科學圖書大庫

數學與邏輯推理 下冊

（邏輯推論之模式）

譯者 田成俠

校閱 潘壽山

徐氏基金會出版

徐氏基金會

科學圖書大庫

引介世界科技新知
協助國家科學發展

發行編號 0347—2

科學圖書大庫

數學與逼眞推理 下冊

（逼眞推論之模式）

譯者　田成俠
校閱　潘壽山

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十四日三版

數學與邏輯推理　下冊

(邏輯推論之模式)

基本定價　1.80

校閱　潘壽山　輔仁大學教授兼會計統計學系主任

譯者　田成俠　國立台灣大學法學士

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號

發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號

承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

前　言

歸納推理是許多爭論不休的哲學問題之一，也是迄今歷久不衰的問題之一。仔細讀過本書上册的讀者已經獲有良好的機會認識二件事。第一，歸納及類推推理在數學發明上佔了主要地位，其次，歸納及類推推理均屬逼眞推理之特例。依我的看法，以逼眞推理這一普遍觀念之考慮取代其孤立之特例更具哲學意味。下册之目的即在形成若干逼眞推理之模型，研究其與概率演算(alculus of probability)之關係，以及察驗在何種意義下可以視之爲逼眞推理之"法則"。其與數學上的發明與教學之關係亦將略加討論。

此下册之文，並不明顯的參照上册，讀者很可以不用查閱上册之文便能夠瞭解主要的關係。附於各章之諸問題中，有些必須參閱上册，否則無法求得其解，但就大體而言，你可以不必讀過上册，便能夠看得懂下册。當然，比較合理自然的是先讀完上册再看下册，因爲上册中之例子裡提供了許多研究上的實驗論據及較豐富的背景。

這些論據及背景，有見於我們將要採用的方法，均係特別的需要。我希望以博物學者之態度研究逼眞推理：搜集觀察所得資料，敍述結論以及強調支持結論之諸點。但是我尊重讀者之判斷，而不欲強使或誘使其採取相同之結論。

雖然，本書所採之觀點並無意指爲最終者，事實上，有若干處我認爲極需要加以或多或少之改進。然而，我相信主要方向是正確的。也相信本書之各種討論，尤其是有關的例題，可以說明逼眞推理，特別是歸納推理的"雙重性質"(double nature)及"補充性質"(complementarv aspects)；歸納推理有時似乎是"客觀的"，有時似乎又是"主觀的"。

史坦福大學　　　　　　　　　　　　　　包利亞(George Polya)

1953年5月

敬告讀者

第七章第二節，在第七章引用時簡稱節 2，在其他各章時則稱節 7.2，第十四章第五節第三項在第十四章之內稱節 5 (3)，在其他章則稱節 14.5(3)，第十四章例題二十六，在同一章則稱例題26，在其他章則稱例題 14.26。

略具初等代數與初等幾何之知識即是以看懂本書之主要部份，如果再加上解析幾何與微積分的知識，包括有限級數及無限級數，則幾乎可以遍覽全書以及大部份的例題與評論而不致於遭逢困難。但是在若干偶然的陳述；擬議的問題與某些評論中，或許需要更進一步的知識。通常在需要更進一步的知識時，會提醒讀者注意的。

程度較高的讀者對於那些看來太簡單太基本部份的忽略，其損失將大於初習者對於過於複雜部份的略讀。

證明的細節部份，如果不太困難，可能常常不預示而予以省略，有挑剔習慣的讀者只要面對這種不測事件的準備夠充分也就勿須指責其不當了。

所擬定待解的某些問題可能非常簡易，但有些則不尋常的困難。幫助解答的某些暗示則以方括弧〔 〕示之。其前後的問題也會寓有線索在內，在若干章或第一部份或第二部份之前的例題緒言(introductory lines)中的文字，應該特別仔細的閱讀。

解答有時很短：這種情形是假定讀者在對解答之前會亟欲依自己的方法求問題的答案。

只要讀者在問題上苦思過，即使解答不出來，還是會得到很多的好處。例如，他可以先看解答，試將他認爲是解答的觀念分開，把書放在一邊，然後再自己求出解答來。

有些地方，用了很多圖形，或者在導出的步驟中走碎步，目的是在使讀者明瞭圖形或公式如何演變而已。例如，圖 16.1 — 16.5 是。但是沒有一本會有過多的圖形或公式的，讀者讀一篇文字或用大約的態度或用徹底的態度皆無不可，但若欲徹底瞭解或暗示，則必須隨時將紙筆準備在手邊，就是必須準備寫下或畫出任何書中已知的公式或圖形，這樣做，較能有機會看出圖形或公式的變成，各細節部份對產生答案的影響以及記住整個來龍去脈。

