最小二乘法

周　卡著

龍門聯合書局印行

最小二乘法

周 卡 著

龍門聯合書局印行

最小二乘法

一九五一年九月初版

定[illegible]價[illegible]1[illegible]00

著者　周卡

出版者　龍門聯合書局
上海南京東路六一號一〇一室
電話　一八八一九

總發行所　中國科技圖書聯合發行所
上海中央路二四號三〇四室
電話　一九五六六
電報掛號　二一九六八

分銷處　龍門聯合書局及各地分局
上海總店　河南中路210號
上海支店　南京東路157號
北京分局　東安門大街82號
北京南城支店　琉璃廠103號
[illegible]場6號
[illegible]368號
[illegible]8[illegible]
[illegible]分局　[illegible]40號
天津分局　羅斯福路308號
西安分局　中山大街217號

0001–25[illegible]

序

爲了適合工學院土木系二年級的同學，每週學習兩小時，一學期學完的進度，編者着手編寫本書，摘要的闡述最小二乘法的總的內容．爲求在題材上的體系清明，思想上的緊密聯繫，編者儘力避免有將各種材料，亂七八糟拿來硬推的現象．同時，爲求在算學上的講解方便，曾由淺入深的介紹了一部份陣論(Matrix)的概念．在這點上，倘使同學們一開始就好好的學習，嚴格注意到思想發展的過程，卽使未明瞭陣論大意的人，也不會感到學習困難的．爲求我們在數的擴張上，不致受到符號的束縛，若干年來，一般人都習用的 Gauss 符號，經編者大胆的將它們完全改掉．對於初學者來說，那並沒有什麼負担，無論什麼符號都是一樣的．還有，在 F. R. Helment, Die Ausgleichungscrechung nach der Method der kleisten Quadrate, 1924, 及以後的若干書籍中，對於權逆數(Reciprocal weights) $Q_{i.j}$，常有不少的論述；後來在 H. Boltz 著作及若干論到 Boltz 法的書籍文獻中，又討論到擴張係數 f_{ij} 的問題．這兩種符號 —$Q_{i.j}$ 及 f_{ij}— 在算學本質上，是代表一體東西．編者又大胆一次，將它們統一起來；把 $Q_{i.j}$ 一類的符號捨棄，完全採用 f_{ij}.

H. Boltz 曾寫了兩本名著——擴張法及代替法——，詳細的討論到大規模法方程式的答解問題；算式龐大，文詞不清．而事實上代替法不過是擴張法在應用上的一特例而已．是以編者在這裏就將其原著的擴張法及代替法合併起來，以陣的形式表出．這樣，不但使在算學上的推演方便，易於將龐大的算式，縮緊寫出；也使學者易於瞭解，不會以龐大的算式，把頭都弄暈了，找不出頭緒來．而在實際計算中，以陣的排法，只要按着機械的方式去演算，決不會發生錯誤；且便於使用"紙片打孔計算機"(Penched Card Machine)，儘管乘數龐大，對於我們並不是一件可怕的事．

在本書的末尾，附上了編者自己的一篇短文"逐段擴張法"，爲的使本書的內容較全面一點. 雖對土木系的同學或不會完全懂得，這不過是給學者們一個大概的觀念，瞭解法方程答解的另一方向；編者並不希望要將它在這門課內，詳細講授的.

編者曾一度想將經驗公式的求法，編入本書的. 後以經驗公式的求法，不過是以多次的觀測，來決定公式中的各未知係數，使在這觀測領域內，求出那最能代表各觀測值的公式來. 這最小二乘法的簡單應用，一提便明，似沒有專章講授的必要.

至於最或是值的函數的誤差的討論，位置誤差的表示法，以及誤差方程式的各種變形等等，似乎對土木系的同學是不需要的. 如果有人在本課習完以後，欲研究那樣的問題，可參考其他的書籍.

本書的寫成，時間倉促，又兼之編者的學識太淺陋，錯誤的地方，一定很多. 除第一章是編者將別人現有的材料，拿來拼拼湊湊所成而外，其餘都是編者大膽的，憑着個人的一知半解，武斷的寫的；不是的地方，也一定很多. 編者在這裏很誠懇的希望各方人士，多多提出批評與指示. 這樣不但使編者受到教育，也使學者們在學習上獲得更多的益處.

