序

居今日而欲致國家於富強之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦為國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久為識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，為邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已為數不貲。前歲之多，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以迻譯刋行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢承，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋淼、李煥燊、南登岐、孫廣年（物理學總執筆人）、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鐘恩寵、關德懋（以姓氏筆劃為序）諸君分任迻譯，復承臺灣新生報謝總社長然之、王社長嘯生及顏副總經理伯勤慨允由該社擔任印刷及發行工作，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則為慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實為元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。玆值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

湯元吉序於臺北

---

* 該中心為一不以營利為目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事為李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄧望厚、湯元吉等九人。

3n4e2 1-7

編 輯 要 旨

一・本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二・本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三・本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之敎師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四・原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種敎學措施，學生於作成論文後，校方尙需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五・本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六・本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七・本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，敎育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尙冀海內專家學者不吝賜敎。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尙祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指敎，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第二十二册目錄

上 册　微積分學

頁數

下 册　解析幾何學

上册　微積分學

I.　面積的計算

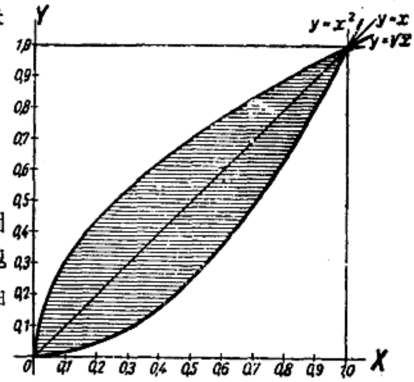
α) 直角坐標系中平面曲線之求積法　353

讀者諸君請再溫習一下我們在第十八册〔230〕節及第十九册〔254〕節對於直角坐標系中平面曲線求積法所講的一切！現在只補充幾個習題，對讀者决無多大困難發生：

習　題：

1) 試解算 $\int_0^x \sqrt{x}\,dx$！

2) 試求〔353a〕圖中畫有平行陰影線的那塊面積之大小（此面積是由曲線 $y=x^2$ 及 $y=\sqrt{x}$ 所圍成的）。



353 a

3) 設已知 $\int y'dx=\int[(x-1)^2-1]dx$

a. 試求此積分！

b. 試計算介於 y' 曲線與 X 軸中間的面積，其右側之極限是：

α)　$x_0=-1$；　$x=\ \ 0$；

β)　$x_0=\ \ 0$；　$x=+2$；

γ)　$x_0=+2$；　$x=+3$；

δ)　$x_0=-1$；　$x=+3$。

c. 試描繪 y' 曲線！

d. 如將 X 軸向下移動一格，則 y' 曲線之方程式如何列法？

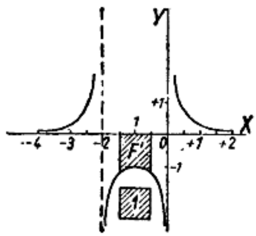
此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook

e. 試以 *b.* 項規定之界限求出新曲線的定積分！

f. 將 *b.* 項所得結果與 *e.* 項所得者作一比較！

4）我們共同來研究下面比較困難一點的求積法：

設已知直角坐標系中一條曲線為 $y'=\frac{1}{2x}-\frac{1}{4+2x}$，求其積分 $\int_{-1.5}^{-0.5} y'dx$！



353 b

為便於觀察起見，我們首先將曲線的圖形描繪出來（參看〔353 *b*〕圖）。下面方程式的變形，對於必不可缺之曲線點的計算，乃是一種簡化手續：

$$\frac{1}{2x}-\frac{1}{4+2x}=\frac{4+2x-2x}{2x\cdot(4+2x)}$$

$$=\frac{4}{4x(2+x)}=\frac{1}{x\cdot(2+x)}$$

若干曲線點的計算表：

x	-4	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1$	$+2$
y'	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{4}{5}$	$\pm\infty$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	$\mp\infty$	$+\frac{4}{5}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{8}$