目　次

第十二章　若干顯著的模式

在這個階段，我並不希望檢驗論證的此種邏輯證明，目前，我視之爲一種應用，可以在人類及動物的智性中獲致。——羅素 (Bertrand Russell)（註一）

1.　結論之印證

本書上卷關於數學上之歸納與類推，我們已經發現若干能夠對於逼眞推理之應用略知一二的機會。在本卷中則擬着重陳述其一般化的性質。第一部的例題業已指示若干推理之形式或模式。本章則擬明確的將此類模式予以公式化。（註二）

我們以逼眞推論之一個模式開始，此模式普遍的爲人所用，幾乎可以在任何例子中抽取而出。但我們討論一個未曾討論過的例子。

下列推測係尤拉所作（註三），任何具 $8n+3$ 形式之整數均爲平方與質數二倍之和，他未能證明此推測，證明之困難今日看來似乎較之當日猶有過之而無不及。但尤拉對於 200 以下之具 $8n+3$ 形式之所有整數均證明其推測爲眞；對 $n=1, 2, \cdots 10$ 見表 1。

表　1

$$11 = 1 + 2 \times 5$$

$$19 = 9 + 2 \times 5$$

$$27 = 1 + 2 \times 13$$

$$35 = 1 + 2 \times 17 = 9 + 2 \times 13 = 25 + 2 \times 5$$

$$43 = 9 + 2 \times 17$$

（註一）哲學(Philosophy)，諾頓公司（W. W. Norton & Co.），1927，第80頁

（註二）此章部份曾見於我的演說"論逼眞推理"載於Proceedings of the International Congress of Mathematician 1950. 卷一，第739—747頁。

$$51 = 25 + 2 \times 13$$

$$59 = 1 + 2 \times 29 = 25 + 2 \times 17 = 49 + 2 \times 5$$

$$67 = 9 + 2 \times 29$$

$$75 = 1 + 2 \times 37 = 49 + 2 \times 13$$

$$83 = 1 + 2 \times 41 = 9 + 2 \times 37 = 25 + 2 \times 29 = 49 + 2 \times 17$$

這種經驗的工作能夠很容易繼續下去；在1000以下之數均無例外發現(註四)。這足以證明尤拉的推測嗎？決不能；即使證實到1,000,000均成立，也不能說此推測已經證明了。但每一次證實的使此推測憑添幾分可靠性，從此可見其一般模式。

令A表若干顯明公式化之推測，不過在目前既未得到證明，也未獲致反證者。(例如，A可以是對$n = 1, 2, 3, \cdots$之尤拉的推測

$$8n + 3 = x^2 + 2p$$

此處x爲整數，p爲質數)。令B表A之若干結論，B也是顯明陳述，但未經證明其爲眞或假者。(例如，B可以是不見於表1，主張$91 = x^2 + 2p$尤拉推測之特例)。此刻我們猶未確知A或B之眞假，然而我們確知

$$A \text{ 涵 } B$$

現在，我們要檢驗B(少許試驗便足以顯示關於91之主張是否正確)，如果檢驗結果B不成立，則可得結論A亦不成立，這非常明顯，無庸贅言。這裡我們舉一個古典而基本推理模式，即所謂假言兩段論之離斷規律 (modus tollens)：

$$\begin{array}{c} A \text{ 涵 } B \\ B \text{ 假} \\ \hline A \text{ 假} \end{array}$$

分開兩前提與結論之橫線通常的意義爲"因此或故"(therefore)。這裡我們看到一個著名的證明推論的例子。

如果結果B爲眞則又如何？(實際上，$91 = 9 + 2 \times 41 = 81 + 2 \times 5$)。無證明性結論：其結論$B$之證實並不證明推測$A$爲眞，但這種證實使$A$更

(註三) Opera Omnia, 叢書一，卷四，第120—124頁。在此文，尤拉視1爲質數，這對於例案$3 = 1 + 2 \times 1$之說明爲必要的。

(註四) 李默(D. H. Lehmer)教授之書信

爲可信。（尤拉之推測，既在一個以上之例案獲得證明，故變得較爲可信）。我們可得一可靠推論之模式：

$$A \text{ 涵 } B$$

$$B \text{ 眞}$$

$$\overline{\phantom{A\text{ 愈爲可信}}}$$

$$A \text{ 愈爲可信}$$

橫線的意思也是"因此或故"我們稱此模式爲基本歸納模式或簡稱"歸納模式"(inductive pattern)。

此歸納模式並無驚人之處，反之，它表達一個理性的人所不懷疑的信念：結論之證實使推測更爲可信。稍加注意，我們便可以在日常生活裏、法庭中、科學上等等看到無數的推理，皆合於此模式。

