船舶运动与建模

李殿璞 编著

哈尔滨工程大学出版社

船舶运动与建模

李殿璞　　编著

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

船舶运动与建模/李殿璞编著.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,1999.6

ISBN 7-81007-943-3

Ⅰ.船… Ⅱ.李… Ⅲ.船舶运动-建立模型 Ⅳ.U661.3

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第21693号

内 容 简 介

本书面向从事船的控制与仿真的读者对象,系统地讲述船舶运动数字模型和建模方法。水面船舶和潜器被纳入同一体系,内容对各类船舶具有通用性。模型结果形式上便于实施控制和仿真。本书提供了多种现成建模结果,便于控制和仿真时直接引用。

本书适合于船舶自动化、船舶电气设备专业高年级本科生和研究生作为教材,也可供船舶设计、建造、操纵、使用、管理、航运等有关专业作为仿真辅助教材使用。同时也可供从事上列各专业及其它相关专业的科技工作者和管理人员参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行

哈尔滨南通大街145号 哈尔滨工程大学11号楼

发行部电话(0451)2519328 邮编:150001

新华书店经销

黑龙江省教委印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 18 插页 2 字数 404 千字

1999年12月第1版 1999年12月第1次印刷

印数:1~1 000册

定价:23.00元

地址:哈尔滨市南岗区和兴路147号 邮编:150080

如发现印、装质量问题,请与本厂质量科联系调换。

前　言

本书是按照中国船舶工业总公司教材编写委员会审定的船舶自动化专业“船舶运动与建模”课程教学大纲编写的，可作为大学高年级本科生教材和研究生教材。本书主要面向从事船舶控制和仿真的读者对象。除船的自动化、船舶自动控制、船电设备等专业可用作教材外，也可供船舶设计、建造、操纵、使用、管理、航运等有关专业作为仿真辅助教材使用。同时也可供从事上列各专业及其它相关专业的科技工作者和管理人员参考。

本书内容和船舶操纵性关系极为密切，但与通常的操纵性教材在内容取舍和侧重点上有很大不同。本书舍弃了很多对自动化专业学生和科技人员来说属于基础和常规的内容，使内容更为简洁；同时补充了一些很必要的理论力学和流体力学知识，重点介绍了有关的一些基本力学概念，把有关的力学知识作了归纳、串联，构成了一定的理论系统，使非力学专业的读者更便于理解并省去很多整理、查证的工夫。本书把船舶运动建模方法和模型的数学表达作为侧重点，以服务于对船实施控制和仿真的总目标。讨论中假设所研究的船的对象，包括船体、船附体、控制面和推进动力的设计业已完成，因而不讨论与此有关的设计问题，只针对已建造完成的船研究建模问题。

本书强调内容的通用性。给出的结果将不针对某型船或某些艇，而着力于构造尽可能具有一般指导意义和普遍适用性的理论框架。不论是作为基础教学，还是作为面向广泛对象的仿真建模技术，教授通用理论框架显然比传授某些船或某些艇的特定经验和专门知识更重要。

本书注重内容的系统性。内容由浅入深，论述力求严密。由定常状态入手，以后讲述一般三自由度运动，而后再讨论空间运动。同时把水面船和潜器运动纳入同一理论体系。

就建模方法来说，本书仍然沿用现有的微分方程建模法和泰勒级数展开法。关于泰勒级数方法，现在一直只使用纵向匀速直航工作点下的展开式。考虑到船的建模技术近年来的新发展和适应一些新建模方法的需要，本书所讨论的泰勒展开式将把直航工作点展开扩充为任意工作点展开，将给出任意工作点下的展开式。同时也将给出各具有典型意义的工作点，包括纵向直航工作点下的展开式。

本书注重实用性。从仿真的需要来说，多数读者，特别是大多数非造船专业的学生和科技人员，都希望能更快地和很方便地得到所需求的模型结果，而不是要经过十分繁琐的推导才能得到结果。所以本书尽可能地给出了常见的一些展开式，以便读者引用。

从模型结果具有的形式看，本书注意尽可能符合船舶控制系统设计者的需要，对线性模型给出了矩阵形式的状态方程；对非线性模型，则使控制量和状态量加以分离，变为状

态向量加控制阵乘控制向量的形式。对所有结果中的状态量、控制量、扰动量都作了明确划分,规范了写法,因而更便于实施控制。公式结果一般用矩阵形式表述,其优点是物理意义明确,组合关系清楚,便于查对。少数情况下给出了展开式。在符号使用方面,除符合国际惯例外,主要符号还做到了尽量不重复、不二用,以免混淆。

本书兼顾水上和水下,不限于讨论潜器。在本书中"潜器"一词被作为水下船的通称,它包括潜艇、深潜艇、水下机器人等所有水下船。本书有些章节只适用于潜器,有些章节只讨论水面船,有些是通用的。

