钱伟长 主编

非线性力学的新发展——

稳定性、分叉、突变、浑沌

华中理工大学出版社

非线性力学的新发展

——稳定性、分叉、突变、浑沌

钱伟长 主编

编辑小组

李家春 金和 戴世强

责任编辑 金和

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：11.5 插页：1 字数：278 000

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

印数：1—3 000

ISBN 7-5609-0160-3/O·20

定价：5.85 元

内 容 提 要

非线性问题是当前国际上力学科学的研究前沿。本书系统地介绍了其中的稳定性、分叉、突变和混沌四方面十分重要而又互相关联的课题，包括其力学背景，数学理论和近期进展。它们不仅在力学，而且在其它自然科学乃至社会科学的领域中有着广泛的应用。

本书的出版，必将对我国应用数学、力学、物理学及其它有关学科的研究工作起推动作用。

目　录

序 ……………………………………………………………………………………(1)

第一章　连续体力学中的稳定性…………………………………………(3)

结构的塑性静动态稳定性 ……………………王　仁(4)

§1　引言 ……………………………………………………………(4)

§2　稳定性准则 ……………………………………………………(8)

§3　简单模型的静态塑性稳定性分析 …………………………(10)

§4　壳体的静态塑性稳定性分析 ………………………………(17)

§5　简单模型的动态塑性稳定性分析 …………………………(23)

§6　准分叉理论（以简支梁的动力屈曲为例） ………(28)

§7　柱壳受均布径向冲击速度的塑性动屈曲 …………(29)

§8　柱壳受轴向冲击的塑性动屈曲 ……………………………(31)

§9　动力屈曲和应力波 ……………………………………………(33)

参考文献 ……………………………………………………………………(34)

流体运动稳定性 …………………………………………周　恒(36)

§1　概述 ……………………………………………………………………(36)

§2　平行流稳定性线性理论简介 …………………………………(38)

§3　形状假设理论 ………………………………………………………(44)

§4　K-Б 法………………………………………………………………(49)

§5　三维扰动的非线性问题 ………………………………………(57)

§6　同心圆柱间Couette 流的线性理论…………………………(65)

§7　圆周Couette 流的非线性理论…………………………………(69)

§8　非线性问题的数值方法 ………………………………………(73)

§9　结束语 ……………………………………………………………(74)

参考文献 ……………………………………………………………………(75)

第二章　分叉…………………………………………………………………（78）

分叉与转捩 …………………………………………李家春（79）
§1　分叉理论概述 ……………………………………………（80）
§2　在转捩问题中的应用 ……………………………………（94）
§3　结束语 ……………………………………………………（110）
参考文献 ……………………………………………………（111）
分叉与屈曲 ………………………………朱正佑、程昌钧（113）
§1　不可伸长直杆的屈曲与分叉 ……………………………（113）
§2　可伸长杆的屈曲 …………………………………………（121）
§3　圆环和拱的屈曲 …………………………………………（131）
§4　圆板的屈曲 ………………………………………………（138）
§5　矩形板的屈曲 ……………………………………………（145）
参考文献 ……………………………………………………（151）
分叉的数学理论和方法 ……………………………邓洊涛（154）
§1　引言 ………………………………………………………（154）
§2　基于隐函数定理的分叉理论 ……………………………（154）
§3　基于拓扑度定理的大范围分叉理论 ……………………（171）
§4　基于变分法的分叉理论 …………………………………（179）
参考文献 ……………………………………………………（185）

第三章　突变理论 ……………………………凌复华　张君明（188）

§1　引言 ………………………………………………………（188）
§2　初等突变理论 ……………………………………………（189）
§3　初等突变理论的应用 ……………………………………（231）
§4　非初等突变理论 …………………………………………（261）
§5　结束语 ……………………………………………………（267）
参考文献 ……………………………………………………（268）

