全国高等教育自学考试

工程数学

线性代数同步练习册

（2002年版）

全国高等教育自学考试指导委员会组编

金震淮　编著

浙 江 科 学 技 术 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学·线性代数同步练习册/金震淮编著.
—杭州：浙江科学技术出版社，2002.4
全国高等教育自学考试用书
ISBN 7-5341-1729-1

Ⅰ.工… Ⅱ.金… Ⅲ.线性代数—高等教育—自学考试—习题 Ⅳ.①TB11-44②0241.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第014795号

全国高等教育自学考试
工程数学
线性代数同步练习册

全国高等教育自学考试指导委员会组编
金震淮 编著

*

浙江科学技术出版社出版
(社址:杭州市体育场路347号 邮编:310006)
浙江印刷集团公司印刷

开本:850×1168 1/32 印张:8.125 字数:196 000
2002年4月第 1 版
2002年4月第1次印刷

ISBN 7-5341-1729-1/TB·2
定 价:13.00元
(本书如有质量问题,请教材供应部门联系)

组编前言

依靠自己的力量，在有限的时间里学习一门新学科，从不懂到懂，从不会到会，从不理解到理解，从容易遗忘到记忆深刻，从不会应用到熟练应用，从模仿到创新，把书本知识内化为自己的知识，是一个艰难的过程。在这个过程中，自学者不仅需要认真钻研考试大纲，刻苦学习教材和辅导书，还应该做适量的练习，把学和练有机地结合起来，否则，就不能达到预定的学习目标。“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。”这是每一位自学者都应遵循的信条。

编写练习，同样是不容易的事。它对编写者提出了相当高的要求：

- 有较深的学术造诣；
- 有较丰富的教学经验；
- 对高等教育自学考试有深刻的理解并有一定的辅导自学者的经历；
- 对考试大纲、教材、辅导书有深入的了解，对文中的重点、难点、相互联系等有准确的理解；
- 对自学者的学习需要和已有的知识基础有一定的了解。

只有把这些因素融会在一起，作者才能编写出高质量的、有利于举一反三和事半功倍的练习。

基于以上考虑，我们组织编写出版了同步练习，使之与考试大纲、教材、自学辅导书相互补充，形成一个完整的学习媒体系统。

之所以把这些练习称为同步练习，是因为：

第一，它与考试大纲、教材的内容及顺序是一致的，按照考试大纲、教材的章、节、知识点的顺序编选习题，方便自学者循序渐进地学习与练习。

第二，它与自学者学习过程是一致的。自学过程大体包括初步接触、大体了解、理解、记忆、应用、创新、复习等阶段，在每一个阶段，自学者都容易找到相应的练习。

如此学与练同步的方式，有利于激发自学的兴趣与动机，有利于集中注意力于当前所学的内容，有利于理解、巩固、记忆、应用，尤其有利于自学者及时知道自己的学习状态与结果，以便随时调整学习计划在难度较大处多投入精力。

基于学习目标的考虑，我们把同步练习大致分为四类：

第一，单项练习：针对一个知识点而设计的练习。其目的在于帮助自学者理解和记忆基本概念和理论。

第二，综合练习：针对几个知识点而设计的练习。这又可分为在本章综合、跨章综合、跨学科综合三级水平。其目的在于帮助自学者把相关知识联系起来，形成特定的知识结构以便灵活地应用。

第三，创造性练习：提供一些案例、事实、材料，使考生应用所学到的理论、观点、方法创造性地解决问题。这类问题可能没有统一的答案，只有一些参考性的思路。其目的很明显，就是培养自学者的创新意识和能力。

第四，综合自测练习：在整个学科范围内设计练习，尽量参照考试大纲的题型，组成类似考卷的练习。其目的在于使自学者及时检测全部学习状况，帮助自学者作好迎接统一考试的知识及心理准备。

希望应考者在使用同步练习之前了解我们的构想，理解我们的意图，以便主动地选择适合自己学习的练习题目。

孔子说："学而时习之，不亦乐乎。"一边学，一边练，有节奏、有规律地复习，不仅提高了学习效率，也会给艰难的学习过程带来不少的快乐。圣人能够体会到这一点，我们每一位自学者同样能体会到。如果通过这样的学习过程，实现了学习目标，实现了人生的理想，实现了对自我的不断超越，那么，我们说这种学习其乐无穷也毫不夸张。

全国高等教育自学考试指导委员会

2000 年 10 月

目 录

第一部分　自学指导

第一章　矩阵和行列式

考核知识点：

a. 矩阵的概念

b. 消元法与矩阵的初等变换

c. 矩阵的运算及其运算规律

d. 分块矩阵及其运算

e. 行列式的定义、性质与计算

f. 克莱姆(Cramer)法则

g. 逆阵的定义、性质与计算

按照自学教材的内容顺序，本章分为四个同步复习单元.

