弹性动力学基础

程祖依 编

中国地质大学出版社

弹性动力学基础

程祖依 编

中国地质大学出版社

内 容 提 要

本书采用循序渐进的方法，全面系统地介绍了弹性动力学基础的内容。具体分两大篇：第一篇包括固体力学的基本概念、平面应力状态和应变状态分析等两章；第二篇包括弹性动力学引论、应力分析、位移和应变分析、应力与应变关系、弹性动力学问题的建立、无限弹性介质中的弹性波、平面波的反射与透射、面波等八章。每章开头都简洁地介绍了主要内容。

本书可作为勘查地球物理专业本科生的教材，也可供有关专业师生和物探工作者参考。

弹性动力学基础

程祖依 编

责任编辑 吕继军 成金华

中国地质大学出版社出版发行

(武汉市 喻家山)

中国地质大学出版社印刷厂印刷(照排胶印)

*

开本 787×1092 1/32 印张 9.75 字数 217 千字

1989 年 7 月第 1 版 1989 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—1000 册

ISBN 7-5625-0324-9/O·16

定价： 2.35 元

前　言

本书是为勘查地球物理专业本科生编写的专业基础课教材之一。其内容分两大部分:

第一篇——固体力学的基本知识。主要建立固体力学中的两个基本物理量：应力和应变的概念，同时对应力状态和应变状态作初步分析。

第二篇——弹性动力学。主要阐述弹性力学的基本理论。其中第一章是绪言；第二章和第三章是在第一篇的基础上分别对应力和应变作深入的分析；第四章是建立应力和应变的关系；第五章是在总结前三章基本结果的基础上，说明弹性动力学问题的提法，并建立了解决弹性动力学问题的拉梅方程，即以位移表示的运动微分方程；第六章至第八章分别阐述弹性波理论中的几个基本问题，即无限弹性介质中的弹性波、平面波的反射与透射以及面波。

本书经五次教学实践后修改和充实而成，全书由浅入深、由简到繁全面系统地介绍了弹性动力学基础的内容。它不仅对有关专业师生适用，而且是广大物探工作者自学弹性动力学的一本较理想的参考书。

中国地质大学黄延祜副教授，认真细致地审阅了全书，并提出了宝贵的意见和建议，在此谨表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，缺点和错误在所难免，恳请有关专家和读者批评指正。

编者

1989 年 6 月

序　言

弹性动力学基础是勘查地球物理专业的专业基础课之一。它与地震勘探的理论存在着密切的联系。

在地震勘探出现以来的很长时期内，主要是用地震波运动学（即几何地震学）的原理，进行资料的处理与解释，而地震波动力学在较长时期则主要起着理论指导作用。但是，七十年代以来，一方面石油需求的急剧增加，要求地震勘探在寻找各种复杂油气藏和直接找油方面发挥更大作用；另一方面，地震勘探方法有了重大进展，采用了数字记录和大型计算机处理等技术，地震资料的各种信息可以得到利用。这就使地震波动力学理论直接用于资料的处理与解释成为必须的事情。地震波动力学理论的具体应用，在七十年代以来有了突出的进展，并日益显示出它在地震勘探中的重要性。

通常情况下，可以把岩石近似地看成是弹性体（弹性固体），把地震波看成在岩石中传播的弹性波。弹性波的问题，就是弹性动力学基本理论所要解决的问题。这正是本书的主要内容。因此，本书是为学习地震波动力学和地震勘探奠定基础的。

目　　录

第一篇　固体力学的基本知识

弹性力学是固体力学中很重要的一个分支．在这里，先介绍固体力学的基本知识，目的是为读者学好弹性力学打下基础．

固体力学是从宏观观点研究固体在外力作用下的力学响应的科学．它主要研究固体由于受外力作用所引起的内力、变形和与变形有直接关系的位移的分布及其随时间变化的规律．研究材料的力学性质，特别是受力与变形的关系．

第一章　固体力学的基本概念

本章建立应力和应变的概念，同时通过对简单试验结果的分析反映固体的某些性质，最后再进一步引进应变能的概念．

§1-1-1　外力、内力及截面法

作用于物体上的外力按其分布情况的不同而分为体积力和表面力，简称为体力和面力．

1. 体力

分布在物体体积内的外力，称为体力．例如重力、惯性力和电磁力等等．物体内各点所受的体力，一般是不相同

的。为了表明该物体在某一点 P 所受体力的大小和方向，我们在此点周围包含 P 点取微小体积元素 ΔV（图 1-1-1a），设作用于 ΔV 的外力为$\Delta\vec{Q}$，则在 ΔV 上的平均体力为$\Delta\vec{Q}/\Delta V$。如将 ΔV 不断地减小，则$\Delta\vec{Q}$和$\Delta\vec{Q}/\Delta V$都将不断地改变其大小、方向和作用点。随着 ΔV 的逐渐减小，分布于 ΔV 内的力也逐渐均匀。假定体力为连续分布，当 ΔV 趋近于零（P 点）时，则$\Delta\vec{Q}/\Delta V$将趋于一定的极限 $\vec{f}$，即

$$\vec{f}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta V}=\frac{d\vec{Q}}{dV} \qquad (1-1-1)$$