第四章　浑沌 ……………………………………………朱照宣（270）

§1　什么是浑沌 ………………………………………………（271）
§2　一维迭代 …………………………………………………（282）

§ 3　二维迭代 ……………………………………………………（297）
§ 4　非线性系统的受迫振动 ……………………………………（309）
§ 5　Lorenz 方程 …………………………………………………（326）
§ 6　哈密顿系统 …………………………………………………（338）
§ 7　几种统计特征 ………………………………………………（358）
参考文献 ……………………………………………………………（363）

序

本书是根据中国力学学会理性力学和力学中的数学方法专业组，1983年11月在武昌华中理工大学召开的稳定性、分叉、突变、浑沌讨论会上所宣读的论文，系统地整理编辑的。本书的出版，必将对力学界、应用数学界、理论物理界的工作起开拓作用。在这里，我们必须提到编辑本书的李家春、金和、戴世强等同志，对他们的辛勤劳动，表示深切的感谢！

长期以来，力学工作者所研究的力学对象，都是常规的，渐变的或周期性的，稳定的平衡和运动问题。即使平衡和运动的失稳问题，也只从线性问题研究其失稳的临界条件。在1939年卡门和钱学森曾发现了薄壳的非线性失稳的载荷只有线性失稳的载荷的三分之一，而且指出失稳后还存在着新的平衡状态。在1948年和1956年钱伟长研究了扁球壳和跳跃变形问题，指出了当扁壳在非线性跳跃失稳后取得新的平衡状态，如果从新的平衡状态下卸载时，会在另一新的临界载荷下突然跳跃恢复原状。这是首次研究的突变问题。在60年代，人们对本问题发生了广泛兴趣，做了许多实验和理论的研究，自1970年起逐渐确立了目前的突变理论。我们必须指出，扁球壳的跳跃问题并不是什么纯理论问题，而是深水潜艇的测压自控元件，这个问题是真正的理论联系实际的问题。当然，突变理论有广泛的实用价值，而且上述扁壳问题只是突变理论中最初等的问题，还有许多更复杂的突变理论问题是当前力学和应用数学界工作的对象。

从20年代起，应用数学界就注意了微分方程解的分叉问题。40年代初期，象K.O.Friedrich等就注意到稳定问题和分叉的联系。一直到最近，人们注意到分叉后再分叉现象的存在，当多

层次的分叉连续进行时造成的“浑沌”现象。这种数学现象将对人们理解湍流有很大的帮助。所以，近年来人们对分叉、浑沌的研究，风起云涌。这是我们很值得重视的新领域。

本书着重介绍了稳定性、分叉、突变和浑沌四个问题的力学背景和应用数学的各种处理方法，以供国内同行的参考。

这里也必须感谢华中理工大学出版社对于出版本书的支持。

钱伟长

1985年4月18日于北京

第一章　连续体力学中的稳定性

本章主要介绍连续体力学中的稳定性问题，包括结构物在弹塑性状态下平衡的稳定性和流体运动的稳定性。它们是非线性力学的一个重要方面。即使在结构处于线性弹性范围内的平衡问题，由于稳定问题需要考虑大变形，考虑屈曲后的形态，必须进行几何上的非线性分析，而在超出比例极限以后，应力与应变间的物理关系，即本构关系本身也是非线性的，问题就变得更复杂。流体的运动方程本来就是非线性的，通常可以进行线性化处理，然而在分析层流运动向湍流运动的失稳条件和失稳后的进一步演化的全过程时，则必须考虑非线性因素。由于这些问题在实际应用中十分重要，而理论分析十分复杂，现在仍为继续研究的一些重要课题。这也可从1981年秋在德国召开的，国际理论和应用力学联合会“关于连续体力学中的稳定性”讨论会中看出一斑。会议文集[1]中包括固体力学27篇，流体力学11篇论文。以下分这两方面介绍其基本情况。

---

1) *Stability in the Mechanics of Continua* F.H.Schroeder (Ed.) Springer-Verlag, Berlin, 1982, pp. 412.