我們先進行一般的計算 $\int y'dx$（沒有極限）：

$$\int\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{4+2x}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2+x}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2+x}$$

（參看第二十冊中之〔298〕及〔299〕二節）

$$=\frac{1}{2}\{ln\,x-ln(2+x)\}+c=\frac{1}{2}\cdot ln\frac{x}{2+x}+c;$$

根據第六冊中之〔568〕節，商數之對數可由被除數的對數減去除數的對數求之。此定理對於逆運算或自然對數均可適用。

今則在規定界限內求上式之積分：

$$\frac{1}{2}\int_{-1.5}^{-0.5}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2+x}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot ln\,\frac{x}{2+x}\Bigg|_{-1.5}^{-0.5}$$

$$=\frac{1}{2}\{ln\left(-\frac{1}{3}\right)-ln(-3)\}=\frac{1}{2}\,ln\frac{-{}^{1}/_{3}}{-3}=\frac{1}{2}ln\left(+\frac{1}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(ln1-ln9)=\frac{1}{2}(0-ln9)=-\frac{1}{2}ln9=-\frac{1}{2}ln\ 3^{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2ln\ 3=-ln\ 3$$

上式結果前面有一負號，這表示所求面積乃在 X 軸之下首。

由此可見 F' 面積的標準數是和 3 的自然對數完全相符，即 $ln3$ 大概等於“1.10”，只前號不同而已。（參看第二十册之〔295〕節！）讀者由上面〔353*b*〕圖中所附繪之小塊正方形（其邊長乃與坐標系的一個單位分劃相等），當可看出這一答案至少是接近正確的。

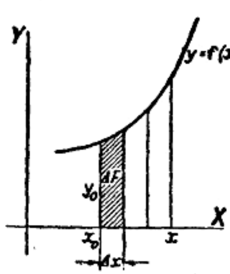
β) 極坐標系中平面曲線之求積法 354

讀者諸君最好自己證實一下，對於第十八册有關積分法所講述的一切究竟有沒有完全了解？此外對於第十八册中之〔237〕節也得努力加以研讀，假如各位還沒有來得及研讀的話。再則第十三册〔34〕至〔35〕節及第十四册〔62〕至〔63〕節的內容，各位也要隨時想得起來才行。

前　言：

我們早先對於積分號後面的函數，因爲把它視作由 y 導引而來，並且因爲編者想隨時提醒讀者這一聯帶關係之故，所以都是以 y' 來表示的。到了現在，這種回憶似乎已無必要，因此，我們要把 y 右上方的一點去掉，也不再用 F'，却改用 F 表示由積分來決定的面積了。

我們先來溫習一下**直角坐標系**中有關平面曲線求積法的思路，並且把它略爲修改一下，以便易於理解極坐標系中之求積方法。



354 a

設有一曲線係由正待決定的基本曲線導引而來（參看第十四册中之〔59〕節）；但如剛才所說的，現在是以 $y=f(x)$ 表示之。我們所須計算的面積 F 係介於 y 曲線與 X 軸之間，其兩側乃以 y 曲線的兩條縱坐標爲界，一條是屬於 x_0，另一條是屬於 x。

我們先拿 F 和部份面積之和作一比較。這些部份面積的形狀都近似於 $y\cdot\Delta x$，所以莫不具有狹窄**長方形**的形狀；並且 Δx 愈小，愈

是如此。在〔354a〕圖中居於最左邊的那一部分面積

$$\Delta F \approx y_0 \cdot \Delta x$$

係用平行陰影線使之特別顯示出來。我們將 Δx 選擇的愈小，則介於 x_0 與 x 之間的長方形之和 $\left(\sum_{x_0}^{x} y \cdot \Delta x\right)$ 必將愈接近於精確值 F，終至趨向於極限值：

$$F = \int_{x_0}^{x} y\, dx,$$

此極限值可按積分公式還原於微分的基本函數 $g(x)$，我們對此函數則求其縱標之差（參看〔354a〕圖）：

$$g(x) - g(x_0);$$

又此差之量度數乃與面積 F 的量度數相等（參看第十八册中之〔220〕至〔228〕各節）。

我們可將此一早已熟習的思路簡單綜合如下：

$$F = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_0}^{x} y \cdot \Delta x = \int_{x_0}^{x} y\ dx = g(x) - g(x_0)$$

