

高等学校教材

塑性力学

河海大学
李咏偕 施泽华 编

水利电力出版社

高等学校教材

塑性力学

河海大学 李咏偕 编
施泽华

水利电力出版社

内 容 提 要

本书为工科土建、水利类工程力学专业的教材。全书共有9章,主要讲述:应力应变状态、屈服条件、塑性本构关系、简单弹塑性问题、理想刚塑性体的平面应变问题、塑性极限定理、塑性力学问题的有限元法、岩土和混凝土的塑性力学问题等。

本书也可供土建、水利类其它专业作为教材,并可供有关科技人员学习参考。

高等学校教材 塑 性 力 学

李咏偕 编
河海大学 施泽华

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 8印张 76千字

1987年6月第一版 1987年6月北京第一次印刷

印数0001—4080册 定价1.20元

书号 15143·6354

前 言

本书是为工科土建、水利类工程力学专业编写的塑性力学教材，也可供土建、水利类其它专业作为教材及有关科技人员学习、参考。

塑性力学在这些专业的教学计划中都属于少学时课程，因此本书的篇幅和内容的深度、广度等都要适应这一实际情况。本书以阐述基本概念和基本理论为主，避免了复杂的数学推导和证明，精简了与土建、水利关系不大的实例。同时，考虑到专业的需要，编写了第八、第九两章。使用者可根据各自的具体条件，决定内容的取舍。为了帮助读者掌握本书的内容，每章末附有习题和答案。

本书承清华大学徐秉业同志和黄炎同志审稿。在审定编写大纲时，承清华大学、上海交通大学、浙江大学、同济大学、太原工学院、湖南大学和华东水利学院的同志到会指导，或寄来宝贵的书面意见，在此一并表示谢意。

由于编者水平有限，书中一定还会有错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

李咏偕 施泽华

1985年3月

Apr 15/85

目 录

前 言

第一章 绪论	1
第一节 材料的塑性	1
第二节 塑性力学的任务	2
习题	4
第二章 应力状态和应变状态	5
第一节 应力张量及其分解	5
第二节 应力张量及应力偏量的不变量	8
第三节 八面体剪应力 应力强度	10
第四节 应变张量	11
第五节 应变率 应变增量	13
习题	15
第三章 屈服条件	17
第一节 屈服条件和屈服函数	17
第二节 屈服面和屈服轨迹	18
第三节 屈雷斯加屈服条件和米赛斯屈服条件	20
第四节 两个屈服条件的实验验证	23
第五节 加载条件和强化模型	25
习题	28
第四章 塑性状态下的本构关系	29
第一节 广义虎克定律	29
第二节 全量理论——弹塑性小变形理论	30
第三节 增量理论	32
第四节 增量理论与全量理论的比较(例题)	37
第五节 本构关系的实验验证	39
习题	41
第五章 简单弹塑性问题	42
第一节 梁的弹塑性弯曲(理想弹塑性材料)	42
第二节 梁的弹塑性弯曲(弹塑性强化材料)	46
第三节 杆的弹塑性扭转(理想弹塑性材料)	48
第四节 受内压力作用的厚壁圆筒(理想弹塑性材料)	50
第五节 受内压力作用的厚壁圆筒(弹塑性强化材料)	55
习题	57
第六章 理想刚塑性体的平面应变问题	58

第一节	塑性应力场的基本方程	58
第二节	滑移线的主要性质	61
第三节	边界条件及基本边值问题	62
第四节	塑性应力场及滑移线场的实例	65
第五节	塑性极限荷载的实例	67
第六节	速度场的概念	71
	习题	74
第七章	塑性极限定理	75
第一节	概述	75
第二节	虚功原理及最大塑性功原理	76
第三节	下限定理	78
第四节	上限定理	80
第五节	上、下限定理的应用实例	81
	习题	86
第八章	塑性力学问题的有限单元法	88
第一节	概述	88
第二节	弹塑性全量理论的有限单元法	89
第三节	弹塑性增量理论的有限单元法	95
第四节	几种方法的比较(例题)	103
	习题	106
第九章	岩、土和混凝土塑性力学概要	107
第一节	概述	107
第二节	莫尔-库伦屈服条件和杜拉克-普拉格屈服条件	108
第三节	关连的与非关连的流动法则	111
第四节	应用实例	112
	习题答案	116
	参考文献	121