2. 若干結論之繼續印證

本節我用片語"定理之研討"(discussion of a theorem)表科學意義之"定理之若干特例與若干更直接結論之討論或研究"。我認爲此處所考慮之定理的研討，在高班及低班中均有益。我們來考慮一個非常基本的例子。假定你教一班的立體幾何，你面臨的問題是導出錐之平截頭體的側面積公式。當然此錐爲直立圓錐，已知底R之半徑，頂r之半徑及高h，經由一般的求導可得結論：

A. 此平截頭體之側面積爲

$$\pi(R+r)\cdot\sqrt{(R-r)^2+h^2}$$

以後引用此定理時則稱之爲定理A。

現在我們開始研討此定理。你問學生：你們能驗算此結果嗎？如果沒有反應，則你更明顯的暗示：你能夠應用此定理以驗算此結果嗎？你們能夠應用此定理於已知的某些特例以驗算它嗎？終而由於班上部份同學的協作，你可以記下許多已知之例案。如$R=r$，可得一有名的特例：

B_1. 柱之側面積爲$2\pi rh$.

當然，h爲柱之高，r爲其底之半徑。在下文中引用時，我們稱B_1爲A之結論。結論B_1，已經在班上處理完畢，因此它成爲A之證據。

設$r=0$則可得一特例，因此產生：

B_2. 錐之側面積爲$\pi R\sqrt{R^2+h^2}$

h表錐之高，R表其底之半徑。此A之結論B_2亦爲不爭之論，故可作爲A之進一步證據。

對應 $h=0$ 有一個較不明顯的，但有趣之特例爲：

B_3. 二半徑 R 及 r 之同心圓的環形面積爲 $\pi R^2-\pi r^2$

A 之結論 B_3 已見證於平面幾何，故又可作爲 A 之另一證據。

上述三特例，都因以前之研究而成爲已知，從三方面支持 A，此三圖形（柱，錐及環形），分別對應 $r=R$，$r=0$ 及 $h=0$）顯得很不相同。你們也可以提及最特例 $r=h=0$。

B_4. 半徑 R 圓之面積爲 πR^2

我有時候發現，在最後一排的學生似乎睡着了，直到仔細求導完畢才醒來，對於研討之進展頗表興趣。公式之求導，很顯然的淺近容易，但對他則似乎深奧困難。他並不因求導而相信，但卻因研討而更爲相信：他認爲一個公式經過這許多不同例案的驗算該更爲可靠。在這樣想的時候，他是依非常相近的逼眞推理之模式，但較基本歸納模式矯揉造作：

$$\begin{array}{c} A \text{ 涵 } B_{n+1} \\ B_{n+1} \text{ 與前述已印證 } A \text{ 之諸結論 } B_1, B_2, \cdots B_n \text{ 極不相同} \\ B_{n+1} \text{ 眞} \\ \hline A \text{ 更爲可信} \end{array}$$

此模式對基本歸納模式增加了一個限制。任何結論之證明確實能增進我們對推測之信心，但是某些結論之證明所能增強之信心較其他結論之證明爲高。剛才討論的模式使我們注意一個對於歸納證據之強化有極大影響之情況：大量結論之試驗。如果新結論與諸前結論大不相同，則其印證愈能增加吾人之信心。

現在讓我們看看問題的另一面，茲以前述節 1 之例爲例，尤拉推測之表 I 中之連續例案之印證看來其相互間極爲相似——除非我們注意到某些隱藏的線索，但觀察這種線索似乎非常困難。因此，過不了多久，我們便會對這種單調的印證序列感到乏味。印證了若干例案之後，我們躊躇了。是否值得再去處理下一個例案？下一個例案如果答案是否定的，則推翻了推測——但是次一例案在所有已知方面必均與已印證之諸前例極爲相似，故我們幾乎不可能期待會有否定的結果發生。次一例案，如果答案是肯定的，會增強吾人對尤拉推測之信心，但是這種信心之增強微乎其微，根本不值得化功夫去做麻煩的試驗。

這樣的考慮提示下列模式，雖與前述基本上並無不同，但確係其補充之形式：

$$\begin{array}{c} A \text{ 涵 } B_{n+1} \\ B_{n+1} \text{ 與前述已印證} A \text{之諸結論} B_1, B_2, \cdots B_n \text{ 極相似} \\ B_{n+1} \text{ 眞} \\ \hline A \text{ 稍增可信} \end{array}$$

