21 世纪高等院校教材(经济、管理类)

# 大 学 数 学

## (微积分部分)

姚天行 孔 敏
滕利邦 朱乃谦 编

科 学 出 版 社
2002

## 内 容 简 介

本书是一套经济管理类各专业适用的数学基础(包括微积分、线性代数和概率论与数理统计三大部分)教材中的微积分部分,内容覆盖了教育部颁布的"全国工学、经济学硕士研究生入学考试《数学考试大纲》"中数学三、数学四大纲规定的全部内容.并在此基础上增加了经济管理类相关专业后续课程所需要的一些内容.本书配有具有一定难易层次,数量较大的习题.

本书强化了基础,突出了方法,结合了经济管理类的一定实际背景,丰富了时代发展需要的内涵.本书的主要部分已经过七八年的教学实践,并修改过若干次.本书叙述严谨,结构合理,深入浅出,富于启发,除适合做教材外,也可供经济管理类相关专业作为参考用书.

**图书在版编目(CIP)数据**

大学数学(微积分部分)/姚天行,孔敏,滕利邦,朱乃谦编.—北京:科学出版社,2002.8

(21世纪高等院校教材(经济、管理类))

ISBN 7-03-010716-0

Ⅰ.大… Ⅱ.①姚… ②孔… ③滕… ④朱… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第057293号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年8月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2002年8月第一次印刷 印张:24 1/2
印数:1—4 000 字数:440 000

**定价:28.00元**

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

# 前　　言

纵所周知,数学在国民经济与企业管理中有着不可替代的重要作用.作为综合性大学经济管理类的本科生应该掌握哪些数学知识?受到怎样的数学思维方法的训练?其深度又应该达到什么程度呢?一般认为,教育部近年来执行的"全国硕士研究生经济管理类入学考试大纲"(即数学三和数学四)是该专业学生学习数学的基本要求.随着经济建设的蓬勃发展和科学技术的不断进步,从事经济领域研究和教学的专家学者一致认为,为了使学生在高年级,特别是到研究生阶段能顺利地进入后继课程的学习,阅读相关文献资料,并从事经济理论的研究,还需要补充很多大纲以外的数学知识.

本教材是根据南京大学商学院各专业对数学的要求编写的,内容包括微积分、线性代数与概率统计三部分.涵盖了全国硕士研究生经济管理类入学考试大纲的全部内容.此外还增加了向量及其运算,方向导数与梯度,线性空间与线性变换,最小二乘法等内容.全部教学时间(包括习题课在内)约需 320 学时,其中微积分 180 学时.线性代数与概率统计各 70 学时.

本教材在每一节后附有一定数量的习题:习题分为 A,B 两类,其中 A 类要求学生都能掌握,B 类习题一般较为困难,供部分学生选做.书后计算题附有答案,部分证明附有解答提示.供学生参考.某些习题是近几年研究生入学试题,这些习题富有新意,对学生掌握基本概念、基本方法,启发思维很有帮助.希望学生尽可能独立完成.

本教材在编写中力求系统性和严密性,这是数学教学自身的特点所要求的.定理的证明尽量采用较为简便的方法,努力避免概念错误和疏漏.本书可作为综合性大学经济管理类及相关专业的教材或教学参考书.

我们在编写过程中得到南京大学教务处、商学院、数学系的大力支持和帮助,先后得到姜东平、陈仲、王现、罗亚平、许绍溥先生的指教,孙文瑜、程崇庆、王崇祜、熊廷瑶、黄震宇、沈忠洪、顾其钧、华茂芬、邓卫兵、范克新、王芳贵等教师使用过本书教材,并提出很多宝贵的意见,朱燕女士为教材的打字和排版付出了辛勤劳动,在此一并表衷心的感谢.

由于水平有限,本教材还有许多不当之处,恳切期望读者批评指正.