中國人民解放軍測繪學校副校長劉述文先生，曾於萬忙中校閱初稿一次；北京大學工學院測量儀器室盧存忠同志，幫助抄寫，編者對他們致以衷心的感謝.

周 卡 識於北京大學工學院 一九五一年八月

目　　錄

第一章　誤差概論

1. 觀測的誤差(errors of observation)

無論以任何精密的方法與工具，欲決定一未知數的眞值是不可能的，則觀測值與眞值間必然發生差異．因爲眞值不可能得知，那觀測值與眞值相差的大小，也是不可能知道的事．在我們決定一未知數的最後結果中，爲求其我們所決定的未知數愈近於眞值，即求得更高的精度，惟一的方法就只有以增加觀測的次數來達到這種目的；但在各觀測結果之間，不會有任何一個同一的數値出現．因而我們要問，在這一羣結果中，那一個最近於眞值呢？爲處決這問題乃產生了最小二乘法．

最小二乘法是建立在或是率的算學理論，及以在觀測中所能得到的最佳值即爲未知數的最或是値上面的．因而它的主要目的在於：

a. 從一組已知觀測中，決定那可能得到的最佳値．

b. 各觀測間的相對準確度．

c. 使我們找出那影響我們觀測的各種誤差的來源；從而以修正我們所用的方法與儀器，來增加觀測精度．

2. 或是率(probability)

如一種現象有 a 種方式可出現，b 種方式不可出現．而 a 與 b 均有同等出現的可能，則此現象可發生的或是率，當是 $\frac{a}{a+b}$；而失敗的或是率，$\frac{b}{a+b}$．這兩種或是率的總和，即代表一必率(certainty)，那就是說，不成功即失敗的情形無論在任何境況下，都要出現的．以算式表 $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1$，因此一現象可能出現的或是率，在 0 與 1 之間，這分數的値愈大，則此現象能發生的或是率，也就愈高．如擲一骰子，其有六面，每一面均同等的有向上的機會，則擲後一面向上的或是率當爲 $1/6$．

3. 組合事件(compound events)

如一件事在 a 種方式內可出現，b 種方式內不可出現；同時又有彼此獨立的第二件事，a' 種方式出現，b' 種方式不出現，且此二事的出現與不出現，均有同等發生的可能，則其共同發生的總數爲 $(a+b)(a'+b')$. 如此二事同時出現，其出現總數爲 aa'，其或是率 $\frac{aa'}{(a+b)(a'+b')}$. 失敗的數，bb'，失敗的或是率 $\frac{bb'}{(a+b)(a'+b')}$. 例如擲二骰子，其兩個六點出現的或是率爲 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$. 從此可很明顯的看出，兩件獨立事件，同時出現的或是率即爲其組合事件，出現的或是率的乘積. 同樣的任意數目的獨立事件同時出現的或是率，當爲其個別或是率的乘積，因此如 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ 爲任意獨立事件，分別出現的或是率，則其同時出現的或是率爲

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots \tag{1}$$

4. 或是率與曲線

組合多個相同的事件，其中某種狀況的成功或失敗的或是率，可以幾何圖形表示如下：

［例 1］ 擲 6 個骰子，就擲一點而論，則擲出三個一點的或是率等於 $\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{6-3}$. 但 6 個骰子中，任取三個的組合爲 ${}_6C_3$. 故擲出任意三個一點的或是率爲

$${}_6C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{6-3}.$$

同理擲得無一點的或是率爲

$${}_6C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{5^6}{6^6}.$$

$$1\text{ 個一點的或是率} = {}_6C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{6\cdot 5^5}{6^6}.$$

$$2\text{ 個一點的或是率} = {}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{5^4}{6^6} = 15\cdot\frac{5^4}{6^6}.$$

