

弹性稳定

费志中 编著

煤炭工业出版社

弹性稳定

费志中 编著

煤炭工业出版社

内 容 简 介

本书重点介绍弹性稳定理论的基本概念、基本原理和分析方法。

书中首先阐述稳定概念、经典方法，然后结合压杆讨论了静力法、能量法及近似法，最后按静力法分别对开口薄壁杆件、平面曲杆、薄板、薄壳等结构元件的弹性稳定问题进行了分析。各章都备有例题和习题。书末附有参考文献与习题解答。

本书可作为理工院校大学生、研究生的教材及工程科技人员的参考书。

责任编辑：田克运

弹 性 稳 定

费志中 编 著

煤炭工业出版社

(北京安定门外和平里北街)

煤炭工业出版社印刷厂

新华书店北京发行所



开本 $787 \times 1092\text{mm}^{1/32}$ 印张 $7^{2/5}$

字数166千字 印数1—1,150

1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷

ISBN 7-5026-0236-7/TD·225

书号 3076

定价 3.30元

前

言

源于工程实践的弹性稳定理论，随着科学技术的发展已成为固体力学的一个重要分支。学习和掌握有关弹性稳定理论的基本概念、基本原理和处理问题的主要分析方法，对土木、机械、水利、石化、船舶、航空、力学等专业的教学和科研十分必要。

为了奉献给读者一本内容简明、概念清楚、推理严谨、叙述深入浅出、理论灵活应用的参考书，作者结合自己多年从事固体力学专业的教学和科研的经验与体会，基于为研究生讲授弹性稳定理论的讲稿，参考国内外有关文献，编写了这本“弹性稳定”。

中国矿业学院研究生部袁文伯教授对书稿进行了审阅，特此致谢。

作者

于北方交通大学1987.9.

目 录

第1章 绪论	1
§1.1 引言	1
1. 稳定问题	1
2. 可变形体	1
3. 保守系统	3
4. 历史简介	3
§1.2 基本概念	4
1. 三种平衡形式	4
2. 四种失稳形式	5
3. 平衡状态稳定性的判别准则	8
4. 屈曲载荷与临界载荷	10
§1.3 经典方法	10
1. 静力法	11
2. 能量法	14
3. 动力法	15
4. 缺陷法	16
习题	18
第2章 静力法	19
§2.1 压杆弹性稳定的基本方程	19
§2.2 具有弹性支承压杆的稳定	27
§2.3 刚架的稳定	37
§2.4 细长压杆的大挠度失稳	42
习题	50
第3章 能量法	53
§3.1 能量准则	53
1. 单自由度系统	54

2. 多自由度系统	56
3. 连续体系统	59
§ 3.2 用能量法确定临界载荷	67
§ 3.3 一些有关非线性稳定理论的概念	73
1. 对称型稳定分支点问题	73
2. 对称型非稳定分支点问题	78
3. 扁拱的跳跃	84
习题	88
第 4 章 近似法	92
§ 4.1 有限差分法	92
§ 4.2 里兹法	96
§ 4.3 伽辽金法	99
§ 4.4 用摄动法求解压杆大挠度方程	104
1. 摄动法简介	104
2. 压杆大挠度方程及其摄动解	109
习题	117
第 5 章 开口薄壁杆件的稳定	120
§ 5.1 开口薄壁杆件的约束扭转	120
1. 薄壁杆件的定义、表示法与分类	120
2. 自由扭转与约束扭转	120
3. 薄壁截面的扇性几何性质	122
4. 确定主扇性极点和主扇性零点	124
5. 约束扭转的应力公式	131
6. 约束扭转的微分方程及其解	139
7. 边界条件	143
§ 5.2 开口薄壁杆件的稳定	145
1. 符拉索夫基本方程	146
2. 中心受压薄壁杆件失稳时的临界载荷	150
§ 5.3 梁的侧向屈曲	156

