序

居今日而欲致國家於富強之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲，前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以逐譯刊行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敦敢，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋澎、李煥燊、南登岐、孫廣年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任逐譯，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

中華民國五十一年元月湯元吉序於臺北

*該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄭望厚、湯元吉等九人。

徐氏基金會啓事

一、凡對本書任何一部分，或本會所印行之其他書籍，能在內容及文字方面，提供建議，致使讀者更易迅捷了解書中意義者，如被採納，當致酬美金十二元五角(折合新臺幣五百元)至一百二十五元（折合新臺幣五千元），以示謝意。

二、本會誠徵關於自然科學及機械、電機、電子等工程之中文創作或翻譯稿件，以適合於一般人士或中等學校以上學生自修之用者爲標準。稿費每千字美金二元五角（折合新臺幣一百元），特優譯著稿酬另議。

三、玆爲獎酬本會出版各書之作者及譯者起見，將於各書出版後之次年年底，核計其在臺灣、香港及星加坡三處之銷售數量，分配贈與其作者或譯者以下列三項獎金：

1. 銷數最多者美金6,000元
2. 第二多數者美金4,000元
3. 第三多數者美金2,000元

關於上開一、二兩項事宜，請逕函香港郵政信箱 1284 號徐氏基金會接洽。

編輯要旨

一、本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二、本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三、本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四、原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種敎學措施，學生於作成論文後，校方尚需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五、本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六、本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七、本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，敎育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之，其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尚冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尚祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指敎，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第十九册目錄

上册　微積分學

頁數

下册　解析幾何學：圓

上册　微積分學

I.　幾個積分公式

不定積分（即多重意義之積分）是基本函數之逆運算，第十 243
八册中之〔215〕節已予述及：根據微分學我們**知道**函數 $y=f(x)$ 之導來式爲 $y'=f'(x)$（例如函數 $y=x^2$ 之導來式爲 $y'=2x$），所以反過來屬於 $y'=f'(x)$ 之積分乃是基本函數 $y=f(x)+c$，例如屬於 $y'=2x$ 之多重積分是 $y=x^2+c$，或屬於 $y'=3x^2$ 之多重積分爲 $y=x^3+c$，餘類推。

因此，如第十八册〔215〕節所述，我們只能對於那些已由微分求出其導來式之函數予以積分，而對其他函數例如 $y'=3x$ 或 $y'=\frac{2}{3}x^2$ 則否。

在第十八册〔216〕節中，我們已經學過一種方法，此法至少帶有幾分可能性，使一 y' 函數還元爲其所屬之基本函數（雖然此基本函數是未知數）：按照此法，我們只要將 y' 值當作正切值看待，而由此值繪成流線圖，便可由此圖形推測基本函數的進行全貌。又在第十八册〔217〕以下各節中，我們亦曾借助於幾何的方法，由 $y'=f'(x)$ 求得 $y=f(x)$，雖然，我們事先對于 $y=f(x)$ 一無所知，亦無礙於事。這種幾何方法雖能使我們了然於積分之特性，極有價值；但爲了要積分任意函數，還是太過麻煩；因爲採用幾何方法來解答算術題目，走的終歸是迂廻之路。

因此，我們必須設法展成**簡單之計算法**，然後根據此法去求一函數所屬之基本函數，亦即適用於任意函數之

積　分　公　式

始克有濟。

但我們對於"任意"一詞，必須稍稍加以限制才行，蓋當學習積分法之初，我們是否可對任何函數求其積分，這個問題是無

法答復的。所以在以下各節中，我們將把討論的範圍局限於那些可予積分之函數。

對於任意函數之**微分**，我們已經學過一般的計算規則：

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

只要涉及之函數可予微分，用此規則必能求得微分係數的。——現在可能有人要問：究竟有沒有相當於微分的**一般**積分公式，即適用於任何情形之積分法？可惜此問題之答案是否定的！我們以後雖可學到一些積分規則，但這些規則根本上無非是微分法的逆運算而已。我們不妨拿除法來做比喻。例如 $15\div 5$，除法的本身是不能把它算出來的，必須回轉頭來求助於乘法，即求 5 之級數(1, 3, 5)，或求三數之積 $1\times 3\times 5=15$；然後便可將此乘法定律寫成另一形式：$15\div 5=3$。