在此方程式內並無一處有部份面積 $\Delta F \approx y \cdot \Delta x$ 出現（我們原來是拿它做出發點的）。我們現在要把這種情形改變一下，以便獲得一個新的求面積的重要公式：

由於 $\Delta F \approx y \cdot \Delta x$ 經過簡單的變形可得：

$$y \approx \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

此一近似方程式中所包含的聯帶關係，我們也可在〔354a〕圖中很容易的讀出，假如我們想起“長方形除以短邊等於長邊”那個方程式的話。現將對 y 求得之值代入 F 公式，則得：

$$F = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_0}^{x} \frac{\Delta F}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

因爲 $\frac{\Delta F}{\Delta x} \cdot \Delta x = \Delta F$，故由此方程式顯然可以看出，總面積$F$乃與其組成分子之部份面積之和相等。經過如此變形，我們却獲得一點新的東西，即：當進而求極限值 ($\Delta x \to 0$) 之時，我們可得：

$$\boxed{F \Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{dF}{dx}\, dx}$$

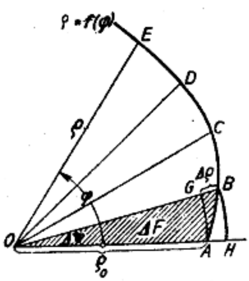
在此公式內出現了$\frac{dF}{dx}$，那是函數F的微分係數，乃依 x 來微分的。

嚴格言之，這種形式也非根本新奇之物。 蓋其中只隱藏着定積分之定義的方程式

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{dx}dx=y\Big|_{x_0}^{x}$$

乃對任何一個是 x 的連續函數之 y 值都可適用的；假如 Δx 趨近於零時(即 $\Delta x\rightarrow 0$)，則 y 之極限值亦必等於零。假如 F 也是 x 的連續函數，而 ΔF 與 Δx 一齊趨向極限值時，那末我們儘可以 F 代替那個本身無所謂的名稱 y。因爲 F 既然是如此情形（F 是代表曲線下方與 x 有關的面積)，故必須對 y 換一名稱，然後才能獲得求 F 之另一方程式。

現在，我們要來**研究極坐標系的面積計算法**了。在前節引導我們獲得 355
新 F 公式的思路，本質上也適用於極坐標系中各種面積之計算；不過我們**必須注意一點，即在這種情形下，獨立變數不復叫做 x，**也不再代表橫標(即長度)的量度數，却叫做好比φ，而係代表可變角的量度數；此外，我們還要注意的，就是面積 F 不能再和部份長方形作比較（這些長方形是由橫標與縱標所決定的)，却可和那些含有角、半徑矢量、及有限曲線 $\rho=f(\varphi)$ 等特徵的面積作比較，所以決不再是長方形了。



355 a

我們現在根據〔355a〕圖來研究極坐標系中所有 F 面積的大小，這些面積是以原始射線 $\rho_0=OA$ 與任何一條終端射線 $\rho=OE$ 以及曲線 $\rho=f(\varphi)$ 爲界限的。F 的大小是與任意假定的 φ 角和曲線的種類有關，意即這種聯帶關係有其一定的定律，依此定律可使矢徑(*Radiusvektor*) ρ 與 φ 角互有關聯，而 φ 角是以“弳”爲單位量出來的。

我們設想那塊面積 $F=O\widehat{AE}O$ 是如此形成的，即自轉射線 ρ 乃一跳一跳地由零位 OA，好比依 $\Delta\varphi=\frac{1}{4}$（意即依四分之一弳）向左移動的，而射線之長度乃決定於已知函數 $\rho=f(\varphi)$ 這一定律。及至轉到 OE 的位置，φ 角好比正好等于整數“1”(弳）。