本书的出版得到了刘胜、彭侠夫同志的大力支持,也得到全国高校船舶类教材委员会唐加亨和李文秀等同志的积极协助,谨此致谢。

由于编著者学识所限,难免有错误和不当之处,敬请读者批评指正。

编著者

1998年4月于哈尔滨工程大学

目　录

第1章　坐标系及其变换 …… 1

§1-1　固定坐标系 …… 1

§1-2　运动坐标系 …… 2

§1-3　惯量矩阵和惯性主轴 …… 4

§1-4　速度向量与两坐标系的关系 …… 10

§1-5　运动坐标系与固定坐标系间的旋转变换 …… 12

§1-6　角速度向量在 $\alpha x y_1 \zeta$ 坐标系下的表示 …… 15

第2章　水平面定常回转运动 …… 18

§2-1　水平面坐标系 …… 18

§2-2　水平回转运动过程 …… 19

§2-3　水平定常回转运动数学模型 …… 21

§2-4　水平回转的耦合运动 …… 27

§2-5　水动力系数测定试验简介(一) …… 28

§2-6　船舶水动力学中的无因次化体系 …… 33

第3章　垂直面定常直线运动 …… 38

§3-1　垂直面坐标系 …… 38

§3-2　垂直面定常直线运动方程 …… 40

§3-3　等速直线定深航行 …… 45

§3-4　变深过程中的斜向定常运动 …… 49

§3-5　垂直面定常直线运动数字实例 …… 54

第4章　水平面运动方程 …… 56

§4-1　水平面运动一般方程 …… 56

§4-2　水动力的泰勒级数表示 …… 60

§4-3　水动力函数一阶展开式中的水动力系数 …… 65

§4-4　水平面运动线性方程 …… 69

§4-5　二阶展开式中的水动力系数 …… 73

§4-6　螺旋推进器的推力和扭矩 …… 76

§4-7　水平面运动非线性方程 …… 81

§4-8　有定向水平流时的水平面运动方程 …… 83

§4-9　水动力系数测定试验简介(二) …… 85

第5章　垂直面运动方程 …… 91

§5-1　垂直面运动一般方程 …… 91

§5-2　水动力的泰勒级数表示 …… 94

§5－3　水动力函数一阶展开式中的水动力系数 …… 98
§5－4　垂直面运动线性方程 …… 100
§5－5　二阶展开式中的水动力系数 …… 105
§5－6　垂直面非线性运动方程 …… 108
§5－7　有定向水平流时的垂直面运动方程 …… 111
第6章　动量、动量矩及其导数 …… 113
§6－1　动量和动量矩 …… 113
§6－2　动量的导数和动量矩的导数 …… 118
第7章　空间运动方程 …… 123
§7－1　建立船舶空间运动一般方程 …… 124
§7－2　船舶所受静力分析 …… 128
§7－3　水动力的泰勒级数表示 …… 131
§7－4　螺旋推进器的推力 …… 140
§7－5　六自由度空间运动方程的向量形式 …… 143
§7－6　六自由度空间运动方程的展开形式 …… 146
第8章　流体惯性力和流体粘性力 …… 152
§8－1　附加质量和流体惯性力 …… 152
§8－2　流体粘性力 …… 165
第9章　空间运动方程在特定情况下的简化 …… 167
§9－1　空间运动方程左端的简化 …… 167
§9－2　流体惯性力公式系数的简化 …… 172
§9－3　水动力系数整体的简化 …… 185
§9－4　舵水动力系数的简化 …… 197
§9－5　特定情况下的简化空间运动方程 …… 201
第10章　水动力系数的近似推算 …… 214
§10－1　附加质量和加速度系数的近似推算 …… 214
§10－2　速度一次项水动力系数的估算 …… 220
§10－3　角速度一次项水动力系数的估算 …… 224
§10－4　舵角水动力系数的估算 …… 227
§10－5　耦合水动力系数的近似推算 …… 227
§10－6　数例 …… 231
第11章　水面状态船舶横摇纵摇升沉运动方程 …… 235
§11－1　无风浪时的船舶横摇纵摇升沉运动方程 …… 235
§11－2　规则波作用下直航船舶的横摇运动 …… 245
§11－3　有鳍时的船舶横摇运动 …… 251
第12章　螺旋推进器特性 …… 255
§12－1　理想推进器 …… 255

§12－2 螺旋推进器的几何学 …… 257
§12－3 螺旋桨的推力和阻转矩 …… 258
§12－4 螺旋桨与船体的相互作用 …… 263
§12－5 螺旋桨工作特性和反转特性曲线 …… 265
主要符号表 …… 273
参考文献 …… 276

第 1 章 坐标系及其变换

研究船舶运动通常采用直角坐标系。基本的坐标系是固定坐标系(也称地面坐标系或静止坐标系)和运动坐标系(也称船体坐标系)。按惯例一律采用右手系。研究船舶运动所用参数、符号体系在国际上普遍采用国际水池会议(ITTC)推荐的以及造船和轮机工程学会(SNAME)术语公报[1,2]推荐的体系。本书也将采用这一体系。