一般積分規則也是如此：我們只能利用微分來驗證下面各種積分規則之正確性。於此，我們可舉出大家所最熟悉的一個例子來將此情形弄個明白：

好比積分方程式 $\int 2xdx=x^2+c$ 是否沒有錯，如何才能加以驗證呢？此方程式所主張者無他，即 $y'=2x$ 應爲基本函數 $y=x^2+c$ 之導來式而已。但這一主張是否正確，我們只要利用 $y=x^2+c$ 的微分，便可證實之：

$\frac{dy}{dx}=\frac{d(x^2+c)}{dx}=2x$，參閱第十四册中之〔58〕節。可見反過來的確是 $\int 2xdx=x^2+c$。

爲使各位解答以下各節之習題時避免發生錯誤起見，我們特將初學者每易忽略的一些細節複述於下：

一般言之，首先出現於積分方程式左邊〔即在積分號或積分命令 ($\int$) 之後〕乃是具有導函數(即微分係數$\frac{dy}{dx}$) 性質的函數，好比 $(y'=)\,2x$；其次是符號 dx。關于 dx 的意義，我們只要一想到位於積分號後面的算式乃由 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x$ 之積所形成（意即此積

之極限值），即不難于了解。至于方程式右邊所包含者則爲積分題之解，即基本函數 $y=f(x)$。但我們在右邊還須加上一個常數 c，用以表示解法之多重意義才行。

但在積分號上多了一個上極限和一個下極限的記號之情形下，例如 $\int_0^3$，則在解算時常數 c 便將由于上下限的相減而消去，因此形成一個單純意義之積分。前者之積分（即多重意義之積分）乃指求基本函數的逆運算而言；後者（即單純意義）之積分乃指求和法（或求和之極限值）而言。

現在，我們要進而討論若干重要的積分規則了： 244

a） $\int x^m dx=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+c$，　令 $m\neq -1$

此式之用意是在求證 $y'=x^m$ 應爲基本函數 $y=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+c$ 之導來式。屬於此基本函數者乃是微分係數 $y'=x^m$，我們已就第十六册〔159〕節中之第二習題加以證明了。

公式 a）適用於 m 之一切值，只有一種情形是例外，即：如令 $m=-1$，則分母將等于 $m+1=-1+1=0$，因而形成無用之商。這一奇怪情形，我們將在第二十册中討論及之。

若干應用例題：

令 $m=+2$，則按 a）式可以求得：

$$\int x^2 dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}+c=\frac{x^3}{3}+c$$

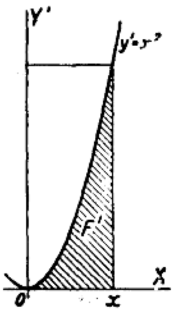
各位祇須微分函數 $y=\dfrac{x^3}{3}+c$，便可證實上式之正確性！

在直角坐標系中位於曲線 $y'=x^2$，X 軸以及 $x=0$ 與 $x=3$ 所屬二縱標之間的面積 F' 究有多大？——按公式 a）及第十八册〔230〕節所講，可知 $\int_0^3 x^2 dx=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^3=\dfrac{3^3}{3}-\dfrac{0^3}{3}=9$；此時應選擇由軸的量度單位所構成之正方形作爲面積單位。

若將此積分之上極限假定爲一任意之 x，則得：

$$\int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^x = \frac{x^3}{3} = \frac{x\cdot x^2}{3} = \frac{1}{3}x\cdot y'.$$

由此可見，F' 乃等於〔244 a〕圖所示長方形 $x\cdot y'$ 的 $\frac{1}{3}$；換言之此長方形乃被曲線 $y'=x^2$ 按 2：1 之比所分割。這一點，早在耶穌降生前250年左右，阿基米得氏 (*Archimedes*) 就已經知道了！



244 a

習　題：1)　試將曲線 $y'=x^2$ 畫在一張毫米方格紙上，然後只要數一數並且估計一下被此曲線所掩蓋的小正方形，即可知道由 $x=0$ 至 $x=3$ 所量而位於該曲線下方的面積之大小！

令 $m=1$，則按 $a)$ 式可得：

$$\int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

各位只要對於基本函數 $y=\frac{x^2}{2}+c$ 進行微分，便可證實上式之正確性！

習　題：2)　試計算 $\int_2^5 x\,dx$！至于結果有無錯誤，只要在直角坐標系之內畫一直線 $y'=x$，並求出介於 $y'=x$，X 軸以及 $x=2$ 及 $x=5$ 所屬二縱標間的面積，便可加以驗證！

令 $m=0$，則按公式 $a)$ 可得：

$$\int x^0\, dx = \int 1\, dx = \int dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$$