结构的塑性静动态稳定性

北京大学　　王　仁

§1　引　　言

我们先从细长杆在轴压下的平衡问题引出弹性和塑性稳定性的特点。这是一个古老的结构力学问题。其弹性情况是在1744年由Euler解决的[1)]。他考虑在轴压不变的情形下，若直杆在受到一个小的扰动后能在一个相邻的位置上保持一个微弯曲的平衡形态，则直杆在这个轴压下的平衡是不稳定的。对应的最低载荷称为临界载荷或欧拉载荷，对应的应力为欧拉应力：

$$P_e = \pi^2 EJ/L^2, \qquad \sigma_e = E\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \tag{1.1}$$

其中EJ为杆的抗弯刚度，L为杆的长度，k为截面的回转半径，临界载荷的大小主要取决于细长比k/L。对于粗短的杆件，应力在达到欧拉应力前就先达到屈服应力，直杆的平衡处于塑性阶段，这时的稳定性就是塑性稳定性。Engesser 1889年在处理桥梁中杆件失稳问题时，首先按非线性弹性性质分析了超过线弹性极限的情形，提出用应力-应变曲线的切线模量E_t来代替(1.1)式中的E，得到切线模量载荷P_t。这是按照经典的稳定性定义，在载荷不变情形（$\Delta P=0$）下平衡将丧失稳定而得出的。Jasinsky 曾提出异议，指出失稳时杆发生弯曲，在其一侧将引起拉伸而行卸载、将不服从切线模量的规律，Engesser和Considere 等在1895年提出要改用缩减模量E_r来代替前式中的E，而且$E_t<E_r<E$。1909年Von Kármán在他的博士学位论文中具体计算了两种截面的E_r，并和实验做了对比。

1) 历史性资料可参见[1]。

Von Kármán[2] 考虑一个对称截面的细长杆（图1(a)），在轴压P作用下保持为直杆的形态时，截面内的应力为均匀分布的，$\sigma=P/A$，A为截面积。当应力超过屈服应力σ_y以后（参看图1(b)），杆进入塑性阶段，设到达M点。这时给杆一个小扰动使它发生弯曲，求杆能保持微弯曲形态的最低载荷。按照经典的稳定性定义，这时载荷不变。

$$\delta P=0 \tag{1.2}$$

弯曲引起的微小应变增量将截面分成A_1，A_2两个部分（图1(a)），靠截面内侧部分A_1中，压应力将按塑性加载规律增长，应力增量和应变增量的关系为：

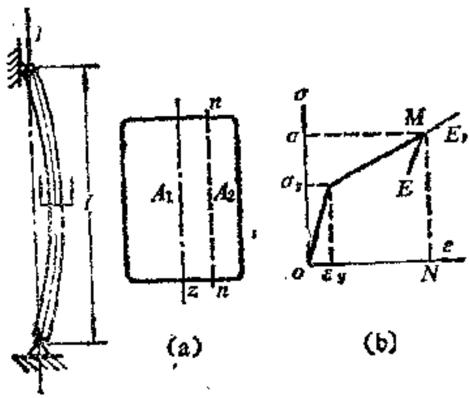


图1

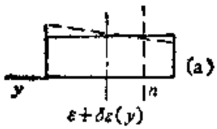
$$\delta\sigma=E_t\delta\varepsilon(y) \tag{1.3}$$