习题	160
第6章 平面曲杆的稳定	162
§6.1 平面曲杆的稳定微分方程	162
§6.2 均匀径向压力作用下圆拱和圆环的稳定	168
1. 圆拱	168
2. 圆环	171
§6.3 径向压力作用下扁拱的稳定	173
习题	176
第7章 薄板的稳定	177
§7.1 薄板弯曲的基本理论	177
1. 定义·假设	177
2. 应力·内力·平衡方程	178
3. 几何方程·物理方程·薄板弯曲的微分方程	180
4. 边界条件	184
5. 薄板弯曲微分方程的简单应用	187
§7.2 圆板的弯曲	190
1. 圆板弯曲的微分方程及其边界条件	190
2. 轴对称弯曲	193
§7.3 薄板的稳定	196
1. 板屈曲的微分方程	196
2. 简单应用	197
习题	204
第8章 薄壳的稳定	206
§8.1 薄壳的基本概念	206
§8.2 扁壳的基本方程	208
1. 平衡方程	209
2. 几何方程	211
3. 物理方程	215
4. 柔韧扁壳理论的基本方程	216

§ 8.3 薄壳的稳定	218
习题	222
参考文献	223
习题解答	228

第1章 绪 论

§ 1.1 引 言

1. 稳定问题

工程中经常会遇到受压杆件，如起重螺旋的螺柱，曲柄连杆机构中的连杆，机床的丝杠，活塞压缩机的活塞杆，桁架结构中的压杆，这类受压杆件常由于稳定问题而丧失承载能力，有关这方面的知识大家已经在材料力学中熟悉了。实际上在土建、水利、机械、石化、船舶、航空、生物医学等工程中也存在着稳定问题。例如，水塔、刚架、薄壁容器、壳形屋顶、船舶、潜艇、飞行器等结构，若考虑不当同样会由于失稳而丧失承载能力，历史上这类工程事故在许多国家都曾发生过。随着工程技术的发展，稳定问题越来越引起人们的重视，已成为力学中的一个重要的研究课题。稳定理论作为固体力学的一个重要分支，在广泛的应用过程中得到了不断的发展，并成为许多工程技术的理论基础。

2. 可变形体

当物体所受的外力发生变化时，物体内任何两质点间的相对距离要发生改变，这样的物体就称为可变形固体或简称为可变形体。对于可变形体，通常引入两个基本假设：

(1) 连续性假设：认为物体是密实的，在其整个体积内到处充满物质，毫无空隙。

(2) 均匀性假设：认为物体内各点处的力学性质完全

相同。

对于连续均匀可变形体而言，外力与变形是通过本构关系相联系的。如果由本构关系所描述的加载路径与卸载路径相同，则上述物体就称为连续均匀的弹性体。如果这些路径由线性关系（广义胡克定律）所描述，则这样的弹性体就叫做线弹性体。此外，若物体沿各个方向的力学性能都相同，则这样的弹性体就称为各向同性的，否则称为各向异性的。我们的研究对象主要是连续均匀各向同性的线弹性体。

大家知道，研究弹性体在外因（外力和其它外界因素）作用下产生的变形和内力的固体力学分支叫做弹性力学。由于借助弹性力学的基本方程所能解决的问题相当有限，工程中在处理结构问题时，不得不作出一些假设，以使问题得到简化。应指出，简化假设的选用在很大程度上取决于结构元件在三维空间中的相对尺寸。按照结构元件的形状，所有结构元件都可以归于以下四类：

（1）三个方向的尺寸具有相同的量级（如球体、短或中长圆柱体）。

（2）一个方向的尺寸要比具有相同量级的另外两个方向的尺寸大得多（如杆、柱、梁、轴、环）。

（3）一个方向的尺寸要比具有相同量级的另外两个方向的尺寸小得多（如薄板、薄壳）。

（4）一个方向的尺寸要比具有不同量级的另外两个方向的尺寸大得多（如开口截面薄壁梁）。

第一类结构元件不存在稳定问题，除此之外的所有其它结构元件都存在着稳定问题。与第二类、第三类及第四类结构元件有关的典型稳定问题将在以后各章中讨论。

3. 保守系统

如果质点在空间内任何位置都受到确定的力的作用，而该力的大小和方向又单一地决定于质点的位置，则这种力称为场力。如果作用于质点的场力所做的功只与质点的起始和终了位置有关，而与质点运动的路径无关，则质点所受的场力叫做势力或保守力。在保守力作用下具有定常约束的力学系统称为保守系统。所谓定常约束是指约束方程即约束条件的数学表达式都不包含时间 t 。至于那些具有保守力和非定常约束的力学系统，以及在保守力和非保守力作用下的力学系统叫做非保守系统。在保守系统中，势力可以表示成系统势能的函数。本书将主要讨论保守系统中的稳定问题。有关非保守系统的稳定问题请参阅文献〔1〕~〔4〕。

