能被 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 整除。

84*. 証明，一个整系数的多項式，假使当它的变数数值为 $x=0$ 和 $x=1$ 时它的值是奇数，那么当它的变数为任何整数值时它的值都不会是零。

§7. 多项式的有理根(整根及分数根)的求法

利用何拉表格，求出下列多項式的整根:

85. $f(x)=x^4+4x^3-25x^2-16x+84$。

86. $f(x)=x^4+4x^3-18x^2-12x+9$。

87. $f(x)=x^5-2x^4-13x^3+26x^2+36x-72$。

88. $f(x)=x^5-2x^4+3x^3-10x^2-40x+48$。

89. $f(x)=x^6-3x^5-40x^4+x^3-3x^2-40x$。

利用何拉表格，把下列多項式依照 $x-c$ 的冪展开:

90. $f(x)=x^3-5x^2+6x-7$, $c=2$。

91. $f(x)=x^4-4x^3-10x^2-4x+3$, $c=-1$。

92. $f(x)=x^4-8x^3-17x^2-5$, $c=-2$。

93. $f(x)=-8x^5+29x^4-86x^3+85x^2-54x+11$, $c=4$。

94. $f(x)=-4x^7+12x^6-15x^5+21x^4-16x^3+$
$+7x^2-10x+8,$ $c=2$。

95. 假使 c 是一个多項式的 k 重根，那么將它依照 $x-c$ 的冪展开时，这个多項式的形式是怎样的？

求出下列多項式的有理根：

96. $f(x)=3x^3+x^2+x+35$。

97. $f(x)=6x^4-25x^3+20x^2-25x+14$。

98. $f(x)=2x^4+3x^3-46x^2+6x+8$。

99. $f(x)=8x^5-4x^4-58x^3+45x^2+108x-108$。

100. $f(x)=15x^5-14x^4-152x^3-142x^2+41x+60$。

101. $f(x)=4x^5-7x^4-5x^3+10x^2+x-3$。

102. $f(x)=6x^5-11x^4+9x^3-17x^2+14x-3$。

103. $f(x)=81x^6-99x^4+19x^2-1$。

104*. 决定 m 和 n 的值，使得多項式

$$f(x)=x^4+(m+n)x^3+(m-n)x^2+$$
$$+(m^2+2n-1)x+m+2$$

在这时能被 $x^2-2x+1=\varphi(x)$ 整除。商式是什么？

105. 証明，假使一个奇次多項式的系数满足条件 $a_{n-k}=a_k$，那么它除以 $x+1$ 所得的商多項式的系数也满足同样的条件。

§8. 插值公式

106. 求出一个不高于二次的多項式 $f(x)$，使它满足条件：$f(4)=13$，$f(5)=21$，$f(-3)=13$，再算出当 $x=1$ 时它的值。

107. 求不高于三次的多項式 $f(x)$，使它满足条件：

(a) $f(0)=1$，$f(1)=1$，$f(2)=5$，$f(3)=11$；

(б) $f(0)=3$，$f(1)=0$，$f(2)=7$，$f(-1)=4$。

108. 求满足条件：$f(3)=1$，$f(5)=2$，$f(1)=0$ 以及

$f(-1)=-1$ 的最低次多項式。

109. 求出一个二次多項式，使它满足条件：$f(0)=0$，$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}$，$f(a)=0$，再算出当 $x=0.25\,a$ 时它的值。

§9. 最高公因式. 欧几里得輾轉相除法

利用欧几里得輾轉相除法求下列各多項式的最高公因式：

110. $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-5x+2$,

$\varphi(x)=x^4-2x^3+x^2-1$。

111. $f(x)=2x^4+3x^3-10x-15$,

$\varphi(x)=2x^3+5x^2+17x+21$。

112. $f(x)=30x^4-59x^3+87x^2-37x+12$,

$\varphi(x)=12x^4-28x^3+27x^2-2x-24$。

对于兩个已知的多項式 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$，求出这样的兩个多項式 $P(x)$ 和 $Q(x)$，而使得下面的恒等式能够实現：

$$f(x)\cdot P(x)+\varphi(x)\cdot Q(x)=D(f;\varphi),$$

其中 $D(f;\varphi)$ 就是 $\varphi(x)$ 和 $f(x)$ 的最高公因式。

113. $f(x)=3x^3-22x^2+30x+27$,　　$\varphi(x)=x^2-8x+15$。

114. $f(x)=x^3+x+2$,　　$\varphi(x)=x^3-x$。

115. $f(x)=x^4-x^3-5x^2-x-6$,　　$\varphi(x)=x^4-1$。

116. 証明，假使 $x+n$ 是多項式 $f(x)=x^2+ax+b$ 和 $\varphi(x)=$ $=x^2+cx+d$ 的最高公因式，那么 $b-d=n(a-c)$。

§10. 有理数体 P 上的多項式的因式分解

在体 P 上分解下列多項式为因式的积：

117. $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$。

118. $f(x)=x^4+4x^3-18x^2+20x-7$。

119. $f(x)=x^4-2x^3-11x^2+12x+36$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com