第一章 绪 论

第一节 材 料 的 塑 性

固体材料在外力作用下发生变形。一般地说,当外力较小时,材料处于弹性变形阶段。如果外力逐渐增大,材料受力超过一定限度,便进入塑性变形阶段。由材料力学知道,弹性变形是在外力除去后随之完全消失的变形,而塑性变形是指卸载后不能消失而残留下来的那部分变形。变形的不可恢复性是塑性的基本特征。

为了研究材料的塑性,通常要做室温条件下的静载实验,其中最简单的是拉伸(或压缩)试验和纯剪切(薄壁圆管受扭转)试验。试验所用的材料是塑性材料(延性材料),试验的结果用应力-应变曲线表示。图1-1是低碳钢试件受简单拉伸的试验曲线,曲线的纵坐标 σ 是名义正应力;横坐标是名义正应变 $\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$,其中 l_0 和 l 分别是变形前、后的试件长度。

图中的直线段OA和曲线段AB相当于弹性变形阶段。A点的应力称为比例极限;B点的应力称为弹性极限,它标志着弹性变形阶段的终止和塑性变形阶段的开始。由于一般材料的比例极限、弹性极限和屈服应力非常接近,所以在塑性力学中根据工程要求可对它们不加区分,都用屈服应力 σ_s 表示。这样就可以简单地说,当应力达到屈服应力之前,材料处于弹性变形阶段,应力与应变关系服从线性的虎克定律。

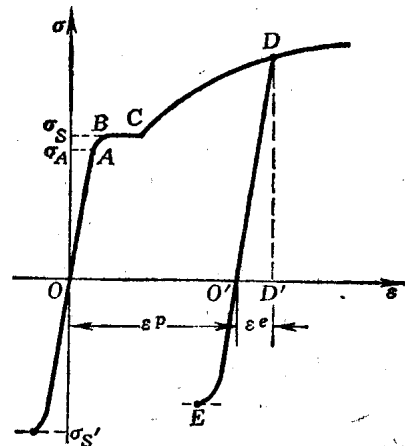


图 1-1

屈服应力是与材料的屈服性质相联系的。象低碳钢这样的材料有明显的屈服阶段,应变可以在几乎不变的屈服应力下继续增大,在图上出现与应变坐标轴大致平行的BC线段,称为塑性平台。经过塑性平台后应力又随着应变继续增加,应力-应变图成为继续上升的曲线。有些材料没有明显的屈服阶段,在应力-应变图上就没有塑性平台。在这情况下,通常根据约定的塑性应变值(0.2%)定出屈服应力。

如果作塑性变形阶段的卸载试验,结果表明,卸载和加载遵循不同的规律。卸载遵循弹性规律,其应力-应变图是直线,如图中的直线DO',它与直线AO平行。与卸除的应力相对应的那部分应变是弹性应变。在图1-1的应变坐标轴上O'D'就表示应力从 σ_D 减到零时所恢复的弹性应变 ε^e ,而OD'表示卸载前的总应变 ε ,OO'表示残留下来的塑性应变 ε^p ,它们的关系是

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

即总应变为弹性应变和塑性应变两部分之和。

应力全部卸除之后还可以进一步作重新加载的试验。设从图1-1中的 O' 点逐渐增加应力, 结果表明, 当 $\sigma < \sigma_D$ 时, 加载也遵循弹性规律, 如直线 $O'D$ 所示。如果 $\sigma > \sigma_D$, 则加载不遵循弹性规律, 试验的结果如 D 点以上的曲线所示, 就象没有从 D 点卸载一样。由此可见, σ_D 相当于卸载后重新加载时的屈服应力, 但是 $\sigma_D > \sigma_s$, 这是提高了的屈服应力, 称为加载应力。也可以说, 材料具有塑性应变以后得到强化, 提高了屈服应力, 所以称这种性质为应变强化(应变硬化), 简称强化。

应力全部卸除之后如果继续反向加载, 即由拉应力转为压应力, 那么试验曲线相当于卸载的应力-应变图向反方向延伸(图1-1), 延伸到一定的应力值时出现反向屈服。在初始的弹性变形阶段, 正向的屈服应力和反向屈服应力的绝对值相等, 都等于 σ_s 。但是经过应变强化以后, 反向屈服应力(图1-1中 E 点的应力)的绝对值降低, 小于 σ_s 。这种现象称为鲍辛格(J. Bauschinger)效应。