编者

2002 年于南京大学

# 目　录

# 第一章　函数与极限

首先介绍本书常用的逻辑符号：

1）$\exists$：表示"存在某个"，"至少有一个"．例如，"$\exists\,\delta>0$"，表示存在某正数 $\delta$，或表示至少存在一个正数 $\delta$．

2）$\forall$：表示"对任意给定的"（当用在符号"$\exists$"之前或命题开始时），或表示"对任意一个"，"对所有的"（当用在命题之末时）．例如"$\forall\, a>0,\exists\, c>0$ 使得 $0<c<a$"表示对任意给定的正数 $a$，存在正数 $c$，使得 $0<c<a$．再如"$x^2+y^2\geqslant 2xy,\forall\, x,y\in\mathbf{R}$"表示对所有的实数 $x,y$ 成立不等式 $x^2+y^2\geqslant 2xy$．

3）$P\Rightarrow Q$：表示命题 $P$ 的必要条件是 $Q$；或由 $P$ 可导出 $Q$．

4）$P\Leftarrow Q$：表示命题 $P$ 的充分条件是 $Q$．

5）$P\Leftrightarrow Q$：表示命题 $P$ 与 $Q$ 等价，或 $P$ 的充分必要条件是 $Q$．

6）$A\triangleq B$：表示用 $B$ 定义 $A$．例如

$$|a|\triangleq\begin{cases}a, & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时},\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

7）$\square$：表示一个定理或命题证明完毕．

## 第一节　实数集

### §1.1.1　集合

人们在认识客观世界的过程中，常常根据研究对象的不同特性，将它们分门别类地进行研究．我们把具有某种性质的研究对象的全体称为具有该性质的**集合**．例如，"商学院一年级学生的集合"，"有理数集合"，"拥有某种股票的股民的集合"等等．

集合通常用大写字母 $A,B,C,S,S_1$ 等表示，集合中的每一个个别的对象称为集合的**元素**，通常用小写字母 $a,b,x,y$ 等表示．$a$ 是集合 $A$ 的元素，记为 $a\in A$，读作"$a$ 属于 $A$"．$b$ 不是 $A$ 的元素，记为 $b\overline{\in} A$ 或 $b\notin A$，读作"$b$ 不属于 $A$"．

只含有限多个元素的集合称为**有限集**．含无穷多个元素的集合称为**无限集**．

表示集合的方法主要有列举法和描述法两种.

用把集合中所有的元素一一列举出来表示集合的方法称为**列举法**.例如"某班学生的集合"要用学生登记册表示出来,所有正偶数的集合 $B$ 可表为

$$B=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}.$$

用描述集合中元素的特征而给出集合的方法称为**描述法**.例如正偶数集合 $B$ 可表为

$$B=\{2n \mid n\text{ 是正整数}\}\text{ 或 }B=\{2n:n\text{ 是正整数}\}.$$

一般说来,某集合 $S$ 是由具有性质 $P$ 的元素 $x$ 组成,则记为

$$S=\{x \mid x\text{ 具有性质}P\}\text{ 或 }S=\{x:x\text{ 具有性质}P\}.$$

不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$,例如

$$\{x \mid x\neq x\}=\varnothing.$$

集合中的元素是不考虑它们的出现顺序的,在用列举法表示集合时,重复出现的元素只算一个.

若 $\forall x\in A\Leftrightarrow x\in B$,则称集合 $A$ 与 $B$ 是**相等集合**,记为 $A=B$,否则,称 $A$ 和 $B$ 不相等,记为 $A\neq B$,这时集合 $A$ 的元素与集合 $B$ 中的元素至少有一个不同.

若 $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$,则称 $A$ 为 $B$ 的**子集**,也称 $A$ **包含于** $B$ 或 $B$ **包含** $A$,记为 $A\subset B$.我们约定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.在说到子集时,习惯上也用"某一个集合"来代替,例如我们说"有理数的某一集合 $A$",是说 $A$ 是有理数集合的子集.

由所研究对象的全体构成的集合称为**全集**,全集是相对的,某一集合在一种场合下是全集,在另一种场合下可能不是全集.例如,若讨论的问题仅限于正整数,则正整数的集合就是全集.但若讨论的问题还涉及到负整数和零,则正整数集合就不是全集.