4. 历史简介

尽管可以发生失稳的结构元件在工程中已经应用数世纪了，但是从理论上对于一个结构元件——细长压杆所进行的稳定分析是在200多年前由欧拉(L. Euler)首次完成的。欧拉压杆稳定公式所涉及的概念就是稳定理论中所谓分支点的概念。在以后两个世纪中，除了铁木辛柯(S. P. Timoshenko)对弹性稳定理论所做的卓越贡献以外，在稳定理论方面有关学者做出的杰出工作还包括：恩格塞(F. Engesser)的切线模量理论；卡门(V. Kármán)的双模量理论或折算模量理论及湘雷(F. R. Shanley)的塑性屈曲理论；瓦格纳(H. Wagner)及符拉索夫(В. З. Власов)等人关于薄壁杆件弯曲扭形式的失稳理论；卡门和钱学森及其它学者关于薄壳的非线性稳定理论的研究；斯坦因(M. Stein)的非线性前屈曲一致理论；柯依脱(W. T. Koiter)所提出的初始后屈曲理论。有关稳定理论方面的主要参考文献已列在书末(参见文献

〔5〕~〔37〕)。顺便指出，由于本书仅考虑静荷作用下的稳定问题，对动荷稳定感兴趣的读者可参阅文献〔38〕~〔43〕。

限于篇幅，本书将结合结构元件着重讨论与弹性稳定理论有关的基本概念和主要分析方法。

§ 1.2 基 本 概 念

1. 三种平衡形式

现以图1.1所示小球为例，说明物体的三种平衡形式。

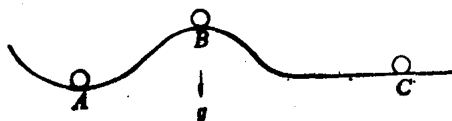


图 1.1

重 g 的小球静止在某曲面的不同点 A 、 B 、 C 上，该曲面沿图面法线方向的曲率为零。面上具有零斜率的点 A 、 B 、 C 表示静平衡位置，这些点的平衡特征在本质上是不同的：在 A 点，如果小球受到微扰动（小位移、小速度），它将围绕平衡位置 A 来回摆动，最后仍静止于 A 点，这种平衡称为稳定平衡；在 B 点，如果小球受到微扰动，它将趋向于离开平衡位置 B ，且不能再回到原来的平衡位置，这种平衡称做不稳定平衡；在 C 点，若小球受到微扰动，它将趋向于保持在受扰动的位置上，这种平衡叫做随遇平衡或中性平衡。值得注意的是，上述三种平衡形式——稳定平衡、不稳定平衡、随遇平衡都是对小范围而言的，即上述定义取决于微小扰动。如果扰动并不微小，则可能发生这样的情况：小球在小范围内是不稳定的，但在大范围内是稳定的，如图1.2a中的 B 点，或小球在小范围内是稳定的，但在大范围内是不稳定

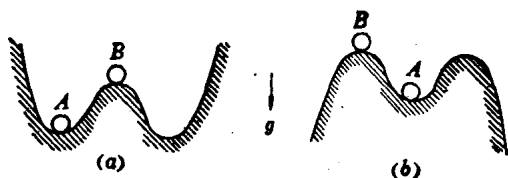


图 1.2

的，如图1.2b中的A点。

同样，弹性系统的平衡状态也有三种形式：稳定平衡、不稳定平衡和随遇平衡。若弹性系统在稍微偏离其平衡位置后，能够回到或有趋势回到它原来的平衡位置，则称原平衡状态为稳定平衡状态。若继续偏离下去，则叫做不稳定平衡状态，此时，弹性系统失去稳定性，简称失稳或屈曲。随遇平衡状态通常是从稳定平衡向不稳定平衡过渡的中间状态。