以上介绍了简单拉伸的试验结果。简单压缩试验或纯剪切试验也有类似的结果, 都有各自的屈服应力。在数值上, 压缩屈服应力和拉伸屈服应力相等, 都是 σ_s ; 屈服剪应力 τ_s 与 σ_s 之间有一定的比例关系。

由试验结果看来, 材料的塑性是比弹性复杂得多的力学性质。塑性的基本特征是变形的不可恢复性, 它的复杂性在于: 加载与卸载遵循不同的规律, 应力与应变之间没单值关系。这种非单值关系就是已知某瞬时的应力(应变)不能确定该瞬时的应变(应力), 除非知道从某个初始状态到该瞬时的全部变形历史(或加载历史)。例如, 图1-1中 O 点与 O' 的应力都等于零, 但应变值不同。已知应力等于零, 不能确定哪一个应变值与它相当。要确定 O' 点的应变值, 除非知道应力从零增加到 σ_D 再从 σ_D 减到零的全部历史(即加载历史)。在某一瞬时, 只有应力增量和应变增量之间才可能有确定的关系。这种增量关系在全部变形历史中进行累加, 还是可以得到应力全量与应变全量之间一一对应的关系, 其中表示加载规律的是非线性的应力-应变关系。

简单拉伸的试验也说明, 研究材料的塑性需要解决这一些重要的问题: 1) 判别材料是处于弹性变形阶段还是塑性变形阶段; 2) 判别材料是处于加载情况还是卸载情况; 3) 确定加载情况下的应力-应变关系(增量的或全量的关系); 4) 了解全部加载历史。这些问题不仅在简单拉伸的情况下有, 在一般应力状态也有。从一般情况出发, 讨论并解决这些与塑性有关的问题, 将是下面几章的内容。

必须注意, 在本节中所讨论的是塑性材料在室温条件下的静载试验, 试验结果只说明在相同条件下材料的塑性。由于本课程中限于研究这样条件下的问题, 不需要再用其它条件下的试验结果, 为此也就不作那方面的讨论了。至于岩石、土、混凝土一类材料, 即使作室温条件下的静载试验也有不同的结果, 材料呈现的塑性有其特殊性, 在本书最后将另辟专章加以研究。

第二节 塑性力学的任务

在上一节中, 根据简单拉伸试验讨论了材料的塑性。在一般荷载作用下, 物体可能是

部分也可能是全部由弹性变形阶段进入塑性变形阶段。这样的物体统称为塑性变形体，塑性力学的任务就是研究塑性变形体的应力和变形问题。

在工程技术上有很多实际问题与塑性变形有关。例如，金属的塑性加工工艺正是利用了塑性变形的不可恢复性。又如设计工程结构时，如允许结构有一定程度的塑性变形但并不导致结构破坏，则能充分发挥材料的潜力，提高结构的承载能力。塑性力学提供解决这些实际问题的理论基础和计算方法。目前，塑性力学已应用于金属结构、钢筋混凝土结构、土石坝和地下洞室等工程的力学分析和设计计算。在实际应用中，塑性力学也得到了进一步的发展。

塑性力学和弹性力学一样，研究应力和变形问题需要根据力的平衡关系、变形的几何关系和材料的物理关系。其中前两个关系并不涉及材料的力学性质，所以在弹性力学和在塑性力学中都是一样的。所不同的是物理关系（以后将称本构关系，见第四章）。由于材料在塑性变形阶段的应力-应变关系具有非单值、非线性等特性，塑性力学中的物理方程要反映这些特性，必然十分复杂。为了便

于解题，通常把材料的塑性应力-应变关系简化，采用一些简易的计算模型。塑性力学中常用的计算模型如：理想弹塑性材料，理想刚塑性材料，线性强化弹塑性材料和线性强化刚塑性材料，它们的单向应力-应变曲线分别如图1-2(a)、(b)、(c)、(d)所示。这些计算模型应该在解题时合理选用，使它们更好地模拟实际材料，尽量减少简化引起的误差。例如，理想塑性材料由于忽略了材料的强化，应该用来模拟屈服阶段较长的实际材料，如低碳钢之类。线性强化材料是把非线性的强化规律