我們先觀察一下那塊用平行陰影線表示的屬於 $\Delta\varphi$ 等於四分之一（弳）的部份面積 $O\widehat{AB}O=\Delta F$。那塊面積究有多大？我們一時無法回答，因爲其形狀是我們前所未聞的。爲了使之變成大家熟知的形狀，我們各以 O 爲中心 OA 爲半徑畫一圓弧 $\widehat{AG}$，又以 OB 爲半徑畫一圓弧 $\widehat{BH}$。由此形

成的兩個面積 $\widehat{OAGO}$ 與 $\widehat{OHBO}$，其形狀是我們認識的；它們是扇形，其大小可按第十四册〔69〕節求之：

$$\widehat{OAGO}=\frac{\Delta\varphi\cdot\rho^2}{2}\;;\quad \widehat{OHBO}=\frac{\Delta\varphi(\rho+\Delta\rho)^2}{2}\;;$$

ΔF 係介於此二值之間。設將 ΔF 的量度數和兩個扇形的量度數，分別除以 $\Delta\varphi$，則所得增量比 $\frac{\Delta F}{\Delta\varphi}$ 乃介於 $\frac{\Delta\varphi\cdot\rho^2}{2\Delta\varphi}=\frac{\rho^2}{2}$ 及 $\frac{\Delta\varphi\cdot(\rho+\Delta\rho)^2}{2\Delta\varphi}=\frac{(\rho+\Delta\rho)^2}{2}$ 之間。我們現在如讓 $\Delta\varphi$ 趨向於極限值 0（讀者自己可在〔355a〕圖上弄個明白），則增量比 $\frac{\Delta F}{\Delta\varphi}$ 必逐漸接近於微分係數 $\frac{dF}{d\varphi}$；增量比係位於兩個極限的中間，其下極限 $\frac{\rho^2}{2}$ 在此雖不致變動；但其上極限 $\frac{(\rho+\Delta\rho)^2}{2}$ 則愈來愈接近於下極限。（縱使 $\Delta\varphi$ 有時由于其他曲線形態會變成負數，結果也是如此。）由於 $\lim\Delta\varphi\to 0$，同時 ΔF 也就趨向於零；於是我們遂得到具有極限值性質之重要商數：

$$\frac{dF}{d\varphi}=\frac{1}{2}\rho^2$$

但這是函數 F 的微分係數，可依 φ 角進行微分，而不是函數 $\rho=f(\varphi)$ 的微分係數。

至此我們再擴大觀察及於整塊 F 的面積 $=\widehat{OAEO}$。這個面積是由許多部份面積組合而成，而部份面積之產生，則由 φ 角之分割促成；最簡單是將其分成相等部份，好比每一部份之大小爲 $\Delta\varphi=\frac{1}{4}$（denoted 徑）。對於這些彼此相等的部份面積，上文用於第一部份面積的思路皆可適用，在此恕不複述。（但我們建議讀者諸君，不妨從頭到尾自己再做一遍）。

我們所選擇之 $\Delta\varphi$ 愈小，則部份面積的數目愈多，而其界限也越來越窄。就極限情形 $\Delta\varphi\to 0$ 而言，所有部份面積之和遂將被下列積分式取而代之：

$$\boxed{F=\int_{\varphi=0}^{\varphi}\frac{dF}{d\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi}\rho^2 d\varphi}$$

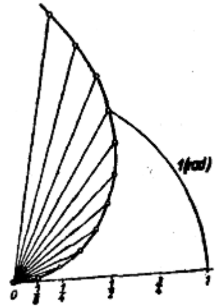
應用題：

1）對於一個中心與極坐標原點重合的圓形，由于 $\rho=r$ 之故，所以 ρ 是一個常數。因此，介於 $\varphi=0$ 及 $\varphi=2\pi$（$=360°$）之間而被圓曲線所包圍的面積爲：