设 $A,B$ 是两个集合,下面我们定义几个重要集合.

集合 $A\cup B\triangleq\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\}$ 称为 $A$ 与 $B$ 的**并集**;

集合 $A\cap B\triangleq\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}$ 称为 $A$ 与 $B$ 的**交集**;

集合 $A-B\triangleq\{x|x\in A\text{ 但 }x\notin B\}$ 称为 $A$ 与 $B$ 的**差集**;

集合 $\bar{A}\triangleq\{x|x\in U\text{ 但 }x\notin A\}$ 称为 $A$ 的**补集**,其中 $U$ 为全集.

以下一些事实是显而易见的:

$$A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cup\varnothing=A,\ A\cap\bar{A}=\varnothing,\ A\cup\bar{A}=U,$$

$A \cup B \supset A$, $A \cap B \subset A$, $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

集合具有下述运算规律：

1. 交换律： $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
2. 结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
3. 分配律： $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
4. 德-摩根(De-Morgan)律： $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

我们只证$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. 事实上，

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \overline{\in} A \cup B \Leftrightarrow x \overline{\in} A \text{ 且 } x \overline{\in} B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ 且 }$$

$$x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

其余的规律类似可证.

## §1.1.2 实数集

微积分中研究的基本对象是定义在实数集上的函数,因此我们今后遇到的集合主要是由实数构成的集合. 在中学数学课中,我们知道实数由有理数和无理数两部分组成. 每一个有理数都可用分数形式$\frac{p}{q}$($p$, $q$ 为整数, $q \neq 0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示;而无限十进不循环小数则表示一个无理数. 今后用 **R** 表示实数集合, **Q** 表示有理数集合, **Z** 表示整数集合, **N** 表示正整数集合.

实数具有如下一些主要特性：

1. 实数对加、减、乘、除(除数不为0)四则运算是封闭的,即任意两个实数在施行加、减、乘、除(除数不为 0)任何一个运算之后,所得的和、差、积、商仍然是实数.

2. 实数是有序的,即$\forall a, b \in \mathbf{R}$,必满足下述关系之一：

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

3. 实数具有阿基米德(Archimedes)性,即$\forall a, b \in \mathbf{R}$,若 $b > a > 0$,则存在数 $n \in \mathbf{N}$,使得 $na > b$.

4. 实数全体具有稠密性,即$\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $\exists c \in \mathbf{R}$,使 $a < c < b$(且 $c$ 既可是有理数,也可是无理数).

如果在一直线(通常画成水平直线)上确定一点 0 作为原点,指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向),并规定一个单位长度,则称此直线为**数轴**. 于是任一实数都对应数轴上惟一的点;反之,数轴上每一点也都

惟一地代表一个实数.正由于全体实数与整个数轴上的点有着一一对应关系,在今后的叙述中,我们可把"实数 $x$"说成"点 $x$",对这两个术语不加区别.

我们还可以把数轴上的点和实数 $x$ 的上述对应关系推广,在平面解析几何中,我们知道平面(称为**二维空间**)上的点可以和有序实数对$(x_1,x_2)$之间建立一一对应关系,因此也称$(x_1,x_2)$为**二维点**,于是平面上的点集合可由实数 $x_1$ 和 $x_2$ 表示.例如 $A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2=R^2\}$表示平面上以原点为圆心半径为 $R$ 的圆周上的点集合,$B=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0,x_2>0\}$表示第一象限点的集合.类似地,$n$ 个实数的有序组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为一个 **$n$ 维点**(或 **$n$ 维向量**),所有 $n$ 维点的集合称为 **$n$ 维空间**,记为 $\mathbf{R}^n$.我们将于第四章介绍的空间解析几何就是研究 $\mathbf{R}^3$ 中的点集.

### §1.1.3 不等式

由于实数是有序的,因此,任意两个实数可以比较大小.不等式的运算具有下列性质:

1. $a>b,\quad b>c\Rightarrow a>c$.
2. $a>b\Rightarrow a+c>b+c$.
3. $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.
4. $a>b,ab>0\Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.
5. $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

不等式在微积分中占有很重要的地位,很多定理是用等式表达的,却都是通过不等式加以证明的.熟悉基本不等式和掌握证明不等式的基本方法,在今后的学习中是十分重要的.作为例子,我们证明两个常用的不等式.