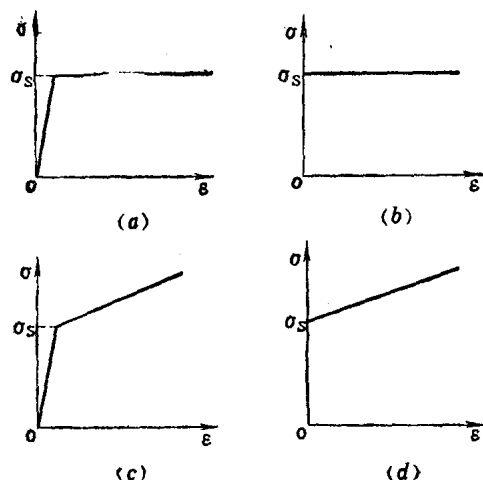


图 1-2

简化为线性的计算模型，简化后的线性关系应该接近实际的非线性关系。刚塑性材料是只有塑性变形而没有弹性变形的计算模型，适用于塑性变形充分发展而弹性变形相比之下忽略不计的情况。

从以上的讨论可以看出，塑性力学的内容基本上可以分为两大部分。第一部分内容是塑性力学的基本理论，主要是材料物理关系方面的理论。有了这些基本理论，应用合理解题方法，就可以解决塑性力学中的一些问题。这是第二部分的内容。塑性力学中的问题有弹塑性和刚塑性问题。弹塑性问题是用弹塑性计算模型求解的，解题时既要用到弹性力学又要用到塑性力学。解题的方法是详细研究塑性变形发展的全过程，即分析加载的每一瞬间物体的应力和变形，其中有确定弹性区和塑性区分界的问题。有时还要研究卸载或重新加载时应力和变形的变化情况。按照这种研究方法进行详细分析，即使采用简化的计算模型，也会遇到数学上的困难，所以只有一些简单的弹塑性问题才有解析解。比较有效的是数值解法。近年来，应用有限单元法，借助于电子计算机解弹塑性问题，取得良好的

效果。刚塑性问题是用理想刚塑性计算模型求解的，解题时只用到塑性力学。解题的方法是不研究塑性变形发展的整个过程而直接计算极限荷载，也就是理想塑性材料的结构或构件达到极限状态的荷载值。这种方法常常称为极限分析或极限设计，它可以评价结构或构件的承载能力。当然，解弹塑性问题也可以求得极限荷载，但是极限分析法比较简便，所以在工程上用得较多。

最后说一下塑性力学中的基本假设。在塑性力学中对于材料也采用连续、均匀和各向同性的假设。这和弹性力学中的假设基本一样。除此以外，由于材料的塑性，还有这一些假设：

(1) 时间因素与材料的塑性无关。

(2) 静水应力（各向相等的正应力）只产生弹性的体积变化，并不影响塑性变形规律。

(3) 一般不考虑鲍辛格效应。

这些假设是以试验为依据的，但其中第二个假设不适用于岩石、土和混凝土一类材料。此外，在讨论某些专门问题时还要作一些补充假设。

习 题

1. 试作示意图，分别表示非线性弹性材料和一般弹塑性材料的单向应力-应变曲线。

2. 试回顾材料力学中的塑性问题：采用了什么计算模型？解题的目的是什么？

3. 幂次模型的应力-应变关系是 $\sigma = A\varepsilon^m$ ，其中 A 和 m 为材料常数。试分别作： $m = 0$ ， $m = 1$ ， $0 < m < 1$ 这三种情况下的应力-应变曲线，并讨论前两种情况。

4. 图1-2(c)中的弹性模量为 E ，线性强化模量为 E' ，图1-2(d)中线性强化模量为 $E'_{\text{塑}}$ 。

试证明，对于同一材料有如下的关系 $E_{\text{塑}} = \frac{E'}{1 - \frac{E'}{E}}$ 。

第二章 应力状态和应变状态

塑性力学的任务是研究塑性变形体的应力和变形问题，为此需要分析物体内任一点的应力状态和应变状态。在弹性力学里曾经分别根据力的平衡关系和变形的几何关系建立了应力状态和应变状态理论。这些理论并不涉及材料的力学性质，所以在塑性力学里仍然适用，但有些问题和概念将在本章中进一步讨论。