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho^2 d\varphi=\frac{1}{2}r^2\cdot\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}=\frac{r^2}{2}(2\pi-0)=\pi r^2$$

這並不是一個令人驚奇的結果！

2）設有曲線 $\rho=\varphi$。試求此曲線所屬之幾個點，以便約略獲知其形狀！計算方法非常簡單：任何矢徑的量度數莫不與其所屬角的量度數相等，如果此角是用1 弳量過的話。矢徑所用的量度單位已在原始射線上予以註明。屬於 $\sphericalangle\varphi=1$（弳）$=57.3°$ 者是量度數等於"1"的矢徑。屬於 $\sphericalangle\varphi=\frac{1}{2}$（弳）者則爲 $\rho=\frac{1}{2}$；餘類推。

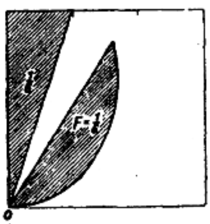


355 b

依此定律形成的螺狀線叫做：

阿基米得螺線。

我們現在來計算一個面積 F，它是由任何一條終端射線及曲線所限定的：



355 c

$$F=\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi}\rho^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\varphi}\varphi^2 d\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{\varphi}$$

對於特殊情形 $\sphericalangle\varphi=1$（弳）$\approx57.3°$，我們計算如下：

$$F=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{6}$$

在〔355c〕圖中我們特別將此面積畫的顯著一點，並且畫在一個正方形之內；這個正方形之邊長係與原始射線的量度單位相等，故其面積量度數是等於"1"。玆特採用簡單的作圖法（參看第七册中之〔733〕節），將正方形的六分之一分割成爲三角形，以便讀者作一比較。

習 題：

試以與上述相同的方式計算被螺線 $\rho=\varphi/_2$ 所限定的面積；此面積位於360 度的範圍以內，所以是由自轉射線 ρ 做了一次完整的旋轉所形成的。讀者最好用毫米方格紙畫出曲線圖，然後就根據這個圖形證明各位的計算結果是不是對的。至於半徑矢量的量度單位讀者可假定爲 $1cm$。

γ）旋轉體之表面 356

我們假定各位對于第十一册〔924〕節中關於旋轉體所述，尤

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

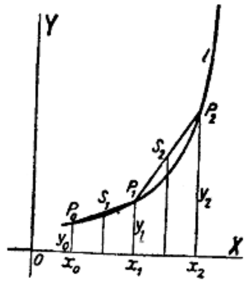
其關於**古爾丁**（*Guldin*）**定理**均已熟習：

"若屬於平面 E 的一條線繞着同一平面內的 g 軸旋轉，則所產生的旋轉面 O 等於產生線（或稱母線）l 與其重心旋轉一次時所經路程 $2\pi\rho$ 之乘積。"

以方程式表之，則為：

$$\boxed{O=2\pi\cdot\rho\cdot l}$$

倘將此公式翻譯成微積分計算所用的文字，便是：設旋轉軸為一直角坐標系之 X 軸（看〔356a〕圖），又產生線 l 是彎曲的線段 P_0P_2。我們先以曲折線段 $P_0P_1P_2$ 代之。P_0P_1 之長我們已在第二十一册〔339〕節中計算過了：



356 a

$$P_0P_1=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$$

此線段的重心 S_1 與旋轉軸（即 X 軸）相距為 $\rho=0.5(y_0+y_1)$。因此，由 P_0P_1 所產生的旋轉體（請讀者自行想像它是一個怎樣的東西！），其表面 O_1 之大小應為：

$$O_1=2\pi\cdot\frac{y_0+y_1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$$

同理，由 P_1P_2 所產生旋轉體的表面 O_2 應為：

$$O_2=2\pi\cdot\frac{y_1+y_2}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$$