**例 1** 伯努利(Bernoulli)不等式:

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,\qquad \forall\, n\in\mathbf{N}\text{ 及 }x>-1. \tag{1.1}$$

**证** $n=1$ 时不等式(1.1)显然成立.设$(1+x)^n\geqslant 1+nx$ 成立,则

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1}&=(1+x)^n(1+x)\geqslant(1+nx)(1+x)\\&=1+(n+1)x+nx^2\geqslant 1+(n+1)x.\end{aligned}$$ □

**例 2** $A$-$G$ 不等式:

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G_n,\qquad \forall\, a_1,a_2,\cdots,a_n>0. \tag{1.2}$$

**证**　这是一个古老的不等式,它有多种证明方法,下面的证明引自美国数学月刊83期(1976).$A_2 \geqslant G_2$.显然成立,设$A_{n-1} \geqslant G_{n-1}$成立,我们往证$A_n \geqslant G_n$.不妨设$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$(否则重新编号即可),于是有

$$a_1 \leqslant A_n \leqslant a_n \tag{1.3}$$

从而得到

$$A_n(a_1 + a_n - A_n) = a_1 a_n + (a_n - A_n)(A_n - a_1) \geqslant a_1 a_n \tag{1.4}$$

由归纳假设,对于$a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_1 + a_n - A_n$这$n-1$个正数有

$$A_n = \frac{nA_n - A_n}{n-1} = \frac{1}{n-1}[a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + (a_1 + a_n - A_n)]$$

$$\geqslant \sqrt[n-1]{a_2 a_3 \cdots a_{n-1}(a_1 + a_n - A_n)}$$

两端$n-1$次乘方得

$$A_n^{n-1} \geqslant a_2 a_3 \cdots a_{n-1}(a_1 + a_n - A_n)$$

两边同乘$A_n$,并注意(1.4)式便得

$$A_n^n \geqslant a_2 a_3 \cdots a_{n-1}(a_1 + a_n - A_n)A_n \geqslant a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$$

再开$n$次方得

$$A_n \geqslant G_n. \qquad \square$$

在例2的证明中不难看出,不等式(1.3)及其后的不等式,当且仅当$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$时取等号.于是我们可以断言:$n$个正数的几何平均数$G_n$不超过它们的算术平均数$A_n$,当且仅当它们全相等时才有$G_n = A_n$.

### §1.1.4　区间·邻域·数集的界

我们把数轴上某一段中连续的点的集合称为**区间**,依据端点坐标的隶属关系及是否有限可分如下几种情形(下列各式中$a<b$, $a,b$为实数):

1. 闭区间　$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
2. 开区间　$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$;
3. 半开区间　$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$,　$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$;
4. 无穷区间　$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$,　$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$,
　$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$,　$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$,

$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

上述前三种区间是有限区间,第四种区间称为无穷区间,其中符号“$+\infty$”读作“正无穷大”或“正无穷”,符号“$-\infty$”读作“负无穷大”或“负无穷”,它们仅是一种符号,并不是具体实数.当区间有限时,称 $b-a$ 为区间的长度.

有时用一个大写字母,例如 $I,X$ 等表示一个区间,在不加其它说明时,可理解为上述情形中的任一种.

设 $a\in\mathbf{R}$,$\delta$ 为某一正数,称开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 为**点 $a$ 的 $\delta$ 邻域**,简称 **$a$ 的邻域**,通常记作 $U(a,\delta)$,即 $U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$.称 $U(a,\delta)-\{a\}=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为**点 $a$ 的 $\delta$ 去心邻域**,简称**去心邻域**.称开区间 $(a,a+\delta)$ 为**点 $a$ 的右邻域**,$(a-\delta,a)$ 为**点 $a$ 的左邻域**.