靠截面外侧部分A_2中，压应力减少，将服从塑性卸载规律也即弹性规律变化，则

$$\delta\sigma=E\delta\varepsilon(y) \tag{1.4}$$

在微弯曲过程中，我们用平截面假定，即平截面保持为平截面并垂直于弯曲的中性面，则截面上的应变增量分布为（图2(a)）：

$$\delta\varepsilon(y)=y\delta\kappa \tag{1.5}$$



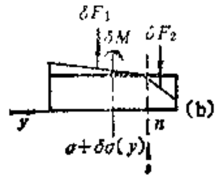


图2

其中$\delta\kappa$为中性面的弯曲曲率增量

由(1.2)式得（参看图2(b)）

$$\delta F_1 = \delta F_2 \tag{1.6}$$

将(1.3)式和(1.4)式分别对面积A_1和A_2积分得

$$S_1 E_t = S_2 E \tag{1.7}$$

其中S_1，S_2为面积A_1，A_2相对于中性面n-n的静矩。(1.7)式决定n-n的位置，它与截面形状及E_t/E的比值有关。

于是，内力增量相对于z轴的弯矩增量为：

$$\delta M = (E_t I_1 + E I_2)\delta\kappa = E_r I \delta\kappa \tag{1.8}$$

这就定义了缩减模量E_r，其中I_1，I_2分别是面积A_1和A_2相对中性面n-n的惯性矩。对于矩形截面

$$E_r = \frac{4EE_t}{\left(\sqrt{E}+\sqrt{E_t}\right)^2} \tag{1.9}$$

对于理想的H截面

$$E_r = \frac{2EE_t}{E+E_t} \tag{1.10}$$

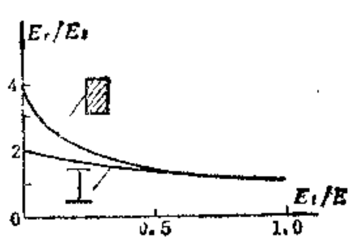


图3

图3表示对不同截面形状E_r/E_t随E_t/E的变化情形，随着E_t/E的减小，E_r/E_t受截面形状的影响增大。

以E_r代替(1.1)式中的E得缩减模量载荷P_r。这个临界载荷符合经典稳定性(分叉)理论在

失稳时载荷不变的定义。自此以后很长一段时间内，P_r 被认为是理论上正确的塑性临界载荷，但是许多实验却一直更接近于比它低的P_t，这通常被解释为试件不完善和载荷偏心所致。

直到1946年 Shanley 指出，在前述推导中实际上内含着一个假设即：在P_t和P_r间有一个因素使杆保持为直的。然而在实际上却又没有任何这样的因素去阻止杆在继续加载的情形下发生弯曲。这样，Shanley (1947)〔3〕经过一系列铝合金压杆的仔细实验观察，发现杆在开始弯曲时并没有地方卸载，提出要改变失稳时临界压力保持不变的提法，认为这时平衡形态出现分叉，但轴压仍可以是增长的，$\Delta P>0$，因为杆内各纤维受扰动产生的弯曲应力很小，在变形过程中各纤维仍都在加载，只是一侧加得快些，另一侧慢些，因而都服从塑性加载规律E_t。这就阐明了切线模量载荷的合理性。Von Kármán 在讨论此文时指出，在塑性情形，由于变形的不可逆性，需要对失稳概念进行扩充，在P_t作用下，直杆丧失的是平衡形态的唯一性（出现分叉）而不是稳定性，这两个概念不再等价。P_t是最低可能的分叉载荷，对应的n-n面位于外凸的边缘，截面将刚刚有地方开始卸载。P_r是最高的分叉载荷。若人为地使杆在P_t，P_r之间的任一载荷下保持为直的，然后放开约束，则杆可在这里出现分叉而且仍有$\Delta P>0$，也即在塑性情形下，有一个区间可出现分叉载荷。Shanley 的论点促使人们去研究塑性的过分叉 (Post-bifurcation) 问题，稳定性载荷应该是求过分叉后的最大载荷。

关于板壳等结构在进入塑性阶段后的稳定性分析，人们同样也常将塑性问题按非线性弹性问题来处理（相当于一维情形下用切线模量），而且所得的载荷与实验接近。然而在五十年代初，用理论上认为是更合理的塑性增量关系计算的结果，却反而离实验较远。关于这一问题的讨论大大促进了塑性屈服条件和本构关系的研究。

在塑性阶段，除了在压应力下有平衡丧失稳定性的问题外，

在拉应力下也有类似问题。例如受拉薄板由于截面厚度减薄可使承载力降低，另一方面由于材料因变形而强化，使承载力增加，两者的联合效果将使截面上的合应力达到一个最大值。在超过此值后，合应力将下降导致加速变形而使结构失稳，称为拉伸失稳。除在结构中出现这种问题外，在压力加工如抽拉等工艺中也常遇见。