2. 四种失稳形式

弹性系统的平衡稳定性依赖于加载方式、结构的几何特征、约束条件等因素，其失稳形式可以分成以下四种。

(1) 分支点失稳

由材料力学可以知道，对于受轴向压缩的理想等直杆而言（参见图1.3a），当载荷 P_1 小于临界值 P_{cr} 时，对压杆施予微小干扰使之弯曲。一旦撤去干扰，杆件必然恢复原始直线平衡形式，即失稳前直线形式是唯一的平衡形式，此时直线平衡形式是稳定的。以杆中点挠度 f 为横坐标，轴向压力 P 为纵坐标，则纵轴（ $f=0$ ）上任一点 P_1 表示一种直线平衡状态，我们称OA线为原始平衡路径，如图1.3b所示。当载荷超过 P_{cr} 达到 P_2 时，则压杆可以呈直线状态也可呈弯曲状态，但直线状态是不稳定的，换言之，若压杆受到微小干

扰，则其不能恢复直线状态而将继续弯曲到如图示 B 点，此时挠度值为 f_2 ，曲线 AB 称为第二平衡路径。原始平衡路径与第二平衡路径的交点 A 称为分支点，与该点对应的载荷叫做临界载荷 P_{cr} ，与该点对应的状态称做临界状态。对应于临界状态之前的平衡状态称为前屈曲平衡状态，而超过临界状态之后的平衡状态叫做后屈曲平衡状态。在本例中，由于第二平衡路径在分支点 A 处具有水平切线，因此在一阶无穷小的邻域内，压杆的挠度不能确定，也就是说同一载荷可以对应于任意的微小弯曲平衡形式，这就是随遇平衡的情况。

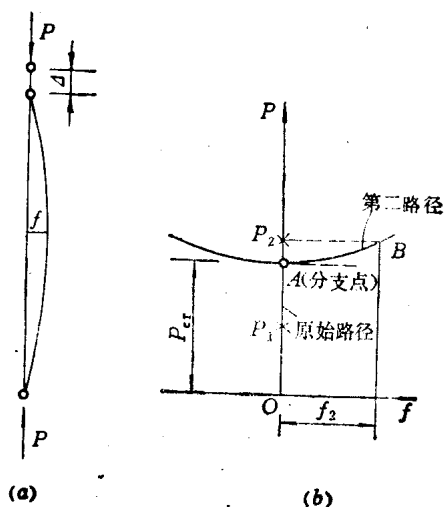


图 1.3

如果变换坐标参数，以压杆缩短量 Δ 为横坐标，其相应的图形如图 1.4 中曲线 OAC 所示。图 1.4 中曲线 $OA'C'$ 表示了在

面内压力 N_x 作用下矩形薄板发生分支点失稳的相应图形, 此时 Δ 代表沿载荷方向板的缩短量。

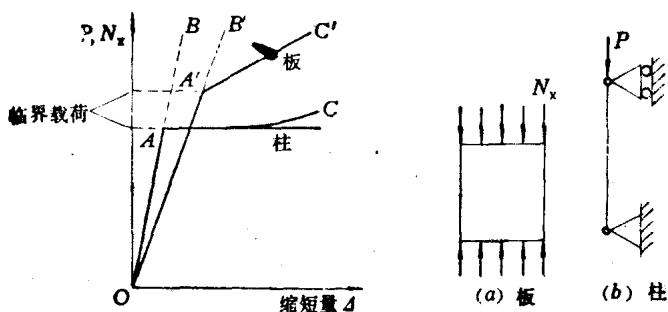


图 1.4

概括起来, 分支点失稳具有如下特征: 在原先的稳定平衡状态附近存在着另外一个相邻的平衡状态, 而在分支点处两种不同平衡状态的稳定性将要发生转变。

(2) 极值点失稳

有些弹性系统在失稳时平衡形式并不发生分支现象, 即不存在分支点, 其稳定特征是载荷与变形的关系曲线具有所谓的极值点, 参见图1.5所示的A点。在载荷达到与极值点相对应的最大载荷值以后,