習　題：3)　試由基本函數的微分以證實上式計算之正確性！

4)　試求 $\int_0^3 dx$ 之積分，並從方程式 $y'=1$ 出發，作圖以證實其結果！

245　$b)$　$\int a\cdot\varphi'(x)dx = a\cdot\int\varphi'(x)dx$

在第十六册中之〔120〕節，我們曾經證明：如果 $y=3x^2$〔一般寫法爲 $y=a\cdot\varphi(x)$〕是基本函數的話，則其微分係數應爲 $y'=3\cdot2x$〔一般寫法爲 $y'=a\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}=a\cdot\varphi'(x)$〕。因爲我們已經知道函數 $y=x^2$ 之微分係數是 $2x$，所以還可用一更較簡單的方式（即在 $2x$ 之前放上因數3就行）對函數 $y=3\cdot x^2$ 進行微分。簡言之：微分時，可將位於函數 $\varphi(x)$ 前面的常數因子 (a)，仍然當作因子置於函數 $\varphi(x)$ 的微分係數之前。

一　覽　表

	實　　例	一般寫法	更爲一般的寫法
基本函數	$y=3x^2+c$	$y=ax^n+c$	$y=a\cdot\varphi(x)+c$
導 函 數	$y'=3\cdot2x$	$y'=a\cdot nx^{n-1}$	$y'=a\frac{d\varphi(x)}{dx}=a\cdot\varphi'(x)$

由此可見，反過來說，屬於導函數 $y'=3\cdot2x$〔一般寫法爲 $y'=a\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}=a\cdot\varphi'(x)$〕的基本函數是 $y=3\cdot x^2+c$〔一般寫法爲 $y=a\cdot\varphi(x)+c$〕。下列方程式的內容與此說法完全相同：

$$\int a\cdot\varphi'(x)dx=a\cdot\int\varphi'(x)dx=a\cdot\varphi(x)+c$$

以文字說明之，便爲：**積分號後面的常數因子，亦可被置於積分號之前**。

當然，積分號後面的函數，並非一定**代表**導函數不可的。因此，公式 $b)$ 亦可寫成：

$$\int a\varphi(x)dx=a\int\varphi(x)dx \quad 或 \quad \int af(x)dx=a\int f(x)dx$$

但須注意者，緊隨 $\int$ 之後的符號 $f(x)$，是不能當作基本函數的記號看待的！

例　題：

(1) $\int3x^2dx=3\cdot\int x^2dx=3\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}+c=x^3+c$；參閱第十八册中之〔218〕節！

(2) $\int a dx = a\cdot\int dx = a\cdot x + c$；參閱上面〔244〕節！

習　題：

1) 試計算 $\int 5dx$，並由微分以證實結果之正確性！

2) 試積分$\int_1^4 dx$，並用圖解法，將 y' 函數畫在一個直角坐標系中，以證實各位求得之結果！此外，還請計算下列各題：

3) $\int_0^2 \frac{3}{2}dx$；　4) $\int \frac{2}{3}dx$；　5) $\int \frac{dx}{b}$；

6) $\int 5x^4 dx$；　7) $\int_0^3 2x^2 dx$；　8) $\int 11x^{10}dx$；

9) $\int \frac{2}{x^2}dx$；　10) $\int 2\cdot\sqrt{x}\,dx$；　11) $\int_0^1 2\cdot\sqrt{x}\,dx$；

12) $\int \frac{-1.5\,dx}{\sqrt{x^5}}$

以上各題均須利用微分進行驗算。第 3)，7) 及 11) 各題之結果，則請將 y' 函數畫於毫米方格紙上，然後數一數組成面積 F'（此面積位於 y' 曲線之下方）的若干正方形而證實之。對第 11) 題只須考慮其正根值卽可。

246　c)　$\int(u'+v')dx = \int u'dx + \int v'dx = u + v + c$

在第十六册中之〔123〕節，我們學過：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u+v)}{dx} = (u+v)' = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = u' + v'$$

以文字表達，卽爲：對二函數組成之有限和數進行微分時，祇須將各函數之微分係數加起來就行。據此，因爲一個和數（好比二函數 u 與 v 之和）之導來式〔卽 $\frac{d(u+v)}{dx}$〕等於各函數導來式之和〔卽$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$〕，或用另一種說法，卽：因爲導來式$(u+v)'$等於導來式 u' 及 v' 之和，故反過來亦可寫成：

$$\int(u'+v')dx = \int u'dx + \int v'dx = u + v + c$$

再以文字說明之：**對有限函數之和進行積分時，只要對於每一被加數分別進行積分，而將求得之積分加起來就行。**

假如我們不欲用特別**記號**明白表示須予積分之函數爲導函數時，則得公式 $\int(u+v)dx=\int udx+\int vdx$。（此式之末尾自然不能寫出：$=u+v+c$）