第一单元　矩阵及矩阵的初等变换

一、自学考核的基本要求

1. 理解矩阵的概念.

2. 熟知零矩阵、单位矩阵、阶梯形矩阵及对角形矩阵等特殊矩阵的定义.

3. 理解矩阵相等的定义.

4. 理解矩阵的初等变换及矩阵等价的概念，并能熟练地利用初等行变换化矩阵为阶梯形.

5. 知道线性方程组的一般表示形式，它的解是个有序数组.

6. 理解消元法的实质，掌握用消元法求解线性方程组.

二、例题介绍

例 1.1 如果矩阵等式为$\begin{bmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$,求出 a,b,c,d 分别为多少?

解 根据矩阵相等的定义:要求等号两端的矩阵中的对应元素都相等,由此得到

$a+b=4$

$c+d=6$

$c-d=10$

$a-b=2$

因此有 $a=3, b=1, c=8, d=-2$.

把求出的四个数代入到矩阵等式验算后,知道是正确的.

说明 矩阵的相等必定要求等号两端的矩阵是同型的,否则矩阵中的元素不能一一对应。因此我们不能说任意两个零矩阵或者单位矩阵总是相等.

例 1.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

利用矩阵的初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-2)r_1]{r_3+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+r_4} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-1)r_3}\begin{bmatrix}1&4&-1&0&2\\0&0&-1&-1&2\\0&0&0&-2&4\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

例 1.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&-1\\2&1&-2&-2&-2\\-1&2&-4&1&1\\3&0&0&-3&-3\end{bmatrix}$，利用矩阵的初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&-1\\2&1&-2&-2&-2\\-1&2&-4&1&1\\3&0&0&-3&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+(-3)r_1]{\substack{r_2+(-2)r_1\\r_3+r_1}}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&-1\\0&3&-6&0&0\\0&1&-2&0&0\\0&3&-6&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&-1\\0&1&-2&0&0\\0&3&-6&0&0\\0&3&-6&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-3)r_2]{r_3+(-3)r_2}\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&-1\\0&1&-2&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

说明 我们利用矩阵初等行变换化简矩阵成为阶梯形矩阵时，不能把原矩阵的阶数改变，因此不论在矩阵中出现多少行全为数零，也不能把这些零省略，即题中原矩阵是 4 行 5 列的矩阵，那么阶梯形矩阵仍是 4 行 5 列的矩阵.

例 1.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&1&2\\3&2&4\end{bmatrix}$，下列矩阵中能与 $\boldsymbol{A}$ 等价的矩

阵为________.

(A) $\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

解　正确的选择为(A)

说明　i. 因为矩阵等价是同型矩阵之间的一种关系，所以，(B)与(C)是不能与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价的，因此，选择首先要排除(B)与(C).

ii. (D)虽然与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是同型的，但亦不能与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价，其原因是能与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价的阶梯形矩阵中非零行的个数是惟一确定的，题中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵时的非零行的个数为 2，但(D)的非零行个数为 3，因此(D)亦不能与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价，正确的只能选(A).

iii. 因此我们理解矩阵等价概念时，除了要注意矩阵之间是否同型，还应该注意化为阶梯形矩阵时其非零行的个数是否相等.