第一节 应力张量及其分解

张量是一个数学名词，来源于对应力（张力）的研究。如果某些量依赖于坐标轴的选择，并且当坐标变换时，它们的变换具有某种指定的形式，则这些量总称为张量。应力分量具有这样的性质，所以也是张量。一点的应力分量就总称为应力张量，表示一点的应力状态。为了说明这一概念，先讨论 xyz 直角坐标系中一点应力状态的分析。

设物体内任一点的 9 个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx}=\tau_{xz}$ 为已知，经过该点任一斜面的外法线为 N ，其方向余弦为 l 、 m 、 n 。根据图 2-1 中四面体的平衡条件，可以求得斜面上沿 x 、 y 、 z 坐标轴方向的应力分量如下：

$$\left. \begin{aligned} X_N &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y_N &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z_N &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

进而可求得斜面上的正应力 σ_N 和剪应力 τ_N 。将应力分量 X_N 、 Y_N 、 Z_N 向法线 N 投影, 得:

$$\begin{aligned}\sigma_N &= X_N l + Y_N m + Z_N n \\ &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} nl)\end{aligned}\quad (2-2)$$

iii

$$\tau_N = \sqrt{X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2} \quad (2-3)$$

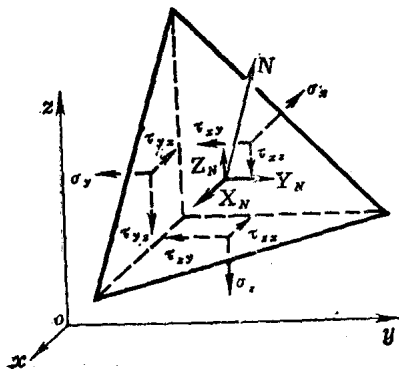


图 2-1

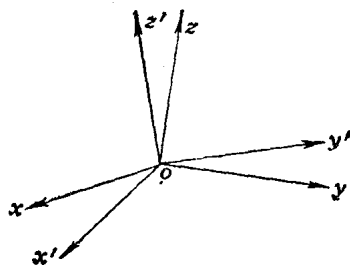


图 2-2

在式(2-1)和式(2-2)中已经用了剪应力的互等关系。由式(2-2)和式(2-3)求得的是经过一点的任意斜面上的正应力和剪应力,因此,这两个公式表明,一点的6个独立的应力分量完全决定了一点的应力状态。

当坐标变换时,一点的应力状态不变,但是对于原坐标系的应力分量将相应地变换。现在考虑坐标变换时应力分量的变换规律。设 xyz 直角坐标系经旋转变换为 $x'y'z'$ 直角坐标系(图2-2),新旧坐标系之间的方向余弦如下表所示。令新坐标系的 x' 坐标轴与图2-1中的外法线 N 相重合,则方向余弦为 l_1 、 m_1 、 n_1 ,由式(2-1)知,与 x 轴垂直的平面上沿 x 、 y 、 z 方向的应力分量为:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} n_1 \\ Y_x &= \tau_{yx} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{yz} n_1 \\ Z_x &= \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} m_1 + \sigma_z n_1 \end{aligned} \right\}$$

新、旧坐标系之间的方向余弦表

方向余弦 新轴 \ 旧轴	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

这些应力分量与平面上的正应力分量 σ_x 及剪应力分量 $\tau_{x'y'}$ 、 $\tau_{x'z'}$ 有关。根据式(2-2),将应力分量 X_x 、 Y_x 、 Z_x 向 x' 轴投影,得:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= X_x l_1 + Y_x m_1 + Z_x n_1 \\ &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2(\tau_{x'y} l_1 m_1 + \tau_{y'x} m_1 n_1 + \tau_{z'x} n_1 l_1) \end{aligned}$$

将应力分量 $X_{x'}$ 、 $Y_{x'}$ 、 $Z_{x'}$ 向 y' 轴投影,就得到平面上沿 y' 方向的剪应力分量为:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= X_x l_2 + Y_x m_2 + Z_x n_2 \\ &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) \\ &\quad + \tau_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \tau_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1) \end{aligned}$$

向 z' 轴投影,就得到平面上沿 z' 方向的剪应力分量:

$$\begin{aligned} \tau_{x'z'} &= X_x l_3 + Y_x m_3 + Z_x n_3 \\ &= \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 + \tau_{xy} (l_1 m_3 + l_3 m_1) \\ &\quad + \tau_{yz} (m_1 n_3 + m_3 n_1) + \tau_{zx} (n_1 l_3 + n_3 l_1) \end{aligned}$$