各位對於此中的聯帶關係必須一而再，再而三的想個透澈，直至成爲理所當然而後已。熟思的時候可借助於實例，尤其是借助於那些爲我們所熟悉的實例。在第十六册中之〔123〕節，我們就是根據一個實例來進行**微分**，亦即由基本函數來求其微分係數的：

$$y=x^3+x^2=u+v=\varphi(x)+\psi(x)\text{；}$$
$$y'=3x^2+2x=u'+v'=\varphi'(x)+\psi'(x)$$

相反的運算則可從導來式 $3x^2+2x$ 回到其所屬之基本函數：

$$\int(3x^2+2x)dx=\int3x^2dx+\int2xdx=3\cdot\int x^2dx+2\int xdx$$
$$=\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+c=x^3+x^2+c$$

習　題：

1) $\int[\varphi'(x)\pm\psi'(x)]dx$； 2) $\int\left(5x^2-6x+\frac{5}{x^2}\right)dx$；

3) $\int_0^x(x^2+a)\,dx$； 4) $\int_1^2(x^3-a)\,dx$；

5) $\int_0^x[(x^2\pm a)\cdot3x]\,dx=\int_0^x(3x^3\pm3\,ax)\,dx$；

6) $\int[a\cdot mx^{m-1}\pm b\cdot n\cdot x^{n-1}]\,dx$

有兩個比較困難的題目，讓我們和各位來一同進行解答：

7) $\int\frac{1-x^5}{1-x}dx=?$

在積分號後面的商，我們只要和第六册〔556〕節一樣，實施有所指的除法，即可使之化爲一個和數：

$$\frac{1-x^5}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4$$

故：
$$\int \frac{1-x^5}{1-x}dx = \int(1+x+x^2+x^3+x^4)dx$$
$$=\int dx+\int xdx+\int x^2dx+\int x^3dx+\int x^4dx$$
$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+c$$

（由微分而證實之！）

8) $$\int \frac{3+5\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}dx=\int\frac{3dx}{x^{\frac{3}{2}}}+\int\frac{5x^{\frac{2}{3}}dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$
$$=3\int x^{-\frac{3}{2}}dx+5\int x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}\,dx=\frac{3x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+\frac{5x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1}+c$$
$$=\frac{3x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+\frac{5x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}}+c=\frac{-6}{\sqrt{x}}+30\sqrt[6]{x}+c$$

另有二題應由各位自已去做：

9) $\int\frac{1+x^3}{1+x}dx$；　　10) $\int\frac{x^4-1}{x^2-1}dx$

247 II. 微積分計算中之函數 y=sin x (弳) 及 y=cos x (弳)

於此，有一前提，即各位對於第十一册中之〔932〕至〔941〕各節，第十三册中之〔31〕至〔35〕各節，第十四册中之〔62〕及〔63〕二節，以及第十五册中之〔75〕至〔80〕各節之內容均已完全了解了。

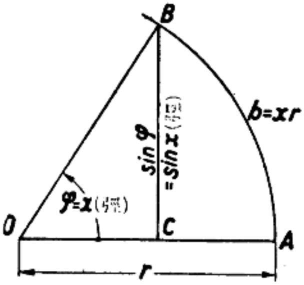
a) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ (\text{弳})}{x}=1}$$

上列重要極限方程式之意義，我們只能逐步來加以闡釋。並且首先所須討論的是上式分數中之分子，即 $\sin x$（弳）。在 *sinus* 後面的 x 係與一個角有關之數，我們稱之爲 φ；但 x 只代表此角之量度數。由第十三册〔34〕節所講，我們知道：假如角的後面沒有單位（不論舊度或新度）的附記，而只有量度數時，則只能認定角之單位爲弳。所以 x 必須視爲用弳來量的角之量度數，假如人們未將單位弳附於 x 之後的話。