当 $M$ 为充分大正数时,如下一些数集

$$U(\infty)\triangleq\{x\mid |x|>M\},\ U(+\infty)\triangleq\{x\mid x>M\},$$

$$U(-\infty)\triangleq\{x\mid x<-M\}$$

分别称为$\infty$邻域,$+\infty$邻域,$-\infty$邻域.

下面给出关于数集“界”的概念.

**定义 1.1** 设 $S$ 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若存在实数 $M$(或 $m$)使得 $x\leqslant M$(或 $x\geqslant m$),$\forall x\in S$,则称 **$M$(或 $m$)为数集 $S$ 的上界(或下界)**,并称 **$S$ 为上有界(或下有界)集合**.若 $S$ 既上有界又下有界,则称 $S$ 为**有界集合**.若 $\forall M>0$,$\exists x\in S$ 使 $x>M$(或 $x<-M$),则称 $S$ 为**上无界(或下无界)集合**,上无界集合和下无界集合统称**无界集合**.

显然,$S$ 为有界集合$\Leftrightarrow\exists K>0$ 使 $|x|\leqslant K$,$\forall x\in S$.这时称 $K$ 为数集 $S$ 的**界**.

例如正整数集 $\mathbf{N}$ 是一个下有界但上无界集合,1 是 $\mathbf{N}$ 的一个下界,为证 $\mathbf{N}$ 上无界,可反证,倘若 $K$ 是 $\mathbf{N}$ 的上界,显然 $K>1$,由实数的阿基米德性,$\exists n\in\mathbf{N}$ 使 $n\cdot 1>K$,这与假设 $K$ 是 $\mathbf{N}$ 的上界相矛盾.

读者自行证明,任何有限区间都是有界集,无限区间都是无界集,由有限个数组成的数集都是有界集.

若一个数集 $S$ 上有界,则它就有无限多个上界,上界中最小者称为 $S$ 的**上确界**,记为 $\sup S$;若 $S$ 为下有界集合,则下界中最大者称为 $S$ 的**下确界**,记为 $\inf S$.

例如,若 $S=(0,1)$,则 $\sup S=1,\inf S=0$.对数集 $E=\{(-1)^n\frac{1}{n}\mid n\in\mathbf{N}\}$,有 $\sup E=\frac{1}{2}$,$\inf E=-1$.这两个例子说明 $\sup S,\inf S$ 可能属于 $S$,也可能

不属于 $S$.

我们知道无限多个实数组成的集合中不一定有最大数，也不一定有最小数.例如开区间$(0,1)$中既无最大数，也无最小数.因此，我们自然会问上有界集合是否必有上确界？下有界集合是否必有下确界？回答是肯定的，我们有下述定理：

**定理 1.1（确界定理）** 每一个非空上有界（或下有界）集合必有惟一的实数作为它的上确界（或下确界）.

定理 1.1 是本书的理论基础，它的证明涉及到实数的严格数学定义，故略去.应注意，这条定理在有理数集合内就不成立.例如，由$\sqrt{2}$的精确到$10^{-n}$($n\in\mathbf{N}$)的不足近似值所构成的有理数集 $A=\{1.4,\ 1.41,1.414,\cdots\}$是有界集合，但它的上确界不是有理数，而是无理数$\sqrt{2}$.

## 习 题 1.1

**A 组**

1. 设 $A=\{0\},B=\{0,1\}$，下列陈述是否正确？并说明理由.

(1) $A=\varnothing$;　(2) $A\subset B$;　(3) $0\in A$;

(4) $\{0\}\in A$;　(5) $0\subset A$;　(6) $A\cap B=0$;　(7) $A\cup B=B$.

2. 设由 1 至 10 的自然数作成的集合为全集合，它的三个子集 $A,B,C$ 为

$$A=\{偶数\},B=\{奇数\},C=\{3 的倍数\}.$$

试求下列各集合的元素：

(1) $B\cap C$;　(2) $\bar{A}\cap\bar{C}$;　(3) $\overline{A\cap C}$.