本章的学习重点是掌握两种基本坐标系的定义及其主要符号;深入掌握惯量矩阵、惯性主轴概念以及惯量矩阵随坐标系平移和旋转的变换关系;明确速度向量与两基本坐标系的角位置关系和符号表示;深入掌握两基本坐标系间的旋转变换矩阵;学会如何建立姿态运动方程。

§1-1 固定坐标系

一、固定坐标系的几种形式

为研究船舶运动,必须建立表达船舶运动的坐标系,或称参考系。同一般物体的力学运动一样,船舶运动问题也有运动学问题和动力学问题之分。单纯描述船舶位置、速度、加速度,以及姿态、角速度、角加速度随时间变化的问题属于运动学问题。研究船舶受到力和力矩作用后如何改变运动位置和姿态的问题属于动力学问题。由于运动的相对性,对于运动学问题来说,参考系的选择几乎不受什么限制,只要能描述运动的参照基准和研究问题比较方便即可。而对动力学问题来说则不然,参考系不能任意选择。牛顿定律的成立依赖于一定的参考系。牛顿定律得以成立的参考系称惯性参考系。只有在惯性参考系下才能运用牛顿定律。因此研究船舶动力学问题时,也就是在运用牛顿定律以及其它根据牛顿定律推演得到的不同形式的动力学定律时,必须在惯性参考系下进行。

地球表面对于在小范围、短时间内发生的力学过程来说可近似被认为是惯性参考系。船舶运动问题属于这样的力学过程。因此,我们在研究船舶动力学问题时,一般总是以大地作为参考系。通常把坐标系建立在地面、海面上或建立在海平面以下的海水中。

研究船舶的运动所用固定坐标系通常有图 1-1 的三种形式。固定坐标系原点 E 可选在海面或海中某一点。$E\xi$ 轴保持水平,一般常以船舶的主航向为 $E\xi$ 轴的正向,少数情况下把主航向取为 $E\eta$ 轴的正向。对于图 1-1a,$E\xi$ 和 $E\eta$ 轴置于水平面内,$E\zeta$ 轴垂直于 $E\xi\eta$ 坐标平面,其正向指向地心。对于图 1-1b,$E\xi$ 和 $E\eta$ 轴仍置于水平面内,不同的是 $E\zeta$ 轴的正方向指向天顶。图 1-1c 把 $E\xi$ 和 $E\zeta$ 轴置于水平面内,而把 $E\eta$ 轴的正方向指向天顶。

二、固定坐标系下的主要符号

船舶在水面或水下运动,其重心 G 的坐标记为 ξ_G, η_G, ζ_G。船舶重心 G 的速度 $\boldsymbol{U}_G$ 是一个向量,它在固定坐标系 ξ, η, ζ 轴上投影依次为 $U_{G\xi}, U_{G\eta}, U_{G\zeta}$,即

$$\boldsymbol{U}_G = (U_{G\xi} \quad U_{G\eta} \quad U_{G\zeta})^{\mathrm{T}} = (\dot{\xi}_G \quad \dot{\eta}_G \quad \dot{\zeta}_G)^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

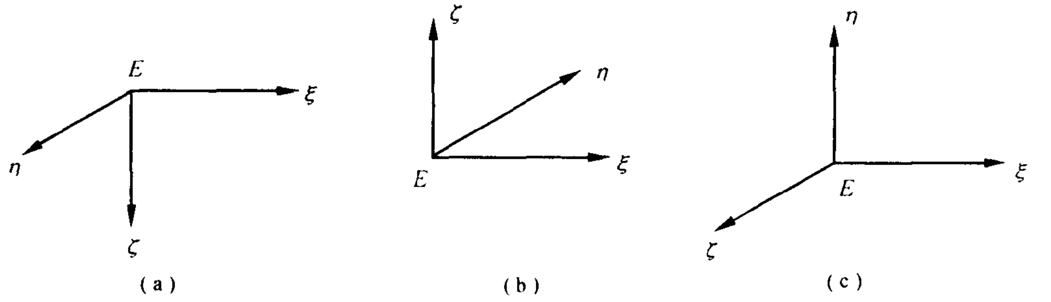

图 1-1　固定坐标系的几种形式

相应地，船体原点的速度 $\boldsymbol{U}$ 可用它在 ξ、η、ζ 轴上的投影分量 U_ξ、U_η、U_ζ 表示为

$$\boldsymbol{U} = (U_\xi \quad U_\eta \quad U_\zeta)^{\mathrm{T}} = (\dot{\xi} \quad \dot{\eta} \quad \dot{\zeta})^{\mathrm{T}} \tag{1-2}$$