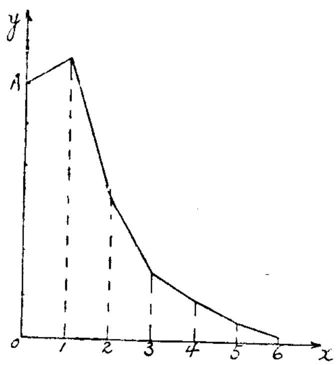
$$3\text{ 個一點的或是率} = {}_6C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{5^3}{6^6} = 20\cdot\frac{5^3}{6^6}.$$

$$4\text{ 個一點的或是率} = {}_6C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{5^2}{6^6} = 15\cdot\frac{5^2}{6^6}.$$

$$5\text{ 個一點的或是率} = {}_6C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{5}{6^6}$$

$$= 6\cdot\frac{5}{6^6}.$$

$$6\text{ 個一點的或是率} = {}_6C_6\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{6^6}.$$



[例 2] 擲 8 個銅圓，就表面而言，則無表面的或是率爲

$${}_8C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 1\cdot\frac{1}{2^8}.$$

$$1\text{ 個表面的或是率} = {}_8C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 8\ \frac{1}{2^8}.$$

$$2\text{ 個表面的或是率} = {}_8C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 28\cdot\frac{1}{2^8}.$$

$$3\text{ 個表面的或是率} = {}_8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 56\cdot\frac{1}{2^8}.$$

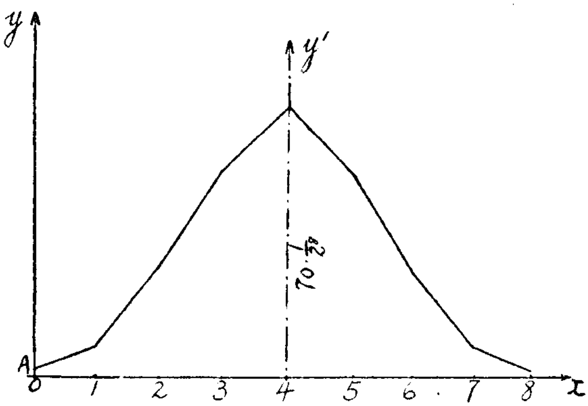
$$4\text{ 個表面的或是率} = {}_8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 70\cdot\frac{1}{2^8}.$$

$$5\text{ 個表面的或是率} = {}_8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 56\cdot\frac{1}{5^8}.$$

$$6\text{ 個表面的或是率} = {}_8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 28\cdot\frac{1}{2^8}.$$

$$7\text{ 個表面的或是率} = {}_8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 8\cdot\frac{1}{2^8}.$$

$$8\text{ 個表面的或是率} = {}_8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1\cdot\frac{1}{2^8}.$$



5. 誤差的分類

既每一觀測，必有誤差，其可能發生的，大別不外下列三種：

a. 常數誤差(constant errors).

b. 系統誤差(systematic errors).

c. 偶然誤差(accidental errors).

5–1. 常數誤差：

常數誤差，在同一觀測組中，對於每一觀測值，均有同一的影響. 如一 25 m 的基綫尺，其刻劃過長有 2 mm, 則每 100 m 長中受到其影響的誤差，均為 8 mm.

5–2. 系統誤差：

系統誤差，其代數符號與大小，對於某種情況常保持一定的關係. 如儀器誤差，濛氣差，人差均屬此類.

5–3. 偶然誤差：

偶然誤差純為碰巧出現的，並不符合於任何規律. 其為正為負均有同樣出現的可能，一般的均受誤差的指數定律所支配.

6. 誤差的比較

實際上在系統誤差與偶然誤差間，並無明確的界限. 每一偶然誤差的出現，常有其一定的原因. 如果將其原因全部知道，則可以決定其符號與大小；如是則不再爲偶然誤差，而爲系統誤差了. 在另一方面，常數誤差或系統誤差也可以(或者部分的)變動情況或儀器，以使其符號經常變換，而服從偶然誤差定律，列入於偶然誤差類中. 例如一捲尺，其長有 1 cm 的誤差，則此一 cm 卽常數的影響於觀測各結果中. 但如我們用幾根不同的捲尺，每尺均有此 1 cm 的誤差，其符號可爲正爲負，如是這各種不同的誤差，恰如偶然誤差然，可有彼此抵償的傾向. 這樣就可將之看成偶然誤差了. 其外由於溫度，光線，濕度的變動或儀器校正發生了變化而來的誤差，均列爲系統誤差內. 此種誤差是可以計算出來的，且可以把他們保留到，讓我們知道其變更律時，再來處理，或者以變更觀測的情況來部分的將其消除掉.