新結論印證對推測信心增強之多少視其與前述已印證結論不同的程度而別。

3. 未必結論之證實

在一篇有名的短筆記中（註五），尤拉對參數 n 之正值考慮對 x 之所有值均收斂的級數

$$(1)\quad 1-\frac{x^2}{n(n+1)}+\frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{x^6}{n\cdots(n+5)}+\cdots$$

他觀察到級數之和及其當 $n=1, 2, 3, 4$ 時之根。

$n=1$: 和 $\cos x$, 　零 $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2\cdots$

$n=2$: 和 $(\sin x)/x$, 　零 $\pm\pi+2\pi, \pm 3\pi, \cdots$

$n=3$: 和 $2(1-\cos x)/x^2$, 　零 $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$,

$n=4$: 和 $6(x-\sin x)/x^3$, 　無實零 (real zeros)

尤拉發現了一個區別：在頭三個實例中所有的零均為實數，但最後一個實例則無實數零。他也在頭兩個實例與第三個實例間發現了一個巧妙的分別：當 $n=1$ 及 $n=2$ 時，相隣零之間的距離爲 π（假設我們不考慮例案 $n=2$ 中次於原點之零點），但對 $n=3$ 則相隣零點間之距離則爲 2π（同前條件）。這使他獲致驚人的發現：例 $n=3$ 中所有的零均爲"重零"(double zeros)。尤拉說："但是我們從分析可知方程之二根從實根轉變到虛根時永遠重合。因此，我們會明白當我們取 n 之值超過三時，爲什麽所有的零都忽然一下子都變成虛的了。以此觀察爲基礎，他敍述了一個驚人的推測：由級數(1)所限制之函數，當 $0<n\leq 3$ 時，僅有實零且其數無窮，但是當 $n>3$ 時則全然無實零。在此敍詞中他視 n 爲繼續改變之參數。

在尤拉時代，關於超越方程零之實性，尚屬嶄新之觀念，即使今日我們尚無有系統的方法決定此種方程。（例如，我們無法證明或反證李曼的有名假說）。故尤拉的推測顯得極爲大膽。我覺得他的勇氣與陳述之明確令人敬

(註五) Opera Omnia，叢書一，卷十六，節一，第241頁—265頁

佩。

但尤拉可讚佩的成就當然也是限於某範圍。其他的專家在處理其他題目時成就了相似的特徵，而我們每一個人在日常生活中也都有相同的情事發生。事實上，尤拉是從一些零散的細節猜測整體之全形。與考古學家從破損的石頭中之零落文字依某種合理的方法重組整個文字的情形極爲相似。化石學家在查驗一些化石後可以可靠的描繪出整個動物的情形。當一個人對某人瞭解極深，則當某人以某種方式開始談話時，則你在聽到若干句話後便可預言其欲說之整個梗概完全相同，尤拉猜測整個推測，整個數學上情況，也是從一些顯然可辨識之點而來。

尚有必要注意的是他僅從考慮四個例案 $n = 1, 2, 3, 4$ 而猜測整個推測。然而，我們不宜忘記間接證據可能非常強。某被告被控以炸燬其女友父親的遊艇，檢方提出由被告所簽字購買若干炸藥之收據爲證，此證據對檢方之控訴極爲有力。爲什麼？一般人民買炸藥，本身便是非常不尋常的事，但是此種購買之意欲炸物或人，則顯然完全無疑，請注意此案與尤拉數之例 $n = 3$ 非常相似。一任意寫下之方程之所有諸根結果均變成重根，其本身便是不尋常之情形。但是當二實根轉變成二虛根時，重根之瞭解是完全可以瞭解的。例案 $n = 3$ 是由尤拉所提最強的直接證據，因此我們可以察覺出一個一般的逼眞推論：

A 涵 B

B 之本身高度的未必可信

B 眞

A 大爲可信

此模式對基本歸納模式（節 1、）而言，仍然係修正的或矯揉造作者，我們暫時不加特別說明，先加補充的模式，此模式從反面看來是說明同一觀點：

A 涵 B

B 之本身相當未必可信

B 眞

A 僅稍增可信

結論證明之可信程度高低視結論本身未必可信之程度而定。最驚人之印證最爲可信。

順便一提，尤拉是正確的：150 年後，他的推測得到完全證明(註六)。

4. 類推之推論

此時若溫習一下上册關於歸納與類推之例子，則必有所獲。在此章前述數節我們已經用公式表示了逼眞推論之若干模式：那些例子如何在這些模式中出現？

讓我們再考慮二個有關之例子（分別從卷1之節10.1及10.4）。其一係與等周定理及笛卡兒有關，其一係與等周定理之物理上相似物及雪利有關。我們從第十章複製二表併列於此（在該章分別稱爲表Ⅰ及表Ⅱ，在此處則稱之爲表Ⅱ及表Ⅲ）。表Ⅱ（如此處所賦予之號數）所列爲十個圖形之周長，每一個的面積均等於1，表Ⅲ所列則爲同樣十個圖形之主頻率（視作振動膜）。