塑性稳定性的问题，由于航天等工业部门对用材重量的严格要求，高强材料的进步，优化设计思想的发展，变得更为重要。它的研究一直受到重视。它牵涉到由于大变形而引起的几何非线性和由于材料进入塑性阶段的物理非线性和非保守性，加上初缺陷的影响等，使问题变得十分复杂，研究论文十分之多。尤其近几年来不断有许多总结性文章，如 Sewell (1972)[4]，Hutchinson(1974)[5]，Jones(1979)[6]，周承倜(1979)[7]，Klyushnikov(1980)[8]，Bushnell(1982)[9]，Bruhns(1982)[10]，梁炳文等(1983)[11]等等。

关于动力作用下的塑性动态稳定性问题，近些年来也较受重视。它在军事上的应用是很明显的，例如，长杆形的子弹当撞击到靶板时有会不会发生屈曲的问题；在民用上，汽车、轮船上的各种能量吸收装置，可使它们受撞击后避免乘员的伤亡；原子电站中装反应堆的厚壁结构在受到突然冲击载荷时的稳定性问题，以及石油钻井，抗震结构，海洋平台，机械加工工艺中也都有这类问题。

由于问题的复杂性，人们对于一些简单模型做了大量分析，并用它们表示实际结构的主要因素，我们也将重点讨论这些问题，介绍有关的基本概念和基本处理方法。

§2 稳定性准则

塑性稳定性问题，包括材料的和系统的稳定性。前者指材料的应力-应变或其增量之间的函数关系是否保持有唯一性，例如，

在超过应力峰值后，若进一步变形所对应的应力反而下降，则称之为材料的不稳定（材料的软化），这在岩石的情形很清楚，是地震发生的一种机制。另外，构件在拉伸的广义力作用下，由于截面的局部颈缩会导致拉伸断裂，这是塑性阶段中出现拉伸失稳转化到破坏时的现象，也可归为材料的不稳定性。以下则不考虑这类问题，而只考虑结构系统本身平衡和运动的稳定性。

结构系统稳定性的判定主要有以下几种常用的准则：

1. **静力准则**：结构在一定载荷作用下，其平衡状态的邻域中若存在其它平衡状态，则原平衡状态就是不稳定的，具有上述性质的最小载荷值为临界值。这就是经典稳定理论的准则，又称平衡路径的分叉。前已说明，对于进入塑性阶段后的失稳问题，虽然平衡状态的唯一性（不分叉）将保证其稳定，但丧失唯一性并不意味着丧失稳定性。这个结论对一般性结构同样也成立。

2. **能量准则**：结构在一定载荷作用下，若对其所处的平衡状态给予任意一个可能位移（与初条件及边界运动学条件相协调的运动），都将导致系统总势能的增大（即必须外加能量），则系统所处的平衡状态是稳定的。这个准则有鲜明的物理意义，对静力保守系统，它等价于静力准则。

3. **动力准则**：一个处于静态或动态平衡的系统受一任意的微小扰动后，若始终在原形态附近一个规定的邻域内运动，则这个系统是稳定的。丧失这种性质的最小载荷值为临界值。另一个提法可以是：若由扰动引起的全部运动其最大幅度随着扰动趋于零而减小到零，则平衡是稳定的。由于这个准则要求在任意初扰动下当$t\to\infty$时结构变形的有界性，用解析法或数值方法都有困难。特别是在塑性的情形，由扰动引起的运动有各种各样，加载卸载的过程可以很不相同，需要用不同的加卸载规律，给应用动力准则造成很大的困难。在实际应用这一准则时，常常只考虑其某些扰动振型在一定时间范围（例如结构的寿命期间）内的发展情况，规定其变形不得超过某个限度。

由于实际工程中初缺陷是不可免的，所以在讨论稳定性问题时，更重要的是研究有缺陷的情形下，变形如何随载荷增长，求出载荷-变形关系中结构能承受的最大载荷。

§3 简单模型的静态塑性稳定性分析

Shanley[3] 所取的模型如图4(a)所示，上下两段为刚体，中间由两根平行的弹塑性杆连接。分析时可化为图4(b)所示的双弹簧模型，由一个刚性T形杆连接两个弹塑性弹簧组成，O点受限只作垂直运动，OC可绕拐点O转动θ角，弹簧下端允许水平移动以保证弹簧只产生垂直反力．设弹簧服从线性强化模型如图1(b)所示，即