船舶在某瞬时除去作沿直线的运动之外，还会绕空间某一轴线作旋转运动。旋转运动也用向量表示。绕某轴的旋转角速度记为 $\boldsymbol{\Omega}$。向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的方向与旋转轴向保持一致，具体指向按右手螺旋规则确定。船体的旋转角速度向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在固定坐标系 ξ、η、ζ 轴上的投影值依次为 Ω_ξ、Ω_η、Ω_ζ，即，

$$\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_\xi \quad \Omega_\eta \quad \Omega_\zeta)^{\mathrm{T}} \tag{1-3}$$

船舶所受到的外力 $\boldsymbol{F}$ 也是一个向量，它在固定坐标系 ξ、η、ζ 轴上的投影值依次为 F_ξ、F_η、F_ζ，即

$$\boldsymbol{F} = (F_\xi \quad F_\eta \quad F_\zeta)^{\mathrm{T}} \tag{1-4}$$

同样，船舶所受的外力矩 $\boldsymbol{M}$ 是一个向量，它在固定坐标系 ξ、η、ζ 轴上的投影值分别为 T_ξ、T_η、T_ζ，即

$$\boldsymbol{T} = (T_\xi \quad T_\eta \quad T_\zeta)^{\mathrm{T}} \tag{1-5}$$

把上面给出的固定坐标系下使用的符号归纳到一起可得表 1-1。

表 1-1　固定坐标系的主要符号

点和向量	ξ 轴	η 轴	ζ 轴
船舶重心 G	ξ_G	η_G	ζ_G
船舶的原点 o	ξ_o	η_o	ζ_o
速　度 $\boldsymbol{U}$	U_ξ	U_η	U_ζ
角速度 $\boldsymbol{\Omega}$	Ω_ξ	Ω_η	Ω_ζ
力　$\boldsymbol{F}$	F_ξ	F_η	F_ζ
力矩 $\boldsymbol{T}$	T_ξ	T_η	T_ζ

§1-2　运动坐标系

一、运动坐标系的几种形式

固定坐标系虽然是惯性参考系，但很多情况下使用起来不够方便，比如研究船与周围

海水间的相互作用力时,因水动力决定于船体与海水的相对运动,用固定坐标系参数来表达就很困难。又比如,船体的转动惯量用固定坐标系参数来表示,形式上也会变得很复杂。因此我们除固定坐标系外还需要建立其它坐标系。最常用的是建立在船体上的坐标系,称为运动坐标系或船体坐标系。因为运动坐标系固结于船体上,将随船体作任意形式的运动,所以它除了在作匀速直线运动的情况之外,都不能被认为是惯性系。

船体坐标系的原点 o 可以取在船重心 G 处,即 o 与 G 重合,但更一般的是取在 G 以外的点上。如果船体结构上存在对称面,则原点将取在对称面上。船体坐标系的坐标轴毫无例外地都取得与图 1－1 的固定坐标系相对应。相应地有图 1－2 所示的几种典型形式。

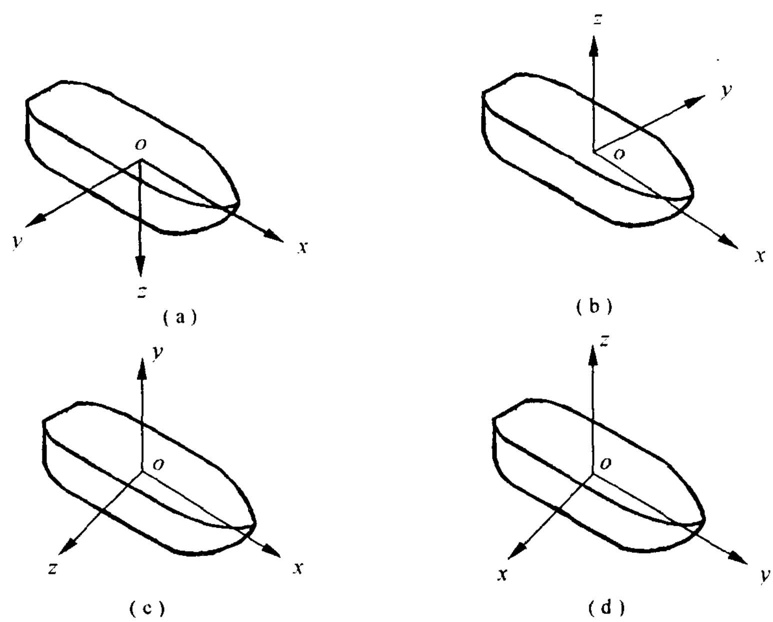

图 1－2　船体坐标系的几种形式

在船体坐标系中,一般把 ox 轴取在纵中剖面内,指向船首,平行于水线面。图 1－2d 把 oy 轴取在纵中剖面内并指向船首和平行水线面,是一个例外。在图 1－2a 中取 oy 轴与纵中剖面垂直,指向右舷,平行于水线面。oz 轴在纵中剖面内,指向船底方向,与水线面垂直。在图 1－2b 中不同的是取 oy 轴指向左舷,取 oz 轴指向船底反方向。在图 1－2c 中取 y 轴指向船底反方向,而取 z 轴指向船右舷。在图 1－2d 中,ox 轴指向右舷,oz 轴指向船底反方向。