3. 设全集 $U$ 为男女同班的全体学生组成的集合，其中 $A=\{男学生\},B=\{戴眼镜的学生\}$，试写出下列各项所表示的集合：

(1) $A\cap B$;　(2) $\bar{A}\cap B$;

(3) $A\cap\bar{B}$;　(4) $A\cup B$;

(5) $\bar{A}\cup B$;　(6) $A\cup\bar{B}$;

(7) $\overline{A\cap B}$;　(8) $\overline{A\cup B}$.

4. 设 $A=\{(x,y)\mid x-y+2\geqslant 0\}$，$B=\{(x,y)\mid 2x+3y-6\geqslant 0\}$，$C=\{(x,y)\mid x-4\leqslant 0\}$，其中$(x,y)$表示坐标平面上点的坐标.在坐标平面上标出 $A\cap B\cap C$ 的区域.

5. 设 $A=\{x\mid x^3+2x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$.试求能使 $A\cup B=\{x\mid x+2>0\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$的 $a,b$ 的值.

6. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$，验证下列等式：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_{i+1}=\sum\limits_{i=2}^{n+1}a_{i-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_{n-k}$;

(2) $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$；

(3) $\sum_{i=1}^{n}ca_i=c\sum_{i=1}^{n}a_i$；

(4) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$.

7. 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 同号且大于 $-1$.

8. 利用上题证明:若 $x>-1$ 且 $n>1$,则

(1) $(1+x)^n\geqslant 1+nx$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立;

(2) $1+\frac{x}{n}\geqslant(1+x)^{\frac{1}{n}}$.

9. 分别利用伯努利不等式和 $A$-$G$ 不等式证明不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

10. 证明对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;　　(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

11. 下列数集是否有上(下)确界?若有的话,写出其上(或下)确界.

(1) $S_1=\left\{1-\frac{1}{2^n}\,|\,n\in\mathbf{N}\right\}$;　　(2) $S_2=\{n^{(-1)^n}\,|\,n\in\mathbf{N}\}$.

**B 组**

1. 设 $A,B,C$ 是任意集合,求证:

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;　(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

2. 证明当 $n>1$ 时,$\left(\frac{n+1}{3}\right)^n<n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

3. (1) 设 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$为实系数二次三项式,求证:$\forall x\in\mathbf{R}$ 均有 $y\geqslant 0$(或 $y>0$)成立的充要条件是 $b^2-4ac\leqslant 0$(或 $b^2-4ac<0$);

(2) 利用(1)的结果证明柯西(Cauchy)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right),\qquad \forall x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n\in\mathbf{R}.$$

4. 设 $a,b,c,d$ 均为实数,求证:

(1) $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right|\leqslant|a-c|$;

(2) $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right|\leqslant|a-c|+|b-d|$.

5. 证明：(1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n+1}$；

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

# 第二节　一元函数

## §1.2.1　一元函数概念

**定义 1.2**　设 $A,B$ 为两个非空集合，若 $\forall x\in A$，按某对应法则 $\varphi$ 有惟一的 $y\in B$ 与之对应，则称 $\varphi$ 为由 $A$ 到 $B$ 的**映射**，记为

$$\varphi:A\to B \qquad \text{或}\ \varphi:\begin{array}{l}A\to B\\ x\mapsto y\end{array},$$

符号 $x\mapsto y$ 表示映射 $\varphi$ 将 $A$ 的元素 $x$ 映到 $B$ 的元素 $y$. 若记 $y=\varphi(x)$，则映射 $\varphi$ 也记为

$$\varphi:\begin{array}{l}A\to B\\ x\mapsto\varphi(x)\end{array},$$

称 $y$ 为 $x$ 关于映射 $\varphi$ 的**像**，称 $x$ 为 $y$ 的**原像**，$A$ 称为映射 $\varphi$ 的**定义域**，记为 $D(\varphi)$，$A$ 中元素的像 $\varphi(x)$ 的集合称为映射 $\varphi$ 的**像域**，记为 $\varphi(A)$.

有几类特殊的映射如下：

1. 若 $\varphi(A)=B$，则称 $\varphi:A\to B$ 为**满映射**.