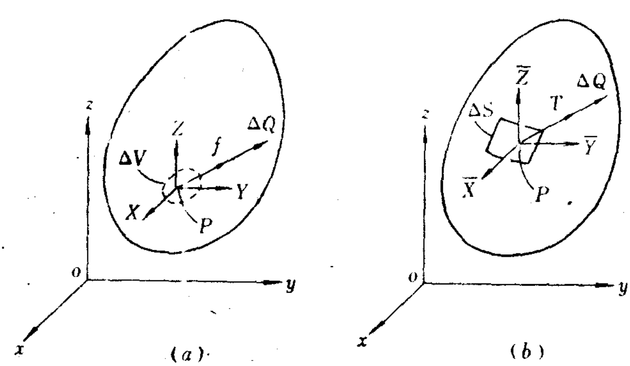

图 1-1-1

这个极限矢量$\vec{f}$，就是物体在 P 点的体力。因为 ΔV 是标量，故$\vec{f}$的方向就是$\Delta\vec{Q}$的极限方向。矢量$\vec{f}$在坐标轴 x、y、z 上的投影 f_x、f_y、f_z，称为该物体在 P 点的体力分量，

并以与坐标轴正方向一致者为正，相反者为负．体力的量纲为[力]·[长度]$^{-3}$，在国际单位制中，其单位为牛顿／立方米(N／m^3)．

若用作用于物体单位质量元素上的力$\vec{F}(X、Y、Z)$来表示体力，则因

$$\vec{F}=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta m}=\frac{d\vec{Q}}{dm}=\frac{d\vec{Q}}{\rho dV}$$

故

$$\vec{f}=\rho\vec{F}=\rho(X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}) \qquad (1-1-1a)$$

式中：ρ 表示物体的密度；X、Y、Z 为$\vec{F}$在坐标轴上的投影；$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$为沿坐标轴正向的单位矢量．

在弹性动力学中常用式(1-1-1a)来表示体力．

2. 面力

分布在物体表面上的外力，称为面力．例如风力、流体压力、土压力和接触力等等．物体表面上各点所受的面力，一般也是不同的．为了表明该物体在其表面上某一点 P 所受面力的大小和方向，可以仿照对体力的分析，围绕 P 点取微小面积元素 ΔS(图 1-1-1b)．设作用于 ΔS 的外力为 $\Delta\vec{Q}$，则在 ΔS 上的平均面力为$\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta S}$。与上相似．假定面力为连续分布，当 ΔS 趋近于零(P 点)时，则$\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta S}$将趋于一定的极限$\vec{T}$，即

$$\vec{T}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta S}=\frac{d\vec{Q}}{dS} \qquad (1-1-2)$$

这个极限矢量$\vec{T}$就是物体在 P 点的面力。同样，因为 ΔS 是标量，故$\vec{T}$的方向就是$\Delta\vec{Q}$的极限方向．矢量$\vec{T}$在坐标轴 x、

y、z 上的投影 T_x、T_y、T_z，称为该物体在 P 点的面力分量，并以与坐标轴正方向一致者为正，相反者为负。面力的量纲为[力][长度]$^{-2}$，在国际单位制中，其单位为牛顿／平方米(N／m^2)，称为帕斯卡(Pascal)，简称帕(Pa)。

物体受了外力的作用将发生变形，其内部各部分之间将因相对位置改变而引起相互作用，这种作用就是内力。大家知道，即使不受外力，物体的各质点之间，依然存在着相互作用的力。因此，固体力学中的内力，是指在外力作用下，上述相互作用力的变化量，换言之，是指物体内部各部分之间因外力而引起的附加相互作用力，即"附加内力"。这样，在固体力学中，内力是依外力与变形而存在的。