本书除个别部分外,均采用图 1－1a、图 1－2a 的坐标系。

二、船体坐标系下的主要符号

前面的式(1－1)是船体重心 G 的速度 $\boldsymbol{U}_G$ 在固定坐标系下的向量表示。同一个向量 $\boldsymbol{U}_G$ 也可以在船体坐标系下加以表示。设 $\boldsymbol{U}_G$ 在船体坐标系 x, y, z 轴上的投影值依次为 u_G, v_G, w_G,则可写出

$$\boldsymbol{U}_G = (u_G \quad v_G \quad w_G)^{\mathrm{T}} \tag{1-6}$$

相应地,船体原点的速度 $\boldsymbol{U}$ 可用它在船体坐标系上的三个投影分量 u、v、w 表示为

$$U = (u \quad v \quad w)^{\mathrm{T}} \tag{1-7}$$

式中　u——纵向速度；

v——横向速度；

w——垂向速度。

注意，这里虽然采用了船体坐标系，但船体的速度 $\boldsymbol{U}_G$ 和 $\boldsymbol{U}$ 仍是相对固定坐标系的，只是投影到船体坐标系上去了。

同样，式(1－2)所表示的船舶绕某轴的旋转角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 可用它在船体坐标系 x,y,z 轴上投影分量 p,q,r 表示为

$$\boldsymbol{\Omega} = (p \quad q \quad r)^{\mathrm{T}} \tag{1-8}$$

式中　p——横倾角速度；

q——纵倾角速度；

r——偏航角速度。

船体所受外力 $\boldsymbol{F}$ 可用它在船体坐标系 x、y、z 轴上的投影 X、Y、Z 表示为

$$\boldsymbol{F} = (X \quad Y \quad Z)^{\mathrm{T}} \tag{1-9}$$

式中　X——纵向力；

Y——横向力；

Z——垂向力。

船体所受外力矩 $\boldsymbol{T}$ 可用它在船体坐标系 x、y、z 轴上的投影分量 K、M、N 表示为

$$\boldsymbol{T} = (K \quad M \quad N)^{\mathrm{T}} \tag{1-10}$$

式中　K——横倾力矩；

M——纵倾力矩；

N——偏航力矩。

注意速度和力的分量均以指向坐标轴的正向为正，角速度和力矩的正方向按右手螺旋规则确定。例如 p 和 K 的正方向是指绕 ox 轴使 oy 轴转向 oz 轴的方向，而 q 和 M 的正方向是指绕 oy 轴使 oz 轴转向 ox 轴的方向。

把上面给出的船体坐标系下使用的一些符号归纳到一起，可得表 1－2。

表 1－2　船体坐标系的主要符号

向　量	x 轴	y 轴	z 轴
速度 $\boldsymbol{U}$	u	v	w
角速度 $\boldsymbol{\Omega}$	p	q	r
力　$\boldsymbol{F}$	X	Y	Z
力矩 $\boldsymbol{T}$	K	M	N

§1－3　惯量矩阵和惯性主轴

船运动坐标系的建立和惯性主轴概念有密切关系，因此要求对惯性主轴概念有较为深入的了解。本节将首先讨论刚体绕任意轴的转动惯量，由此引入惯量矩阵，随后在此基

础上介绍与惯性主轴有关的一些概念。本节还将讨论惯量矩阵在坐标系平移和旋转后的变换问题。

一、绕任意轴转动惯量和绕坐标轴转动惯量的关系

本节所讨论的内容是一个一般的理论力学问题，具有普遍性，不仅仅局限用于船舶。为保持这一理论结果的一般性，在这里，我们假设所讨论的对象是一个一般的刚体对象。

让我们讨论图 1-3 实线所围成的刚体。$oxyz$ 是刚体上建立的一个坐标系，原点 o 是刚体上的一点。我们现在任取一通过原点 o 的轴线 L，讨论绕任意轴 L 的转动惯量和绕坐标轴 x,y,z 的转动惯量的关系。

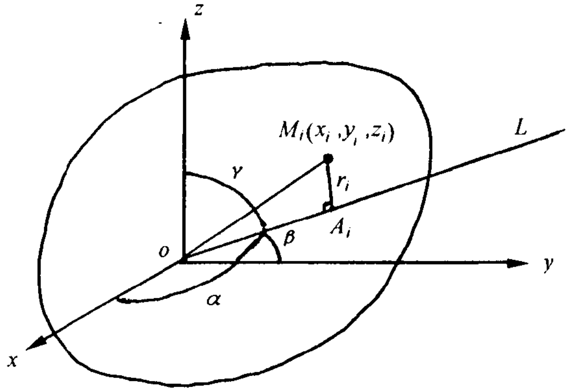

图 1-3　刚体绕任意轴的转动惯量

轴 L 的方向可用方向余弦向量 $\boldsymbol{L}$ 来表示，它的各个分量是轴 L 上的单位向量在 x，y，z 轴上的投影值，即

$$\boldsymbol{L} = (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma)^{\mathrm{T}} \tag{1-11}$$