例 1.5　解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\4x_1+2x_2+5x_3=4\\2x_1\qquad\;\;+2x_3=6\end{cases}$$

解　首先用初等行变换把增广矩阵化简为阶梯形矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\4&2&5&4\\2&0&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\0&4&-1&2\\0&1&-1&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&4&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+(-4)r_2}\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&0&3&-18\end{bmatrix}$$

利用这个阶梯形矩阵,我们就得到与原方程组对应的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_3 = -18 \end{cases}$$

然后通过逐步回代过程,得到 $x_3=-6$,$x_2=-1$,$x_1=9$,于是原方程组的解为:

$$x_1=9, \quad x_2=-1, \quad x_3=-6$$

说明 这个解我们有时用有序数组表示为:

$$(9,-1,-6) \text{或} \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

例 1.6 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

解 首先用初等行变换把增广矩阵简化为阶梯形矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+(-4)r_1]{\substack{r_2+(-2)r_1 \\ r_3+(-1)r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-1)r_2]{r_3+(-1)r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{2})r_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\0 & -3 & -2 & 2\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

于是就得到与原方程组同解的阶梯形方程组

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\\ \quad -3x_2 - 2x_3 = 1\\ \quad\quad x_3 = 2\end{cases}$$

通过逐步回代过程,得到原方程组的解为

$$x_1 = -1,\quad x_2 = -2,\quad x_3 = 2$$

或把线性方程组的解用有序数组形式表示为:$(-1,-2,2)$.

说明 值得注意的是:消元法解线性方程组的回代过程亦可用初等行变换来实现. 例如,在题中我们可以对阶梯形矩阵继续施行初等行变换,化简为更加简单的阶梯形矩阵.

$$\overline{A}\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\0 & -3 & -2 & 2\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+(-2)r_3]{r_2+2r_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3\\0 & -3 & 0 & 6\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{3})r_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

此时,我们得到的与原方程组同解的阶梯形方程组为

$$\begin{cases}x_1 = -1\\x_2 = -2\\x_3 = 2\end{cases}$$

这就是我们要求的解.

三、同步练习题

1. 填空

(1)设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{t\times m}$ 是同型矩阵，则 $s=$ ________，$n=$ ________；又若当 $s=n$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 ____________.

(2)设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

当 $m=n$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为 ____________；当 $m=n$ 时，并且 $d_1=d_2=\cdots=d_m=1$，称矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为 ____________；当 $d_1=d_2=\cdots=d_m=0$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为 ____________.

(3)设线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases}$

则它的增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}=$ ____________________，当 $b_1=b_2=\cdots=b_s=0$ 时，称为 ____________ 方程组.

(4)消元法的实质就是用矩阵的初等 ________ 变换把线性方程组对应的 ____________ 化为阶梯形矩阵，然后由对应的阶梯形方程组通过 ________ 求出方程组的解.

(5)如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换变成了矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 ________.

2. 单项选择题

(1)下面的矩阵能称为阶梯形矩阵的是 ________.

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,能与 $\boldsymbol{A}$ 等价的矩阵为________.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3)设某个线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化为阶梯形矩阵时得到 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,则原方程组的解为________.

(A) $x_1=1, x_2=1, x_3=0$　　(B) $x_1=5, x_2=5, x_3=2$

(C) $x_1=4, x_2=-1, x_3=2$　　(D) $x_1=2, x_2=-3, x_3=1$

(4)设某个线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化为阶梯形时得到 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$,则原方程组的解为________.

(A) $x_1=5, x_2=\dfrac{3}{2}, x_3=5$　　(B) $x_1=-5, x_2=-\dfrac{3}{2}, x_3=-5$

(C) $x_1=-5, x_2=-\dfrac{3}{2}, x_3=5$　(D) $x_1=5, x_2=-\dfrac{3}{2}, x_3=-5$

(5)设矩阵的等式 $\begin{bmatrix} a+d & b+c \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{bmatrix}$ 则 a 和 b 分别等于________.

(A)　$a=1, b=2$　　(B)　$a=1, b=-2$

(C)　$a=-1, b=2$　　(D)　$a=-1, b=-2$

3. 利用矩阵的初等行变换，将下列矩阵化为阶梯形矩阵.

$$i.\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad ii.\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$iii.\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad iv.\ \begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

4. 如果矩阵等式如下列所示，求出 a, b, c, d.

$$i.\ \begin{bmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$ii.\ \begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

5. 用消元法求解下列线性方程组

$$i.\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases} \qquad ii.\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$$

6. 一个盒子中有 16 个硬币（其面值分别为 1 分、5 分、10 分），总价值为 9 角，并且已知其中 1 分的个数与 5 分的个数相等，求盒子中各个面值的硬币分别为多少个？

7. 某市有三个蔬菜生产基地，要供应四个市场的蔬菜，每天运送情况如下表所示：

吨数 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	5	4
A_2	2	3	1	0
A_3	4	1	5	2