觀測者的人差，以增加觀測者的觀測經驗，可以變成常數的；因而可以將之當成常數誤差看待. 那是可以保留到我們決定了它的大小與符號後，再來處理；也可以觀測的方法來將它消除. 在儀器中的一部分誤差將於觀測結果可有常數的影響，可以處理人差的方法，來處理它. 必須要注意的，在常數誤差與系統誤差已經消除了以後，由於常數誤差的大小，不能完全決定或不能全部消除，則在觀測結果中，仍保持一部分小的誤差. 這遺留的小誤差，其大小旣不知道，而其符號可同樣的可爲正爲負，故可以將它們當做偶然誤差看.

所有那些小的誤差，正負有同等出現可能的，都屬於偶然誤差內. 它們由各種未知的原因使然，而每一誤差在實質上又是多數小誤差的代數和，望遠鏡照準一目標，讀測微器等等均屬於此類.

7. 過失 (mistakes)

過失並不是誤差，但要與觀測精度，聯在一塊來考慮. 它們包括讀數的不正確，把 6 當 0，把 3 當 5 等等.

8. 算術中數(arithmetical mean)

當觀測的數目,恰够決定那欲求的未知數值,那就是沒有過剩觀測的出現時,就沒有誤差調整的可能,惟一的就只有承認那觀測所得的值,就是眞值了. 爲求增加觀測的精度,如果作了許多附加觀測的時候,既然每一觀測必有誤差,那在同一數值的,那許多不同的觀測值中必然的發生彼此衝突的現象. 最小二乘法在這裏就使得我們由那一羣彼此衝突的觀測值間,找出其最或是的數值來. 普通對於同一數值,在同一的注意下,同一的情況中所作的若干次直接觀測,則其最或是值卽爲其個別觀測的算術中數;那就是說,如命各觀測值爲 $l_1, l_2, l_3 \cdots l_n$, 則此數值的最或是值卽爲

$$l_0 = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n}{n} = \frac{\Sigma l}{n}, \tag{2}$$

但在此地要注意的, l_0 並不是眞值 l; 那不過是目前情況下的最或是值罷了. 如果再增加觀測,則 l_0 數值也隨之發生變動.

9. 誤差與殘差(errors and residuals)

現在我們有必須要提起注意的是誤差與殘差的區別. 我們腦海中所指的誤差,就是觀測值與眞值的差異,有人又叫它爲眞誤差的. 而殘差呢? 就是各觀測值與最或是值的差異,有人叫它爲視誤差的. 我們知道無論在任何情況下都不能求得眞值,那誤差的大小也就不可能求得,但是殘差則可以從任何一組觀測值中求出來. 如果這羣觀測值都是非常的精確而沒含有常數誤差與系統誤差的話,那殘差就很近於眞誤差,對於直接觀測的情況而論,各殘差的代數和將等於 0, 卽 $v_1 = l_2 - l_0$, $v_2 = l_2 - l_0, \cdots$, 於是 $\Sigma v_i = 0$, 此地的 v_i 卽爲殘差.

10. 權(weights)

如果觀測的結果有各種不同的可靠度,則相應的給以各種不同的權. 這是一些相對的,較爲武斷的數字. 普通的把它們看作同一未知數的重複觀測的次數,也可以其他任何一種方法表示的. 如說二觀測值各

有 2 與 1 的權，也可以看作它們各有 ½ 與 ¼ 的權，並無什麼區別. 照上面的定義顯然的那權中數爲

$$l_0 = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + \cdots + P_n l_n}{\Sigma P} = \frac{\Sigma Pl}{\Sigma P} \tag{3}$$

那卽是說權中數等於每一觀測值與其權的乘積的總和，除以其權的總和

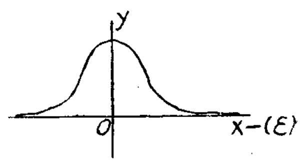
11. 偶然誤差的分配定律

觀測的數目如果到了很大的時候，由經驗我們發現有下面的三定律：

(a)正誤差的數與負誤差的數相等的.