是則由曲折線段 $P_0P_1P_2$ 所產生之旋轉體的表面乃等於 O_1+O_2 之和。

我們現在如使 Δx 越來越小，那末到了 $\Delta x=0$ 之時，即會發生極限問題。在此情形下，和數 $\sum=O_1+O_2+O_3+\cdots\cdots$ 會不會發生變動呢？答案是：

第一：由於有限被加數所組成的和數$\sum$將變成一個積分，後者乃是被加數趨於"無限大"的一種總數：此種到達極限值的過

程，一般係以積分號表示之（即將 Δx 改書爲 dx 之意）。

第二：以和數之半出現于和數公式中的那兩個縱標（例如 $\frac{y_0+y_1}{2}$ 中之 y_0 及 y_1），其差別將愈來愈小，如果 Δx 愈變愈小的話。又 Δx 如果愈變愈小，那末當 $\frac{y_0+y_1}{2}=\frac{2y}{2}=y$ 之時（y 在此是表示 y_0 與 y_1 二坐標的中數），誤差亦將愈變愈微不足道。及至到了極限情形 $\Delta x=0$，誤差簡直就等於零了。這種情形適用於**每一**線段 P_0P_1，P_1P_2……，故亦適用於整個線段。假如此後在求旋轉體表面的公式中以字母 y 寫在積分號的後面，那末這個 y 乃係用以代表整個線段所有點的縱標。讀者務必弄個明白：最好請用一支鉛筆在曲線上面描繪過去，並且一面描畫，一面想像當這種動作從一點到另一點繼續下去之時，各該點的縱標究竟是怎樣的在變動，至少它們的位置及其長度是不是發生了變化，除了與 X 軸平行的曲線部份不予計較之外。

第三：增量比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 將變爲微分係數 $\frac{dy}{dx}$。因此乃得：

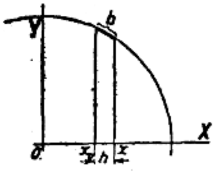
計算旋轉體表面的公式：

$$\boxed{O=2\pi\int_{x_0}^{x}y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}$$

此時應請讀者注意下列各點：$y=f(x)$ 是平面曲線的已知方程式，而母線祇是這條曲線的一段而已。此曲線起初位於直角坐標系的平面之內，然後則隨着這個平面環繞 X 軸完成一次（僅此一次）的全轉，參看第十一册〔924〕節！對於表面的計算只有一段曲線是用得着的，那是位於與 x_0 及另一 x 有關的兩個縱標之間的一段曲線；因此我們在任何情形下，都得拿**定積分**來計算。

應用例題：

設產生曲線是圓的一部份，而這個圓在直角坐標系中的中心方程式爲已知。在第二十一册〔339〕節中，我們曾經計算過這個圓的一段弧線 b 之長：



356 b

$$b=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\int_{x_0}^{x}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

試求一個**球帶的面積**；參照〔356*b*〕圖！假定這個球帶的高（或厚）$h=x-x_0$，按求圓的方程式 $y=\sqrt{r^2-x^2}$，我們可得：

$$O=2\pi\int_{x_0}^{x}y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\pi\int_{x_0}^{x}y\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

$$=2\pi\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot r\,dx=2\pi\int_{x_0}^{x}r\,dx=2\pi r\int_{x_0}^{x}dx$$

$$=2\pi r x\Big|_{x_0}^{x}=2\pi r(x-x_0)=2\pi r h$$

（參看第十一册中之〔922〕節）

習　題：

1）試就上面所擧的例題，計算旋轉體之表面面積，假如母弧線是介於 $x=-r$ 及 $x=+r$ 之間的話！

2）設有一圓，其頂點方程式爲 $y=\sqrt{2rx-x^2}$；參看第十八册中之〔233〕節！試求旋轉體之表面面積，倘若其產生曲線段是在 $x=0$ 及 $x=2r$ 之中間的話。