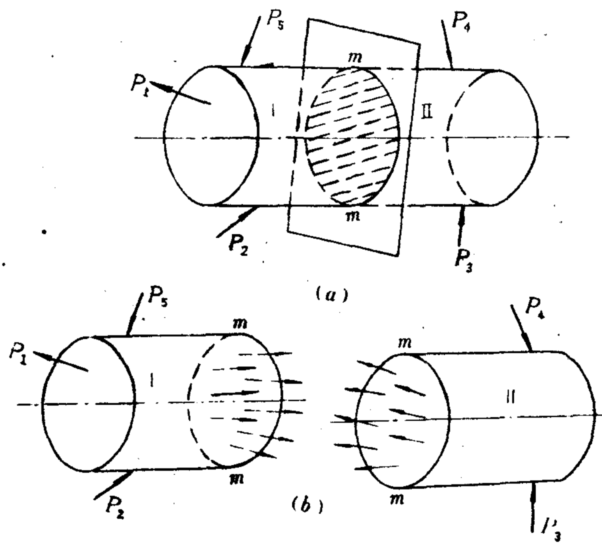

图 1-1-2

为了显示出物体在外力作用下 $m-m$ 截面上的内力，假想用经过 $m-m$ 截面的一个平面把物体分成Ⅰ、Ⅱ两部分(图 1-1-2a)．任取其中一部分，例如Ⅱ，作为研究对象．在部分Ⅱ上作用的外力有$\vec{P}_3$和$\vec{P}_4$，欲使Ⅱ保持平衡（设原物体是平衡的），则Ⅰ必须有力作用于Ⅱ的 $m-m$ 截面上，以与Ⅱ所受的外力平衡，如图 1-1-2b 所示．根据作用力与反作用力定律可知，Ⅱ必然以大小相等，方向相反的力作用于Ⅰ上．上述Ⅰ和Ⅱ之间相互作用的力就是该物体在 $m-m$ 截面上的内力．假定物体是连续的，则在 $m-m$ 截面上各处都有内力的作用，因此，内力是连续分布于截面上的一个分布力系．这个分布力系在截面上某一点简化后得到的主矢和主矩，称为截面上的内力．

对部分Ⅱ来说，外力$\vec{P}_3$、$\vec{P}_4$和 $m-m$ 截面上的内力平衡，根据平衡条件就可以确定 $m-m$ 截面上的内力．

上述用截面假想地把物体分成两部分，以显示并确定内力的方法称为截面法．具体地说，可将其总结为以下三个步骤：

(1) 截开：在需要求内力的截面处，用截面假想地将物体分成两部分；

(2) 代替：移去一部分，保留一部分，并用截开面上的内力代替移去部分对保留部分的作用；

(3) 平衡：建立保留部分的平衡方程，由已知外力求内力．

§1-1-2 应 力

1. 应力的概念

一般说来，内力在截面上是非均匀分布的．因此，还要进一步研究截面上各点的内力，但内力还不能说明其在截面内某一点处的强弱程度，所以，我们又引入应力的概念．设在图 1-1-2 所示受力物体的 $m-m$ 截面上，围绕 C 点 取微小面积元素 ΔS(图 1-1-3a)，ΔS 上的内力为$\Delta\vec{Q}$．于 是在 ΔS 上内力的分布集度，即平均应力，为$\Delta\vec{Q}/\Delta S$．内力在截面上是连续分布的，当 ΔS 趋近于零(C'点)时，$\Delta\vec{Q}/\Delta S$ 将趋于一定的极限$\vec{P}_N$，即

$$\vec{P}_N=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta S}=\frac{d\vec{Q}}{dS} \qquad (1-1-3)$$

这个极限矢量$\vec{P}_N$就是物体在截面 $m-m$ 上 C 点的应力，它反映在所取截面上 C 点处内力的集度．式中下标 N 表示面积元素 dS 的外法线的方向．

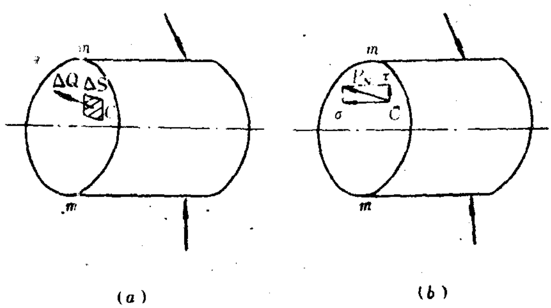

图 1-1-3

由此可见，物体在某截面上一点的应力是矢量．这个矢量，一般说既不与截面垂直，也不与截面相切，通常把它分解为垂直于截面的分量 σ 和切于截面的分量 τ(图 1-1-3b)．