其中 α,β,γ 分别是轴 L 与坐标轴 x,y,z 间的夹角。

把刚体分割为很多个微体积元。设点 M_i 处的微元的质量为 m_i，过点 M_i 向轴 L 作垂线 $\overline{M_iA_i}$ 得点 M_i 到轴 L 的距离 r_i。注意到

$$r_i^2 = \overline{oM}_i^2 - \overline{oA}_i^2$$

和 $\overline{oM_i}$ 在轴 L 上的投影等于 $\overline{oM_i}$ 各分量 x_i,y_i,z_i 在轴 L 上投影，即

$$\overline{oA_i} = x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma$$

可知点 M_i 处微元对轴 L 的转动惯量

$$\begin{aligned}\Delta J_L = m_ir_i^2 = {} & x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma)^2 = \\ & (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma)^2 = \\ & (y_i^2 + z_i^2)\cos^2\alpha + (z_i^2 + x_i^2)\cos^2\beta + (x_i^2 + y_i^2)\cos^2\gamma - \\ & 2y_iz_i\cos\beta\cos\gamma - 2z_ix_i\cos\gamma\cos\alpha - 2x_iy_i\cos\alpha\cos\beta\end{aligned}$$

把所有微元的转动惯量相加得到整个刚体对轴 L 的转动惯量

$$\begin{aligned}J_L = {} & \sum_i m_ir_i^2 = \\ & \cos^2\alpha\sum_i(y_i^2 + z_i^2)m_i + \cos^2\beta\sum_i(z_i^2 + x_i^2)m_i + \cos^2\gamma\sum_i(x_i^2 + y_i^2)m_i -\end{aligned}$$

$$2\cos\beta\cos\gamma\sum_i y_i z_i m_i - 2\cos\gamma\cos\alpha\sum_i x_i z_i m_i - 2\cos\alpha\cos\beta\sum_i x_i y_i m_i =$$

$$J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma + 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha + 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta \tag{1-12}$$

式中 $J_x = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)$　　刚体对 x 轴的转动惯量

$J_y = \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2)$　　刚体对 y 轴的转动惯量

$J_z = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$　　刚体对 z 轴的转动惯量

$J_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i$　　刚体对 y,z 轴的惯性积

$J_{zx} = -\sum_i m_i z_i x_i$　　刚体对 z,x 轴的惯性积

$J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$　　刚体对 x,y 轴的惯性积

式(1-12)是关于方向余弦向量 $\boldsymbol{L}$ 各分量的一个实系数的二次齐式，可写成方向余弦向量 $\boldsymbol{L}$ 的一个二次型函数，即

$$J_L = J_L(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}J\boldsymbol{L} = (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma)\begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \tag{1-13}$$

在此式中转动惯量 J_L 是一个实二次型，它是一个标量，而 J 是一个矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & y_{zy} & J_z \end{bmatrix} \tag{1-14}$$

矩阵 J 是一个三阶实对称阵，称为实二次型 J_L 的矩阵。

式(1-13)明确地表达了刚体绕任意轴转动惯量 J_L 和刚体绕坐标轴 x,y,z 的转动惯量 J_x,J_y,J_z 之间的关系。绕坐标轴转动惯量 J_x,J_y,J_z 实际上分别是绕轴 L 转动惯量 J_L(作为方向向量 L 的二次型函数)所对应的实对称阵 J 的三个主对角线元素。

二、惯量矩阵及其变换

式(1-14)的实对称阵 J 又称惯量矩阵。由矩阵 J 的各元素的定义可知，矩阵 J 除决定于刚体自身的质量分布外，还与所选择的坐标系有关。因此更准确地说，应称 J 为关于坐标系 $oxyz$ 的惯量矩阵。另外还可看到，尽管矩阵 J 在前面的讨论中是通过推导刚体对轴 L 的转动惯量引入的，但矩阵 J 本身与前面讨论中具体选择哪一个轴 L 并无任何关系。矩阵 J 所表达的只是刚体对 给定坐标系的惯量性质。

下面讨论惯量矩阵 J 在坐标系改变后的变化，分坐标系平移和坐标系旋转两种情况加以讨论。

(一)惯量矩阵 J 在坐标系平移时的变化

今有质量为 M 的刚体，设平移前的坐标系是 $oxyz$，平移后新坐标系是 $o'x'y'z'$。新坐标系的原点在原坐标系中的坐标是(d_x,d_y,d_z)，见图 1-4。据此可定义点 o'的位置向量

$$\boldsymbol{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^{\mathrm{T}} \tag{1-15}$$