(b)小誤差的數自佔絕大多數.

(c)大誤差則少出現.



服從以上三定律的偶然誤差，可以一或是曲綫來表示. 根據(a)曲線是對 Y–軸而對稱的；根據(b)極大值出現在 Y–軸上；根據(c)，曲線在距 O 的相當距離內趨向於 x 軸.

爲求得一算式以表這種誤差定律，我們假設曲線以 x–軸爲漸近線，x 代表誤差的大小(ε)，y 代表在大多數觀測中出現的次數，f 表以(ε)的某種未知函數，則我們可寫成下面的一般形式

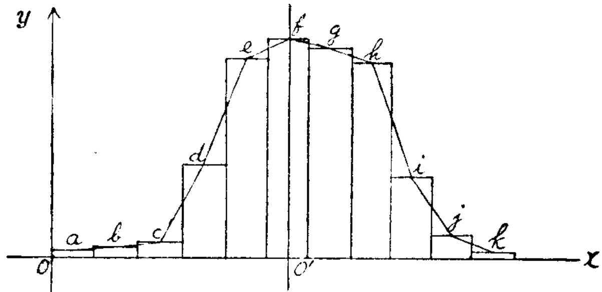
$$y = f(\varepsilon) \tag{4}$$

在此地我們必須假設觀測的數目是很大的，不然這正負誤差相等出現的情況就不能達到. 由於眞誤差不能得知，而殘差對於最或是值的分配情形，顯然的亦將服從這同一的定律，因而我們可寫

$$y = f(v) \tag{5}$$

爲殘差遵守的定律. 這個方程式在某種場合也同樣表示一殘差出現的或是率.

1878 年據美國某砲台的報告，於相距 200 碼打靶；靶爲長方形，長 52 呎，高 11 呎，上下分成 11 等分，每等分高 1 呎. 向目標一共連續射出 1000 發，期必打中其中點，得結果如下.



等分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
弹痕数	1	4	10	89	190	212	204	193	79	16	2
或是率	$\frac{1}{1000}$	$\frac{4}{1000}$	$\frac{10}{1000}$	$\frac{89}{1000}$	$\frac{190}{1000}$	$\frac{212}{1000}$	$\frac{204}{1000}$	$\frac{193}{1000}$	$\frac{79}{1000}$	$\frac{16}{1000}$	$\frac{2}{1000}$

根據以上彈痕數的分佈作一圖，在 x-軸上取一呎為單位，在 y-軸取一彈為單位如是則

第一長方形的面積為 1 彈 × 1 呎

第二長方形的面積為 4 彈 × 1 呎

第三長方形的面積為 10 彈 × 1 呎

第四長方形的面積為 89 彈 × 1 呎

第五長方形的面積為 190 彈 × 1 呎

第六長方形的面積為 212 彈 × 1 呎

第七長方形的面積為 204 彈 × 1 呎

第八長方形的面積為 193 彈 × 1 呎

第九長方形的面積為 79 彈 × 1 呎

第十長方形的面積為 16 彈 × 1 呎

第十一長方形的面積為 2 彈 × 1 呎

---

11 個長方形的總面積 = 1000 彈 × 1 呎

因為打靶的目的，在打中其靶的中點，那就是以中點為正確位置，凡是未打中點的彈，皆附有誤差． 現在我們把誤差的界限規定一下． 將上圖的 Oy-軸移至 $O'f$，在 $O'f$ 兩旁的，以右手邊為正，左手邊為負．

相應於靶上的正負兩段，就是上段爲負，下段爲正．凡彈誤中上部的，我們叫它附有負的誤差；誤中下部的，附有正的誤差．在中點兩旁正負各半呎的誤差界限內，所中的彈痕是 212，因而在此界限內的或是率爲

$$y_{-0.5}^{+0.5}=\frac{212}{1000}=\frac{212}{1000}\times\frac{1\text{ 呎}}{1\text{ 呎}}=\frac{\text{第 6 長方形面積}}{\text{總面積}}$$