在微積分計算所用之方程式中，通常都是採用弧度以表示角

的大小的。

在 $\frac{\sin x\ (\text{弳})}{x}$ 這個分數的分母中只列有 x，故可斷言它與三角函數是無關的。這個 x 在 $a)$ 式中係用以代表按 r 來量的圓弧 b 之量度數，而此 b 在第十三册〔34〕節所講的單位圓中乃是屬於角 $\varphi=x$（弳）的。簡言之：分數中的分子爲 $\sin\varphi=\sin x$(弳)，其分母則爲弧 $b=x\cdot r=arc\,\varphi$ 之量度數 x。〔247 a〕圖是用來說明這種情形的，圖中我們選定 $x=1$，即 $\varphi=1$（弳）$\approx 57.3°$。因爲一般正弦函數表（參閱第十一册中之〔932〕節）內只註明了用舊度來量的角之正弦值，故非加以換算不可：



247 a

$$\sin x\ (\text{弳})=\sin 1\ (\text{弳})=\sin 57.3°=0.8415$$

因爲我們現在要研討〔247 a〕圖所示之 $\sin x$（弳）與 x 之比值之故，所以須先討論正弦線段 BC 與弧長 BA 之比，方始有濟。

上面已經提及，對弧 $b=BA=x\cdot r=1r$ 而言，1 是此弧之量度數，假如我們用 r 來量這個弧長的話。據此，我們在此例中求得的結果是 $\frac{\sin x\ (\text{弳})}{x}=\frac{BC}{BA}=\frac{0.8415}{1}=0.8415$，這是一個比 1 要小 0.1585 的眞分數。

在 *límes* 下面附加 $x\to 0$ 的意思，是指所求者應爲商 $\frac{\sin x(\text{弳})}{x}$ 所趨向之極限值，假如角 $\varphi=x$（弳）逐漸變小而接近於 0（弳）$=0°$ 的話。此角旣變爲 0，則其正弦及其所屬之弧 b 亦必等於 0；但我們倘若令角 φ 突然變爲 0，則結果是無法求得所求之極限值的，蓋在此情形下，我們所求得的只是一個無用之值，即

$\frac{\sin x\ (\text{弳})}{x}=\frac{0}{0}$ 而已。因此，我們得令 φ 逐漸接近於 0 ，但不使它眞正到達 0 才行。這樣一來，我們便可進而對於愈來愈小的角計算那些具有 $\frac{\sin x\ (\text{弳})}{x}$ 形式之若干商數了（正弦值及弧長可從算表中查得之）：

1） $x=\frac{\pi}{4}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{4}(\text{弳})$； $b=\frac{\pi}{4}r$；

$$\frac{\sin x\ (\text{弳})}{x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\ (\text{弳})}{\frac{\pi}{4}};$$

$\frac{\pi}{4}(\text{弳})=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ$；參閱第十三册中之〔35〕節；

$$\sin x\ (\text{弳})=\sin\frac{\pi}{4}(\text{弳})=\sin 45^\circ=0.7071;$$

弧的量度數 $x=\frac{\pi}{4}=\frac{3.1416}{4}=0.7854$ 。此量度數亦可從第十四册〔64〕節所講的弧長表中查得之，但因該表也是根據舊度編製的，所以仍舊得走迂廻之路，始能達到目的：

$b_{45^\circ}=0.7854\,r$；最後結果：

$$\frac{\sin x\ (\text{弳})}{x}=\frac{0.7071}{0.7854}=0.9003,$$ 亦卽比 1 要少 0.0997。

（請各位用對數表核對我們所算的結果！）

2） $x=\frac{\pi}{36}$； $\frac{\pi}{36}(\text{弳})=\frac{180^\circ}{36}=5^\circ$； $\sin 5^\circ=0.0872$；

$b_{5^\circ}=0.0873\,r$； $\frac{\sin x\ (\text{弳})}{x}=\frac{0.0872}{0.0873}=0.9989$，

亦卽比 1 少 0.0011

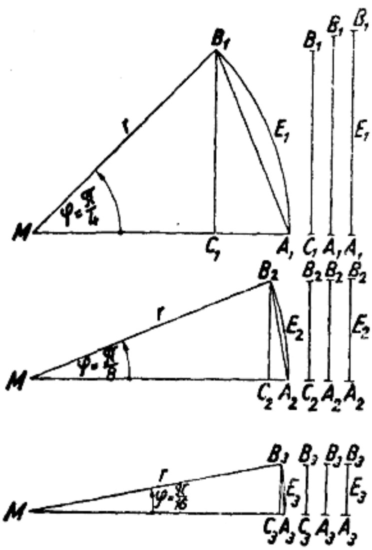
3） $x=\frac{\pi}{90}$； $\frac{\pi}{90}(\text{弳})=\frac{180^\circ}{90}=2^\circ$； $\sin 2^\circ=0.0349$；