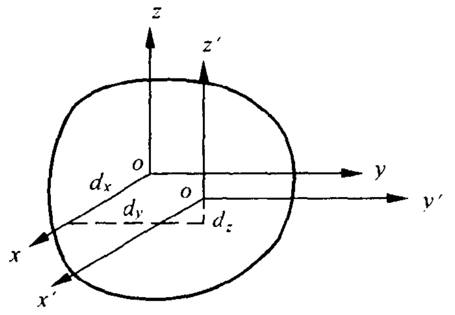

图 1-4　矩阵 J 在坐标平移时的变化

又设坐标平移前刚体重心 G 的坐标是(x_G, y_G, z_G)，据此可定义重心 G 的位置向量

$$\boldsymbol{R}_G = (x_G \quad y_G \quad z_G)^{\mathrm{T}} \tag{1-16}$$

按式(1-12)可算得坐标系平移后刚体对坐标轴 x'的转动惯量

$$\begin{aligned} J_{x'} &= \sum_i m_i[(y_i - d_y)^2 + (z_i - d_z)^2] \\ &= \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) + (d_y^2 + d_z^2)\sum_i m_i - 2d_y\sum_i m_i y_i - 2d_z\sum_i m_i z_i \\ &= J_x + M(d_y^2 + d_z^2) - 2d_y M y_G - 2d_z M z_G \end{aligned} \tag{1-17}$$

同样推导可得

$$J_{y'} = J_y + M(d_z^2 + d_x^2) - 2d_z M z_G - 2d_x M x_G \tag{1-18}$$

$$J_{z'} = J_z + M(d_x^2 + d_y^2) - 2d_x M x_G - 2d_y M y_G \tag{1-19}$$

由式(1-12)还可算得坐标系平移后刚体对坐标轴 y'，z'的惯性积

$$\begin{aligned} J'_{yz} &= -\sum_i m_i(y_i - d_y)(z_i - d_z) \\ &= -\sum_i m_i y_i z_i - d_y d_z\sum_i m_i + d_y\sum_i m_i z_i + d_z\sum_i m_i y_i \\ &= J_{yz} - M d_y d_z + d_y M z_G + d_z M y_G \end{aligned} \tag{1-20}$$

同样推导可得

$$J'_{zx} = J_{zx} - M d_z d_x + d_z M x_G + d_x M z_G \tag{1-21}$$

$$J'_{xy} = J_{xy} - M d_x d_y + d_x M y_G + d_y M x_G \tag{1-22}$$

根据式(1-17)至式(1-22)可知，刚体在坐标系由 $oxyz$ 平移到$o'x'y'z'$后，其惯量矩阵将由 J 改变为

$$J' = \begin{bmatrix} J'_x & J'_{xy} & J'_{zx} \\ J'_{xy} & J'_y & J'_{yz} \\ J'_{zx} & J'_{yz} & J'_z \end{bmatrix} \tag{1-23}$$

此式是计算刚体在坐标系发生平移后的惯量矩阵的一般公式。

下面根据式(1-23)给出两个常用的特定情况下的公式。

1. 平移前坐标系原点位于刚体重心 G 的情况

这种情况下因为

$$x_G = y_G = z_G = 0$$

前面的公式将得到简化,可知

$$J' = \begin{bmatrix} J'_x & J'_{xy} & J'_{zx} \\ J'_{xy} & J'_y & J'_{yz} \\ y'_{zx} & J'_{yz} & J'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x + M(d_y^2 + d_z^2) & J_{xy} - Md_xd_y & J_{zx} - Md_zd_x \\ J_{xy} - Md_xd_y & J_y + M(d_z^2 + d_x^2) & J_{yz} - Md_yd_z \\ J_{zx} - Md_zd_x & J_{yz} - Md_yd_z & J_z + M(d_x^2 + d_y^2) \end{bmatrix}$$

$$= J + M\begin{bmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_xd_y & -d_zd_x \\ -d_xd_y & d_z^2 + d_x^2 & -d_yd_z \\ -d_zd_x & -d_yd_z & d_x^2 + d_y^2 \end{bmatrix} \tag{1-24}$$

2. 平移后坐标系原点移到刚体重心 G 的情况

这种情况下必有

$$x_G = d_x \qquad y_G = d_y \qquad z_G = d_Z$$

通过计算可得到

$$J' = \begin{bmatrix} J'_x & J'_{xy} & J'_{zx} \\ J'_{xy} & J'_y & J'_{yz} \\ J'_{zx} & J'_{yz} & J'_z \end{bmatrix} = J - M\begin{bmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_xd_y & -d_zd_x \\ -d_xd_y & d_z^2 + d_x^2 & -d_yd_z \\ -d_zd_x & -d_yd_z & d_x^2 + d_y^2 \end{bmatrix} \tag{1-25}$$