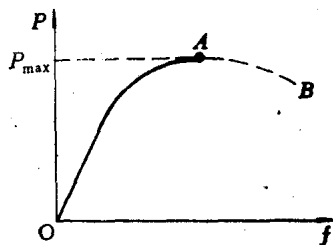


图 1.5

变形迅速增大, 载荷随之减小, 弹性系统的承载能力迅速下降。例如, 偏心压杆的失稳就属于这种形式。

(3) 跳跃失稳

这种失稳现象表现为一种突然、可见地从一种平衡形态跳跃到另一种平衡形态，而后一种稳定平衡形态的位移要比前一种非稳定平衡形态的位移大得多。这类失稳的典型例子是，在横向均布压力作用下扁拱的跳跃，如图1.6所示。

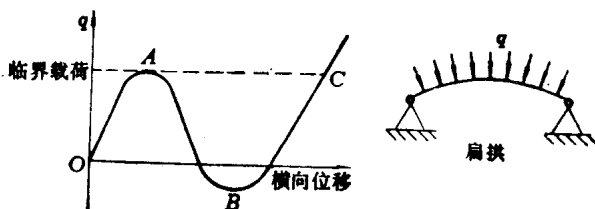


图 1.6

(4) 有限扰动屈曲

对于某些弹性结构，由于屈曲后其刚度显著降低，要想维持已屈曲的平衡形态，相应地必须使载荷大为减小。在轴向压力作用下的薄圆柱壳的屈曲以及在均匀外压作用下的整薄球壳的屈曲都属于这种类型，参见图1.7。在图1.7a中， N_x 代表每单位长度的轴向载荷；在图1.7b中， q 代表均匀外压力； V_0 是球的原始体积， ΔV 是在加载过程中体积的变化量。对于上述结构，在准静态加载过程中的有限扰动就可以使结构在载荷未达到经典屈曲载荷之前，从一种未屈曲的平衡形态过渡到另一种非邻近的已屈曲平衡形态，因此，这种屈曲形式就命名为有限扰动屈曲。

3. 平衡状态稳定性的判别准则

下面介绍三种平衡状态稳定性的判别准则，即静力学准则、能量准则和动力学准则。

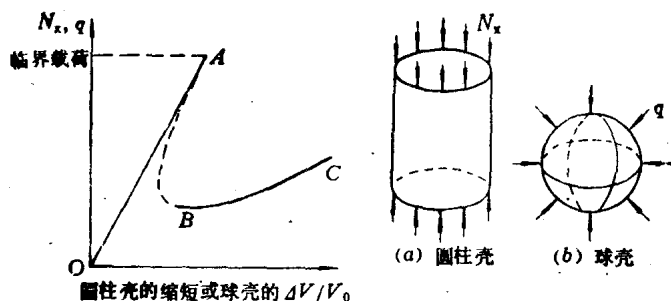


图 1.7

(1) 静力学准则，又称为微扰动准则，其要点是，假设在分支点附近存在一个相差无限小的平衡状态，它同原平衡状态的差别可以看成微扰动，列出微扰动的平衡微分方程，问题就归结为微分方程的本征值（特征值）问题，解出本征值（特征值），便可得到系统失稳的条件。

(2) 能量准则，其要点是，如果由弹性系统和外载荷所组成的力学系统的总势能相对于所有相邻状态是最小的，则系统处于稳定平衡状态。

(3) 动力学准则，其要点是，在有限自由度的广义坐标空间中，一个以坐标 q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 描述其位置的系统的平衡状态为 $q_i = 0$ ，系统随时间而变化的速度为 $\dot{q}_i$ ，若系统偏离其平衡位置，但总可以找到初始值 q_i^0 和 $\dot{q}_i^0$ ，使得在以后的运动中， $|q_i|$ 和 $|\dot{q}_i|$ 不超出某些预先规定的界限，则可以认为系统处于稳定平衡状态。

附带说明，关于稳定性的判别可以在小范围内即在与原始平衡状态相邻近的微小区域内进行研究。但为了更深入、全面地揭示失稳现象，有时也需要在大范围内进行探讨。前者