$b_{2^\circ}=0.0349\,r$； $\frac{\sin x\ (\text{弳})}{x}=\frac{0.0349}{0.0349}=1$

在上面的計算中，到了 $x=\frac{\pi}{90}$ 便已求得商 $\frac{\sin x\ (\text{徑})}{x}$ 之值等於1了，這一點和算表中所含者均為簡約之值有關。如果表中包含正弦與弧長之值較為準確（即不太使之四捨五入）的話，則我們必能證實，對更小之角而言，其商 $\frac{\sin x\ (\text{徑})}{x}$ 雖會逐漸接近於1，却永遠不會等於1的。可是事實上正弦和弧的長度均為無理數，故十分準確的正弦和弧長表是無法編製的（參閱第十三册中之〔29〕節）。如欲達此目的，殆非採用其他方法不可；於此，我們首先所擬採取者為圖示法。如〔247 *b*〕圖所示，在三個相等的單位圓內，分別繪有 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，$\varphi=\frac{\pi}{8}$ 及 $\varphi=\frac{\pi}{16}$；以及表示 $\sin\varphi=\sin x$（徑）之投影垂線 BC 與三角形 ABC 之弦邊 BA。屬於 φ 角之圓弧為 $\widehat{BA}=\widehat{BEA}$。在這些三角形中我們可以讀出：勾邊 BC 是小於弦邊 BA，而 B 與 A 二點之直線連繫則小於 $\widehat{BEA}$ 之非直線連繫；尤其是 BC 更小於 $\widehat{BEA}$，故：

$$\sin x\ (\text{徑}) < arc\ x \cdot r$$

如將此三圖作一比較，我們很容易察覺：φ 角愈小，亦即其量度數 x 愈小，則 BC 與 $\widehat{BEA}$ 之間的差別亦愈小。為使各位明白看出這種情形起見，我們特將線段 BC，BA 及拉直之弧 $\widehat{BEA}$ 畫於每



247 b

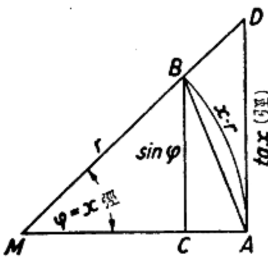
一個三角形之旁。反之，這種差別愈小，則商 $\frac{BC}{\widehat{BEA}}=\frac{\sin x(\text{弳})}{x}$ 必愈接近於1。

爲使各位不要誤解，以爲 φ 角愈縮愈小，則 BC 與 $\widehat{BEA}$ 之比最後會變爲0起見，各位可設想 φ 角縮小一次，而單位圓似將放大一次；其實這種放大對 BC 與 $\widehat{BEA}$ 之比是毫無影響的！

結果：至少目前我們也許可以如此假定，即當 φ 角繼續縮小下去時，BC 與 $\widehat{BEA}$ 之比勢必逐漸接近於1。

但我們爲了要使此一結果更臻確實可靠起見，還得另闢途徑才行。

各位想必還記得等式 $\cos 0°=1$，此值亦可直接出現於分母之內，所以要比 $\sin 0°=0$ 容易處理多了。因此我們也許可使 $\frac{\sin x(\text{弳})}{x}$ 與 $\cos x$（弳）發生聯帶關係，先是對于不等于0之任意角，然後是令 $x=0$（弳）。爲欲達此目的，我們於此殆非採取迂廻之路不可：



247 c

由〔247 c〕圖中可以讀出：

$$\triangle MAB<\text{扇形 } M\widehat{AB}<\triangle MAD$$

$\triangle MAB=\frac{1}{2}MA\cdot BC$。因 $MA=r$ 及 $\sin x$（弳）$=\frac{BC}{r}$，即 $BC=r\cdot\sin x$（弳），故得：

$$\triangle MAB=\tfrac{1}{2}r^2\cdot\sin x\ (\text{弳})$$

扇形 $M\widehat{AB}$ 究有多大呢？按第九册〔859〕節可知整個圓的面積是等於 $\pi\cdot r^2$。因全圓係分成360舊度，故屬于圓心角1°（這是舊度！）之扇形面積應爲 $\frac{\pi r^2}{360}$。又因全圓可分爲 2π（弳）之故，所以屬於圓心角1（弳）之扇形面積應爲 $\frac{\pi\cdot r^2}{2\pi}=\frac{r^2}{2}$；參閱第十三册中之〔35〕節。以故，屬于圓心角 x（弳）之扇形，其面積必爲 $\frac{r^2}{2}$ 的 x 倍。