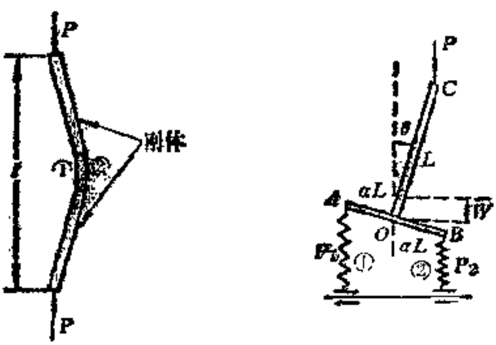
在塑性加载时，$\delta P = E_t \delta e$。

在塑性卸载时或弹性阶段，$\delta P = E\delta e$。

其中e为弹簧的缩短量。

基本状态下力和力矩的平衡方程分别为

$$\left.\begin{aligned} &P_1 + P_2 = P \\ &(P_1 - P_2)\alpha L + P\theta L = 0 \\ \text{弹簧的变形}\qquad &e_1 = w - \alpha L\theta \\ &e_2 = w + \alpha L\theta \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$



(a)　　　　(b)

图4

受扰动后的状态，增量部分满足：

$$
\left.\begin{aligned}
&\delta P_1+\delta P_2=\delta P\\
&(\delta P_2-\delta P_1)\alpha L=PL\delta\theta+\delta PL\theta\\
&\delta P_1=E_1(\delta w-\alpha L\delta\theta)\\
&\delta P_2=E_2(\delta w+\alpha L\delta\theta)
\end{aligned}\right\}\qquad(3.2)
$$

当两个弹簧均处于弹性阶段，则$E_1=E_2=E$，能够保持这个变形状态的外载，可从力矩平衡方程得完善直杆$\theta=0$的弹性临界载荷

$$P_e=2E\alpha^2L\qquad(3.3)$$

当两个弹簧均处于塑性阶段并在扰动下保持加载状态，则$E_1=E_2=E_t$，能够保持这个变形状态的最低分叉载荷同前，可得

$$P_t=2E_t\alpha^2L\qquad(3.4)$$

以上要求弹簧①也加载，若弹簧刚好达到卸载边缘，即$\delta w=\alpha L\delta\theta$，$\delta P_1=0$，$\delta P_2=E_t2\alpha L\delta\theta=\delta P$，这时$\delta P>0$。若弹簧①卸载，$\delta w-\alpha L\delta\theta<0$，则$E_1=E$，解相应的(3.2)式，可得最大的分叉载荷是当$\delta P=0$时的缩减模量载荷

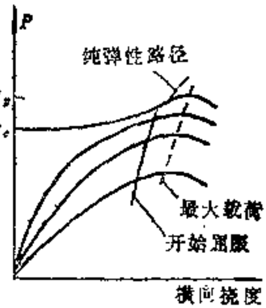


图5

$$P_r=2EP_t/(E_t+E)\qquad(3.5)$$

以上讨论中已隐含着$P_e>P_r>P_t$均比两弹簧同时开始屈服时的载荷P_y为大。Hill等[12]曾讨论过这四个载荷值之间的关系。当$P_e<P_y$时，将是纯弹性失稳，经大变形分析可得图5所示的情形[4]。当$P_t>P_y$时，则在P_t时首次出现塑性的分叉（图6(d)），不过$\Delta P>0$，直到P_r时，分叉将对应$\Delta P=0$。在超过P_y而小于P_r的分叉时，则对应于$\Delta P<0$如图6(b)—(d)所示。其对于图1(b)这样的线性强化模型，从E到E_t的过渡都集中在屈服点σ_y处，则有可能出现$P_t<P_y<P_r$的情形(图6(b))，