對於第 5 部份而言，那誤差在 -1.5 呎到 -0.5 呎間的或是率爲

$$y_{-1.5}^{-0.5}=\frac{190}{1000}=\frac{190}{1000}\times\frac{1\text{ 呎}}{1\text{ 呎}}=\frac{\text{第 5 長方形面積}}{\text{總面積}}$$

對於第 7 部分而言，那誤差在 $+0.5$ 呎到 $+1.5$ 呎的或是率爲

$$y_{+0.5}^{+1.5}=\frac{204}{1000}=\frac{204}{1000}\times\frac{1\text{ 呎}}{1\text{ 呎}}=\frac{\text{第 7 長方形面積}}{\text{總面積}}$$

同樣的，可推算其餘各誤差界限內的或是率．如果取這 11 個長方形的總面積爲 1 的話，那在 y 軸上的單位，此刻就變成 $\frac{1}{1000}$ 了．這樣一來，各長方形的面積就等於在那誤差界限內殘差出現的或是率．對於所有在這場合的或是率或各個別面積而言，既然那總面積是一個固定數，若將總面積略去不計，其各或是率的比或各個別面積的比是不變的．如是無論在 y 軸上的單位變與不變，我們可以說或是率與彈痕數成比例，也就是與在其誤差界限內的面積成比例了．

既然在一已知的誤差界限內，殘差出現的數與在那誤差界限的中點處，以 y 軸坐標所表示的或是率成比例，如果我們令 $y=f(v)$ 曲線與 x—軸的所含的總面積爲 1 的話，則在此總面積中的任何一誤差界限所劃割的面積，卽代表那誤差界限的中點所表的誤差，出現的或是率，卽

$$y\,dv=f(v)\,dv \tag{6}$$

如有等權的，對於未知數 $x_1, x_2, x_3\cdots$ 的任意函數，n 次觀測的結果，$l_1, l_2, l_3\cdots l_n$ 得出殘差 $v_1, v_2, v_3\cdots v_n$，於是這些殘差出現的或是率爲 $f(v_1)dv,\ f(v_2)dv\cdots f(v_n)dv$；而其同時出現的或是率則爲各個別或是率的乘積，卽

$$P=f(v_1)dv\cdot f(v_2)dv\cdot f(v_3)\cdots f(v_n)dv \tag{7}$$

兩邊取對數

$$\log P = \log f(v_1) + \log f(v_2) + \cdots + n\log dv.$$

我們希望對於 $x_1, x_2, x_3 \cdots$ 的值為 $v_1, v_2 \cdots v_n$ 的出現的或是率為極大的結果，因此 P 必為極大. 從微分學上知道，要一函數為極大的條件，是取該函數對各自變數的微分；而其結果等於 0. 於是

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \log P}{\partial x_1} = \dfrac{1}{f(v_1)}\cdot\dfrac{\partial f(v_1)}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{1}{f(v_n)}\cdot\dfrac{\partial f(v_n)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \log P}{\partial x_2} = \dfrac{1}{f(v_1)}\cdot\dfrac{\partial f(v_1)}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{1}{f(v_n)}\cdot\dfrac{\partial f(v_n)}{\partial x_2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q \text{ 個方程式} \end{array}\right\} \quad (8)$$

但是

$$\frac{\partial f(v)}{\partial x} = f'(v)\frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

f' 為 v 的另一新函數

為求簡單起見，令

$$\frac{f'(v)}{f(v)} = F(v) \quad (10)$$

於是(8)變為

$$\left.\begin{array}{l} F(v_1)\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + F(v_2)\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + F(v_n)\dfrac{\partial v_n}{\partial x_1} = 0 \\ F(v_2)\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + F(v_2)\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + F(v_n)\dfrac{\partial v_n}{\partial x_2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q \text{ 個方程式} \end{array}\right\} \quad (11)$$

上面的這些方程式的數恰等於其所含未知數(x)的個數. 所以如果函數 F 的形式能夠決定的話，那我們就能從這一羣方程式中解出(x)的最或是值來. 它們是一通形的，對於所有的情況均眞，所以對任何一特殊情況亦必眞；對於某一特殊情況所決定出的 F 的形式，亦必通用於一般的情況.

如我們對於一未知數 x_1 有 n 次的等權直接觀測，觀測值為 $l_1, l_2 \cdots$