3）試計算一個直圓錐體的表面之面積。已知：

a. 底面圓形之半徑 r 及圓錐之高 h；

b. 半徑 r 及邊長 s。

357 δ）**面積之近似計算法**

假如我們不知其圖形爲一曲線的函數方程式，或雖知道而不能按已知規則求其積分時，那末對於曲線與 X 軸之間的面積，自然不能當作定積分來計算。但有許多其他方法，可在此種假定之下起碼算出那面積的近似值。現在簡單說明如下：

a. 用比例尺（不可太小）將面積的邊緣畫在毫米方格紙上。然後只要數一數，並且大概的估計一下，由邊緣所包圍的正方形和部份正方形，就可獲得面積的近似值。讀者應該獨立的完成這種工作。首先可拿亦能按公式計算的一塊面積做示範，好比一個圓的面積，一面計算，一面用圖上的近似方法，以便核驗所用方法有無錯誤。

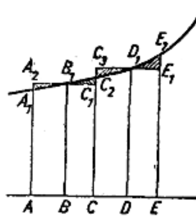
b. 將所求之面積畫在一張厚度極爲平均的厚紙上面；然後將繪有邊界的平面部份剪下來，放在精密的天秤上稱一稱。另外再由相同的厚紙剪下一塊 $100cm^2(=1dm^2)$ 的正方形，也拿來稱一稱；由此便很容易完成所求的面積決定法：假如 $1dm^2$ 的厚紙重爲 5 克，而所求之面積重爲 9 克，那末便可作一結論如下：

$$5g \triangleq 100cm^2 \quad ; \quad 1g \triangleq 20cm^2;$$

$$\therefore \quad 9g \triangleq 9 \cdot 20cm^2 = 180cm^2$$

讀者不妨依此方式自己提出一些習題，作爲練習之用。參看第七册中之〔720〕節！

c. 有好幾種近似計算面積的規則，依此規則可利用平行線將所求面積分割爲多數小面積，而這些小面積便可用近似方法來計算其大小。（我們爲積分法所畫之圖中，好多都屬於此類；雖然它們都是爲了說明計算的步驟而繪製的。）茲舉一例簡單敘述如下：〔357*a*〕圖所示應予求出之面積 $F=AEE_2A_1$，我們可用奇數平行線把它分成許多小面積，這些平行線的間隔雖是不相等的，但每一間隔的選擇，須利用目測使每兩個畫有平行陰影線的小面積彼此儘可能相等才行，例如 $A_1B_1A_2=B_1C_1C_2$。於是好比長方形 ACC_1A_2 的大小便十分接近於部份面積 ACC_2A_1（這是所求面積 F 的一部份）。——其他一切可讓讀者自行解答！



357 a

d. 此外，我們以前在第二十一册〔338〕節所述的圖解積分法亦得在此一提：等到讀者將基本曲線 $y=f(x)$ 加繪於已知 y' 曲線之後（所求面積即在 y' 曲線下方），那末位於 x_0 與 x 中間的 y 曲線，其所屬二縱標之差就等於 y' 曲線下面的面積量度數。

e. 還有一種自動計算面積的儀器，只要把它沿着所求面積的邊緣妥適地繞行一遍，便可讀出所求面積的大小。我們在此只擬告訴各位讀者，**極求積器** (*Polarplanimeter*) 就是屬於這一類的儀器，至其詳情則恕不贅述了。

凡上所述只不過想對讀者作一概略的介紹，藉供獨立進修之參考而已。

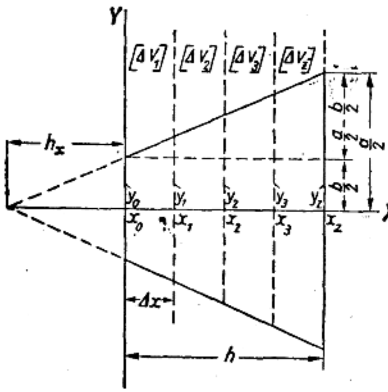
II. 體積的計算

α）立體之分層構造 358

在第十册〔898〕節我們曾經這樣計算過一個角錐的體積 V，卽曾照**卡瓦雷利**（*Cavalieri*）的方法用許多平行截面將角錐分割成爲無數的個體，而將其體積約略計算出來，然後又將其重新組合爲原有的角錐。因爲我們當時曾經故意使這些個體的厚度愈變愈小，讀者現在當可看出，我們在那時候已經依照微積分計算的本質朝着如何求積分的方向在努力了。這正是我們現在所要研究的問題，卽借助於積分公式將分層的立體重新予以組合。