σ 称为正应力，τ 称为剪应力。

显然，应力的量纲与面力相同。在国际单位制中，常用的单位是牛顿／米^2(N／m^2)，即帕(Pa)。因其值太小，工程上常用它的 10^6 倍，称为兆帕(MPa)。

2. 直杆轴向拉(压)时的应力

如果所研究的物体，其长度远大于横截面的尺寸，这类物体称为杆件，简称为杆。轴线(横截面形心的联线)为直线的杆称为直杆。横截面大小和形状不变的直杆，称为等直杆。

大家知道，如果直杆两端受大小相等，方向相反的两个力，其作用线通过轴线，则此杆将产生伸长(或缩短)的现象，称为轴向拉伸(或压缩)，简称为轴向拉(压)。这类杆件称为拉(压)杆。

进一步分析可知，承受两个以上轴向外力的直杆，仍属于拉(压)杆，称为多力杆。

为了研究直杆轴向拉(压)时的应力，首先应分析其内力。为此，取一拉杆(图 1-1-4a)，用截面法求其任一横截面 m-m 上的内力。

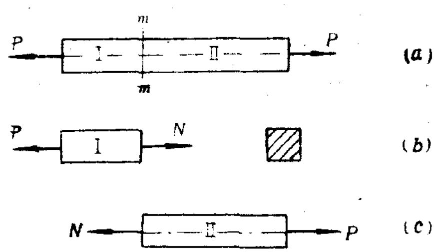

图 1-1-4

如图 1-1-4，在 $m-m$ 截面处将拉杆假想地截开，分成Ⅰ和Ⅱ两部分．设其截面上的内力为$\overline{N}$，则不论以Ⅰ为研究对象，或以Ⅱ为研究对象，由平衡条件

$$\sum F_x = 0$$

得

$$N = P$$

内力$\overline{N}$作用在轴线上，故称为轴力．由于左、右截面上的内力指向相反，而它们的性质是相同的，所以对它的符号作这样规定：当轴力$\overline{N}$的指向与截面的外法线同向时，为拉力，用“+”表示，反之为压力，用“−”表示，图 1-1-4 Ⅰ、Ⅱ两部分截面上的$\overline{N}$都是外法线方向，都为拉力(虽指向相反，但内力性质相同)．

现在进一步分析此拉杆横截面上的应力．由于前述的内力(轴力)是截面上分布内力的合力，它还不能说明截面上内力的分布或集中程度．考虑到拉杆在外力作用下不仅产生内力，同时还引起变形，而且，内力和变形总是相互关连的，变形可从试验直接观察到，因此，可以从研究变形入手，来确定应力．

观察拉杆的变形．图 1-1-5a 为一等直杆．实验前，在杆的表面等间距地画上与杆轴平行的纵线和与杆轴垂直的横线，形成一系列正方形网格．之后，在杆两端作用一对大小相等、方向相反的轴向拉力$\overline{P}$．从实验中看到(图 1-1-5b)，各纵、横线仍为直线，并分别平行和垂直于杆轴，但横线间的距离增加，纵线间的距离减少，所有的正方形网格均变成大小相同的长方形．

根据上述现象，对杆内的变形可假设：变形后，横截面仍保持平面，且仍垂直于杆轴；各横截面沿杆轴作相对平移．此即通常所谓的平面假设．由这一假设可以推断，拉杆

034-117C1

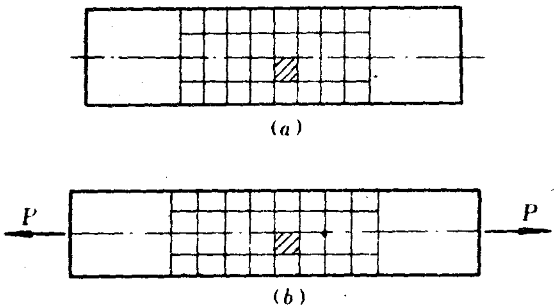

图 1-1-5

所有纵向纤维的伸长相等。此外，还可以认为材料是均匀的，各纵向纤维的性质相同，因而其受力也就一样。

由此可见，拉杆横截面上各点处的应力大小相等，其方向则均垂直于横截面(图 1-1-6)，即在横截面上只有均匀分布的正应力。

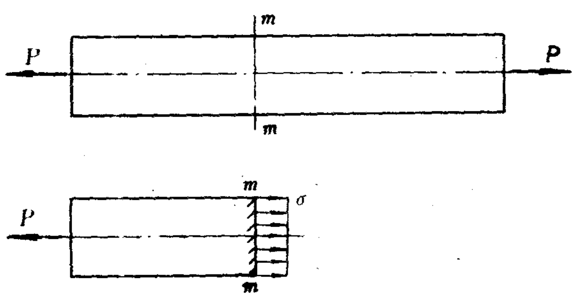

图 1-1-6