同样还可以求得与 y' 、 z' 轴垂直的平面上的正应力和剪应力分量,总共有这样6个关系式,每个式子包含6个应力分量项,即:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x'} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2(\tau_{xy} l_1 m_1 + \tau_{yz} m_1 n_1 + \tau_{zx} n_1 l_1) \\
\sigma_{y'} &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2(\tau_{xy} l_2 m_2 + \tau_{yz} m_2 n_2 + \tau_{zx} n_2 l_2) \\
\sigma_{z'} &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2(\tau_{xy} l_3 m_3 + \tau_{yz} m_3 n_3 + \tau_{zx} n_3 l_3) \\
\tau_{x'y'} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \tau_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \tau_{zx}(n_1 l_2 + n_2 l_1) \\
\tau_{y'z'} &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy}(l_2 m_3 + l_3 m_2) + \tau_{yz}(m_2 n_3 + m_3 n_2) + \tau_{zx}(n_2 l_3 + n_3 l_2) \\
\tau_{z'x'} &= \sigma_x l_3 l_1 + \sigma_y m_3 m_1 + \sigma_z n_3 n_1 + \tau_{xy}(l_3 m_1 + l_1 m_3) + \tau_{yz}(m_3 n_1 + m_1 n_3) + \tau_{zx}(n_3 l_1 + n_1 l_3)
\end{aligned} \quad (2-4)$$

式(2-4)就表示坐标变换时应力分量的变换规律, 式中已经用了剪应力的互等关系。在一般情况下, 每一个式子将包含 9 个应力分量项, 总共将有 9 个式子, 它们都是方向余弦 $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3$ (称为变换系数) 的二次式。在张量分析中称这样的二次式为张量坐标变换式, 并定义式中的 9 个量为二阶张量。因此, 一点的 9 个应力分量组成一个二阶张量, 称为应力张量。张量坐标变换式还可能是一次式、零次式、甚至是次数高于二次的高次式, 相应地可以定义式中的量为一阶张量、零阶张量和高阶张量。例如, 矢量的 3 个分量服从一次的坐标变换式, 组成一阶张量; 而标量则与坐标变换无关, 是零阶张量。

二阶的应力张量可以用字母、分量或矩阵来表示。字母表示法就是用一个字母来代替应力张量。分量表示法和矩阵表示法如下式所示:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

式(2-5)左边的符号 σ_{ij} 有角码 $i, j = x, y, z$, 它们轮流置换后 σ_{ij} 成为具有不同角码的 9 个量, 代表 9 个应力分量和它们所组成的应力张量。其中 $i=j$ 的量代表正应力分量, 可以只用一个角码表示, 如 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$; $i \neq j$ 的量代表剪应力分量, 而字母 σ 改用字母 τ 代替, 如 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \dots$ 等。式(2-5)右边的矩阵中列出了所有 9 个应力分量, 这也代表应力张量。矩阵的行、列数 1、2、3 与应力分量的角码 x, y, z 对应, 在矩阵对角线上是正应力分量, 在对角线两侧是剪应力分量。由于剪应力的互等性, $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \dots$, 代表应力张量的矩阵是对称矩阵, 应力张量是“对称张量”。

应力张量遵循张量的运算规则, 例如, 张量之和是这样一个张量, 它的分量是相加的各张量的对应分量之和。在塑性力学中, 为了研究应力状态与塑性变形的关系, 就根据张量求和规则将应力张量表示为两个张量之和, 即:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

式(2-6)中的 σ_m 为 3 个正应力的平均值, 称为平均正应力:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

式(2-6)右边第1个张量中只有相同的正应力分量 σ_m , 称为球形应力张量, 简称应力球张量。第2个张量称为偏斜应力张量, 简称应力偏量, 它也是二阶对称张量。

应力球张量可表示为:

$$\sigma_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_m \delta_{ij}$$

式中 δ_{ij} 代表单位矩阵, 它有这样的特点:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i=j) \\ 0 & (\text{当 } i \neq j) \end{cases}$$