2. 若 $\forall x_1,x_2\in A,x_1\neq x_2\Rightarrow\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$，则称 $\varphi:A\to B$ 为**单映射**.

3. 若 $\varphi:A\to B$ 既是单映射又是满映射，则称 $\varphi:A\to B$ 为 **1-1 映射**或**双映射**.

**例 1**　设 $A$ 是平面上多边形集合，$\forall x\in A$，$y=\varphi(x)$ 表多边形顶点个数，则 $\varphi:\begin{array}{l}A\to\mathbf{N}\\ x\mapsto\varphi(x)\end{array}$ 不是满映射（因无顶点个数是 1 或 2 的多边形），也不是单映射（因平面上有无穷多个三角形）.

**例 2**　设 $A$ 表某大学大学生集合，$\forall x\in A$，$y=\varphi(x)$ 表该大学生 $x$ 的学号数，则 $\varphi:\begin{array}{l}A\to\mathbf{N}\\ x\mapsto\varphi(x)\end{array}$ 是单映射.

**例 3**　$y=\sin x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 既不是单映射也不是满映射；$y=\sin x:\mathbf{R}\to[-1,1]$ 是满映射但不是单映射；$y=\sin x:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ 是双映射.

**定义 1.3** 设 $X\subset\mathbf{R}(X\neq\varnothing)$，则称映射 $f:\begin{matrix}X\to\mathbf{R}\\ x\mapsto y\end{matrix}$ 为**一元函数**，简称**函数**，习惯上把函数 $f:\begin{matrix}X\to\mathbf{R}\\ x\mapsto y\end{matrix}$ 记为 $y=f(x),x\in X$. 称 $x$ 为自变量，称 $y$ 为**因变量**或**自变量 $x$ 的函数**. 称 $x$ 的像 $f(x)$ 为**函数值**，称函数值的集合 $f(X)\triangleq\{f(x)\mid x\in X\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

我们还可以把一元函数的概念推广. 设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 为 $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的点集，称映射 $f:\begin{matrix}X\to R\\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto z\end{matrix}$ 为 $n$ **元函数**，习惯上把 $n$ 元函数表为

$$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X.$$

称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为**自变量**，称 $z$ 为**因变量**.

$n$ 元函数微积分将于第四章详细介绍.

要确定一个函数，必须指出两点：第一，定义域；第二，对应法则. 函数的值域通常不必指明，因为定义域和对应法则确定之后，值域也就随之确定了.

函数的表示法有三种：图示法，表格法和解析法. 在平面直角坐标系中，点集合 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$ 所构成的图形称为 $y=f(x)$ 的**图像**或**图形**，图示法就是在坐标平面上用函数的图形表示函数，这种表示法的优点是直观醒目，其缺点是用手工逐点描图时常常不能把握函数的特性，在函数变化剧烈之处可能会“失实”，不过，图示法在计算机上已大显身手，并发展成一门新学科——计算机图形学. 在§2.4.3 我们将利用导数讨论函数的作图. 表格法就是用表格的形式给出自变量 $x$ 和函数值 $f(x)$ 之间的关系，例如，常用的对数函数表，三角函数表及火车运行的里程与票价表，工厂里的各种生产进度表等等. 用电子计算器给出某些函数值也属于用表格法表示函数的例子. 解析法就是用数学式子（称为解析表达式）表示自变量和因变量的值之间的对应关系. 例如 $y=\frac{1}{2}\sin^2 x$，$y=\lg x+\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 都给了因变量 $y$ 与自变量 $x$ 之间的函数关系. 对用解析式给出的函数关系，如果没有标明定义域，我们通常把定义域理解为使该解析式有意义（在实数范围内）的一切自变量的全体，称之为**自然定义域**. 如 $y=\lg x+\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的后面未标定义域，则它的定义域是指开区间 $(0,2)$. 在解决实际问题时，则要根据变量的实际变化范围来确定函数的定义域，例如，正方形的面积 $A$ 和边长 $x$ 之间有函数关系 $A=x^2$，它的定义 域为一切正实数.

在本书中，我们主要通过函数的解析表达式来研究函数的性质.