表Ⅱ

等面積圖形之周長

圓	3.55
正方	4.00
象眼	4.03
矩形 3：2	4.08
半圓	4.10
六分圓	4.21
矩形 2：1	4.24
等邊三角形	4.56
矩形 3：1	4.64
等腰直角三角形	4.84

表Ⅲ

等面積薄膜之頻率

圓	4.261
正方	4.443
象眼	4.551
六分圓	4.616
矩形 3：2	4.624
等邊三角形	4.774
半圓	4.803
矩形 2：1	4.967
等腰直角三角形	4.967
矩形 3：1	5.736

表Ⅱ中之周長及表Ⅲ中之頻率均順序增加，二表均以圓開始，其周長在十圖形中最小，其頻率亦最低，這提示二定理：

（註六）參見著者論文：Soprama equazione transcendente trattata da Eulero, Bolletino dell' Unione Matematica Italiana，卷五，1926，第64—68頁

等面積之所有平面圖形中，圓之周長最短。

等面積之所有薄膜中，圓之主頻率最低。

第一個述辭即等周定理，第二個述辭則爲雪利可讀揚的推測。上列二表雖對二述詞均產生堅強的歸納證據，但當然不是證明。

自從我們在節10.1及10.4考慮這些表後，情形已經改觀。同時我們已經見到等周定理之證明（節10.6－10.8，例10.1－10.15）圓之幾何上極小性質，即表Ⅱ所支持者，已經獲得證明，故很自然的會期待由表Ⅲ所支持之圓的物理上相似的極小性質亦成立。在這樣期待時，我們遵循下列重要的可靠推論模式：

$$\frac{\begin{array}{c}A\ \text{類似}\ B\\ B\ \text{眞}\end{array}}{A\ \text{愈可信}}$$

當一個類似的推測結果爲眞時則推測變成愈爲可信。

此模式對於研討情況的應用似乎是可感覺的，但在這情形中尚有更進一步的有希望之象徵。

5. 類推之深入

並列的表Ⅱ及表Ⅲ似乎提供更多的提示。所考慮之十圖形在二表中之順序並不完全一致。關於此順序可能有特殊之處。表Ⅱ之排列與表Ⅲ者似乎差異不大，但這不是要點所在。二表包含各種圖形：矩形、三角形、扇形。同種的圖形是如何排列的？如果僅某一種的諸圖形列在較短之表又如何？二表均含一些正圖形、等邊三角形、正方形以及不宜忘的圓。這些正圖形是如何排列的？我們能以稍微不同種的圖形，例如，三角形與扇形比較嗎？我們能否藉增加更多的圖形入表中以拓寬歸納之基礎？（在這點我們大受限制。計算面積及周長並不難，但主頻率實在不易控制，其顯明的表徵僅在多數情形中始得見）。終於我們可得表Ⅲ。

表Ⅳ展示一種可注意的平行，在這些依可變平面圖形之形狀而定之二量之間：周長與主頻率。（我們不該忘記可變圖形之面積是固定的，＝1）。如果我們知道周長，則決不能計算出主頻率，反之亦然。但從表Ⅳ判斷，我們該認爲，在簡單例案，這二量同方向變化。考慮此表中數字資料之二行並從一列推到任意另一列：如果在一行中數字增加，則另一行中必對應增加，若一行遞減則另一行必也遞減。

表 Ⅳ

等面積圖形之周長與主頻率

圖　形	周　長	主頻率
矩形：		
1：1（正方形）	4.00	4.443
3：2	4.08	4.624
2：1	4.24	4.967
3：1	4.64	5.736
三角形		
60°60°60°	4.56	4.774
45°45°90°	4.84	4.967
30°60°96°	5.08	5.157
扇形		
180°（半圓）	4.10	4.803
90°（象眼）	4.03	4.551
60°（六分圓）	4.21	4.616
45°	4.44	4.755
36°	4.68	4.916
30°	4.93	5.084
正方形：		
圓	3.55	4.261
正方形	4.00	4.443
等邊三角形	4.56	4.774
三角形對扇形		
三角 60°60°60°	4.56	4.774
扇形 60°	4.21	4.616
三角 45°45°90°	4.84	4.967
扇形 45°	4.64	4.755
三角 30°60°90°	5.08	5.157
扇形 30°	4.93	5.084