这也就是数学中的克隆纳略符号 (Kronecker delta)。

令 $s_x = \sigma_x - \sigma_m$, $s_y = \sigma_y - \sigma_m$, $s_z = \sigma_z - \sigma_m$, $s_{xy} = \tau_{xy}$, $s_{yz} = \tau_{yz}$, $s_{zx} = \tau_{zx}$, ..., 则应力偏量可用分量 s_{ij} 和矩阵表示如下:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_z \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

应力球张量表示各方向受相同压应力或拉应力的应力状态, 即静水应力状态。在应力张量中扣除等于 σ_m 的静水应力部分, 就得到应力偏量。根据第一章中的基本假设(2), 静水应力只产生弹性的体积改变, 而与塑性变形无关。因此在塑性力学中一般不计应力球张量, 主要研究应力偏量。

第二节 应力张量及应力偏量的不变量

根据应力张量的定义, 应力张量的各个分量依赖于坐标轴的选择, 当坐标变换时, 应力分量服从张量坐标变换式。在下面将看到, 应力分量虽然会改变, 但是应力分量以一定形式组合而成的某些量是不随坐标变换而改变的, 这些量称为应力张量的不变量。

应力张量的不变量与主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 有关。如已知应力张量 σ_{ij} , 需求主应力, 可以利用斜面上的应力公式。令斜面的外法线 N 沿着某一个应力主向, 它的方向余弦为 l 、 m 、 n , 这斜面上将只有正应力 σ_N , 而 $\tau_N = 0$ 。根据投影关系有:

$$X_N = \sigma_N l, \quad Y_N = \sigma_N m, \quad Z_N = \sigma_N n$$

以此代入式(2-1)并经过整理得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_N)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0 \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma_N)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma_N)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

此外, 还有:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2-9)$$

联立求解式(2-8)及式(2-9), 即可求得主应力 σ_N 及其相应的应力主向, 即方向余弦 l 、 m 、 n 。但式(2-8)是 l 、 m 、 n 的齐次线性方程组, 由式(2-9)知道 l 、 m 、 n

不能全等于零。式(2-8)有非零解,该式的系数行列式必须等于零,即,

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_N & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_N & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_N \end{vmatrix} = 0$$

展开这个行列式,得出 σ_N 的三次方程:

$$\sigma_N^3 - I_1 \sigma_N^2 - I_2 \sigma_N - I_3 = 0 \quad (2-10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

三次方程式(2-10)有3个实根,即3个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ,它们都是与坐标轴的选择无关的量。当坐标变换时,应力张量的各个分量都要改变,但是3个主应力是保持不变的。式(2-10)的三个实根既然在坐标变换时保持不变,该式的系数 I_1 、 I_2 、 I_3 也应该不随坐标变换而改变,它们分别称为应力张量的第一、第二和第三不变量。如果坐标轴与应力主轴重合,应力张量中的剪应力分量都等于零,而正应力分量就是主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ,式(2-11)成为:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

应力张量的不变量用式(2-11)或式(2-12)表示,结果完全一样。在式(2-12)中, I_1 、 I_2 和 I_3 是用主应力表示的,可以更明显地看出它们是不变量。这些与坐标轴的选择无关的不变量对于研究各向同性材料是很有用的。

应力偏量 s_{ij} 也是一个应力张量,既然如此,应力偏量同样也有不变量,它们与应力偏量的主值 s_1 、 s_2 、 s_3 有关。如果选取坐标轴与应力主轴重合,则式(2-6)成为:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix}$$

上式中应力偏量与应力张量两者的剪应力分量都等于零,这说明应力偏量的主轴方向与应力主向是一致的。应力偏量的主值是 $s_1 = \sigma_1 - \sigma_m$ 、 $s_2 = \sigma_2 - \sigma_m$ 、 $s_3 = \sigma_3 - \sigma_m$ 。如果已知应力偏量 s_{ij} ,需求3个主值 s_1 、 s_2 、 s_3 ,同样也归结为求解类似于式(2-10)的三次方程式,其系数可以与式(2-11)类比得出如下:

$$\begin{aligned}
J_1 &= s_x + s_y + s_z = 0 \\
J_2 &= -(s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \\
&= \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \\
J_3 &= s_x s_y s_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{zx}^2 - s_z \tau_{xy}^2
\end{aligned} \quad (2-13)$$