(二)惯量矩阵 J 在坐标系旋转时的变化

让我们研究图 1-3 刚体绕轴 L 的转动惯量表达式(1-13)随坐标系的改变。设坐标系 $oxyz$ 经绕任意一个轴旋转后改变为 $o'x'y'z'$。由 $oxyz$ 到 $o'x'y'z'$ 的变换显然是一正交变换。今设对应的正交变换阵为 $\boldsymbol{Q}$,并且轴 L 的新旧方向余弦向量之间的关系可以表示为

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{L} \tag{1-26}$$

展开后可写成

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha' \\ \cos\beta' \\ \cos\gamma' \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

注意到正交阵的逆阵等于其转置阵的性质,得到

$$(\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma) = (\cos\alpha' \quad \cos\beta' \quad \cos\gamma')Q$$

把式(1-13)的对轴 L 的转动惯量值用新的方向余弦向量表示,即把 $\boldsymbol{L}$ 代换为 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}'$ 可得

$$J_L = \boldsymbol{L}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}J\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}' \tag{1-27}$$

另一方面,新坐标系下对轴 L 的转动惯量可用新的惯量矩阵表示为

$$J_L = \boldsymbol{L}'^{\mathrm{T}}J'\boldsymbol{L}'$$

与式(1-27)对照可知,坐标系旋转后的新旧惯量矩阵有以下的关系式

$$J' = \boldsymbol{Q}J\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{1-28}$$

此式展开后可写成

$$\begin{bmatrix} J'_x & J'_{xy} & J'_{zx} \\ J'_{xy} & J'_y & J'_{yz} \\ J'_{zx} & J'_{yz} & y'_z \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{zx} \\ J_{xy} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{yz} & y_z \end{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}$$

三、惯性主轴和重心惯性主轴

通过坐标系旋转可使惯量矩阵对角化。注意到惯量矩阵 J 是一个实对称阵，使之实现对角化的坐标变换阵将是实正交阵。所以必存在实正交阵 P，经正交变换

$$PJP^{\mathrm{T}} = J_o \tag{1-29}$$

或

$$J = P^{\mathrm{T}}J_oP \tag{1-30}$$

后能把 J 化为对角形惯量矩阵 J_o，J_o 可表示为

$$J_o = \begin{bmatrix} J_{xo} & & \\ & J_{yo} & \\ & & J_{zo} \end{bmatrix} \tag{1-31}$$

此正交阵 P 对应着一个特定的坐标系旋转变换。对比式(1-28)知，P 实际上是式(1-28)旋转变换阵 Q 的一个特殊情况，所不同的只是它能把惯量矩阵化为对角阵。为表达变换前后的关系，把式(1-30)代入式(1-31)，得到

$$J_L = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}J_oP\boldsymbol{L}$$

令 $\boldsymbol{L}_o = P\boldsymbol{L}$，可进一步得到

$$J_L = \boldsymbol{L}_o^{\mathrm{T}}J_o\boldsymbol{L}_o$$

此二式的展开形式为

$$\begin{aligned} J_L &= (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma)P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} J_{xo} & & \\ & J_{yo} & \\ & & J_{zo} \end{bmatrix}P\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \\ &= (\cos\alpha_o \quad \cos\beta_o \quad \cos\gamma_o)\begin{bmatrix} J_{xo} & & \\ & J_{yo} & \\ & & J_{zo} \end{bmatrix}P\begin{bmatrix} \cos\alpha_o \\ \cos\beta_o \\ \cos\gamma_o \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上分析结果表明，对任何惯量矩阵 J，总可找到正交变换 P，实行 P 所对应的坐标系变换后，在新的坐标系下，惯量矩阵 J 将被变换为对角阵 J_o，同时使刚体绕轴 L 的转动惯量表达式化简为

$$J_L = J_{xo}\cos^2\alpha_o + J_{yo}\cos^2\beta_o + J_{zo}\cos^2\gamma_o \tag{1-32}$$

我们将把经变换 P 后所得到的坐标系的三个坐标轴称为刚体的惯性主轴，并把变换后的惯量阵 J_o 的主对角线元素 J_{xo}，J_{yo}，J_{zo} 分别称为相对于惯性主轴 x，y，z 的主惯量。

在上面的讨论中，坐标系原点可置于刚体的任何位置，因此可断言，在刚体的任意点上通过选择适当的正交坐标系变换阵都可得到三个惯性主轴。

同样，在刚体重心处也可以得到三个惯性主轴，这三个通过重心的惯性主轴被称为惯性重心主轴。在惯性重心主轴坐标系下，惯量矩阵三个主对角元素的平方和，即主惯量 J_{xo}，J_{yo}，J_{zo} 的平方和将取最小值。

分析表明，刚体如果有对称面，对于对称面上的点来说，它的三个惯性主轴中必定有两个惯性主轴在对称面上，另一个惯性主轴垂直于该对称面。

可以证明，物体的对称轴必为物体的一个惯性重心主轴。

下面我们来证明，如果使刚体的惯性重心主轴坐标系沿任一条惯性重心主轴平行移