a. 一個截頭正角錐之體積

〔358*a*〕圖所示爲一個截頭正角錐的平截面，其水平縱軸乃與直角坐標系的 X 軸重合爲一。截面的形成是這樣的，卽大底面之長 $a(G_1=a^2)$ 與小底面之長 $b(G_2=b^2)$ 均係按照原來大小出現。Y 軸則緊靠着小底面與 X 軸互成垂直。



358 a

我們把截頭正角錐的高 $h=x_z-x_0$ 首先分爲好比四等分：$h=4\cdot\Delta x$。假如我們經過平分點將此截頭正角錐切成平行於底面的許多平面，則該截頭正角錐的總體積 V 必將被分成大小不等的四個個體，我們定其名爲 ΔV_1，ΔV_2，ΔV_3 及 ΔV_z。這些個體的位置係用括弧號如〔ΔV_1 等〕予以標明。我們將其總體積簡單寫出如下：

$$\sum_{n=1}^{z} \Delta V_n$$

所有個體都是被截去尖頭的角錐。但我們若把 Δx 選擇的愈小，則愈可把這些個體當作角柱看待，而誤差亦愈小，參看第十册中之〔898〕節！這些角柱的厚（或高）是 Δx；其橫斷面係與其在

坐標系中的方位有關：

$$Q_1=(2y_1)^2，\cdots\cdots Q_z=(2y_z)^2$$

假如我們選擇一連串的，稍微高出於截頭角錐的角柱， 則 $V_1=Q_1\cdot\Delta x=(2y_1)^2\cdot\Delta x$，……，$V_z=Q_z\cdot\Delta x=(2y_z)^2\cdot\Delta x$。倘若 Δx 比較不大，則下式適用於截頭正角錐的總體積：

$$V\approx\sum_{n=1}^{z}(2y_n)^2\cdot\Delta x$$

假如到了極限情形 $\Delta x=0$ 時，則 y_1 會完全靠近 y_0：

$$V=\int_{n=0}^{z}(2y_n)^2dx$$

可是因爲我們不願以 y 却以 x 表示體積 V 的從屬關係〔$V=f(x)$〕，所以對於我們的例題得拿 $y=f(x)$ 來計算。在〔358a〕圖中讀者可以看出一種比例定理的圖形（參看第八册中之〔784〕節），而在角柱的內部很容易讀出每一條縱標的大小：

$$y_n:(x_n+h_x)=\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right):h$$

h_x 是**補充角錐**之高（參看第十册中之〔899〕節），當計算**截頭角錐**時它是一個未知數。因此，我們用以表示 h_x 之大小者，都是一些在截頭角錐上易於量得的數值：

$$(h_x+h):h_x=a:b$$

讀者自己諒可設法予以變形；經過變形之後卽得：

$$h_x=\frac{b\cdot h}{a-b}$$

如將上式對 h_x 求得之值代入 y_n 方程式，則得：

$$y_n:\left(x_n+\frac{b\cdot h}{a-b}\right)=\frac{a-b}{2}:h;$$

$$\text{或}：y_n=\frac{\frac{a-b}{2}\cdot\left(x_n+\frac{b\cdot h}{a-b}\right)}{h}=\frac{(a-b)\cdot x_n}{2h}+\frac{b}{2};$$

$$(2y_n)^2=\left\{\frac{a-b}{h}\cdot x_n+b\right\}^2=\frac{(a-b)^2\cdot x_n^2}{h^2}+\frac{2b(a-b)\cdot x_n}{h}+b^2$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com