J_1 、 J_2 、 J_3 也与坐标轴的选择无关，分别为应力偏量的第一、第二和第三不变量。如与式(2-12)相比，可以得到以 s_1 、 s_2 、 s_3 或 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 表示的应力偏量的不变量：

$$\begin{aligned}
J_1 &= s_1 + s_2 + s_3 = 0 \\
J_2 &= -(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) \\
&= \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \\
J_3 &= s_1 s_2 s_3
\end{aligned} \quad (2-14)$$

应力偏量的第一不变量 J_1 等于零，这是应力偏量的重要特点，说明应力偏量代表一种特殊的应力状态，它的3个正应力分量之和等于零。 $J_1=0$ 在公式推导中是一个有用的条件。但是，正因为 J_1 恒等于零，它不可能成为塑性变形规律的参数，所以 J_1 本身没有什么意义。在塑性力学中有重要意义的是应力偏量的第二不变量 J_2 。

第三节 八面体剪应力 应力强度

分析物体内一点的应力状态，可以求得一些特殊平面上的应力。例如，主平面上的主应力，主剪应力平面上的主剪应力。所谓主剪应力平面是经过应力主轴之一而平分其余两个应力主轴夹角的三个平面。这些面上的剪应力称为主剪应力，分别用 τ_1 、 τ_2 、 τ_3 表示，

其数值为：

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)
\end{aligned} \quad (2-15)$$

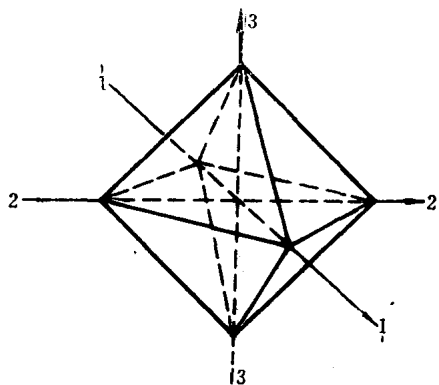


图 2-3

主剪应力包含了最大与最小的剪应力，显然它们也与坐标轴的选择无关。

在本节中将讨论另外一些特殊平面上的应力，这些平面的外法线与三个应力主轴所成的夹角数值相等。如果取应力主轴为坐标轴，则外法线的方向余弦为：

$$|l| = |m| = |n| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2-16)$$

在物体内任意一点附近，可以作出八个这样的平面，每个卦限内有一个，它们形成一个封闭的正八面体(图2-3)。所以，这些平面上的应力称为八面体正应力 σ_8 和八面体剪应

力 τ_s 。

以式(2-16)代入式(2-2)，得八面体正应力：

$$\sigma_s = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m \quad (2-17)$$

式(2-17)表示八面体正应力就等于平均正应力。再根据式(2-1)和式(2-3)，得八面体剪应力：

$$\begin{aligned} \tau_s &= \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \sigma_s^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned} \quad (2-18)$$

八面体剪应力还可以用其他形式表示。根据式(2-14)，有：

$$\tau_s = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

这可以看作是 J_2 的物理的解释。以式(2-13)中的 J_2 代入，得：

$$\tau_s = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2-19)$$

八面体剪应力 τ_s 与 J_2 一样，在塑性力学中很有用，但是通常都将它乘上系数 $3/\sqrt{2}$ 后再用。这样得到的量称为应力强度，并用符号 σ_i 表示，即：

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_s = \sqrt{3 J_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \end{aligned} \quad (2-20)$$

在单向应力状态，式(2-20)中只保留一个正应力分量（即单向应力 σ ），其余应力分量都为零，这时应力强度就等于单向应力 σ 。因此，应力强度也称为等效应力。这种简单的等效关系是由于 τ_s 乘上系数 $3/\sqrt{2}$ 而得到的，使用起来比较方便。式(2-20)表明，应力强度 σ_i 与 J_2 有关，所以它同样与坐标轴的选择无关，而且与应力球张量无关。上述这些特点使应力强度成为塑性力学中一个有用的量，但只用它的绝对值，即在式(2-20)中只取正的平方根。

第四节 应 变 张 量

现在，将根据应变状态的分析，讨论应变张量及其有关的概念。在 xyz 直角坐标系中，物体内任一点的应变状态决定于正应变分量 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 和剪应变分量 $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ 、 $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ 、 $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ 。这三个等式两边的剪应变分量是同一个量，并不代表互等的两个量，这与剪应力互等的涵义有所不同。在小变形情况，应变分量与位移分量 u 、 v 、 w 应当满足下列几何方程：