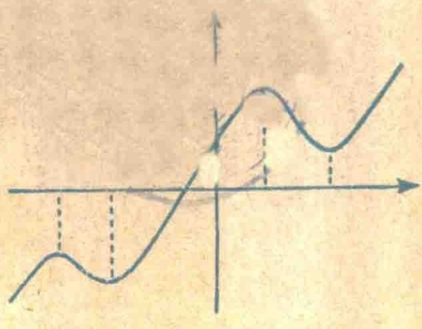
极大极小问题

葛云書



科学普及出版社

極大極小問題

葛云書

科学普及出版社
1959年·北京

本書提要

本書將日常生活中、生产实踐中某些要求“多快好省”的問題，归結为数学中求函数的極大值与極小值的問題，介紹給讀者求函数極大值与極小值的一般方法，在每种解法后面，都以較典型的实际問題作为例子，并留有練習題，供讀者思考練習（当然更多的問題与習題，尚可以从实际生产中得来）。全書計收集問題28个，習題27个，适宜于具有高中程度的青年与干部閱讀，但由于許多部分都是从基础知識开始叙述的，因此具有初中代数与几何知識的讀者，也能看懂其中部分内容或全部。

編著者：萬　云　[illegible]
出版者：科学普及出版社
（北京市西直門外郝家灣）
北京市書刊出版業營業許可証出字第091號
發行者：新华書店
印刷者：北京市印刷一厂
（北京市西便門南大街乙1號）

开本：787×1092 1/32　印張：2 5/8
1959年3月第1版　字数：50 000
1959年3月第1次印刷　印数：17,055

統一書号：13051·227

定价：（9）2角[illegible]分

目　次

一、　引言 ……………………………………………… 1
二、　函数概念 ……………………………………………… 2
三、　二次三項式 $y=ax^2+bx+c$ 的極大值与極小值 ………… 6
四、　不等式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 及同一类公式在解極大極小問題中的应用 ……………………………………………… 17
五、　二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $b^2-4ac\geqslant 0$ 在解極大極小問題中的应用 ……………………………………………… 30
六、　函数 $y=x^n\pm kx$ 的極大值与極小值 ……………………… 37
七、　三角函数的極大值与極小值 ……………………………… 45
八、　用函数的一次导数来求函数的極大值与極小值 …………… 52
九、　最速降綫問題 ……………………………………………… 69
十、　尾語 ……………………………………………… 79

一、引　言

我們在日常生活中，时常遇到許多看来是很平常的事情。譬如說：走路的路綫要尽量采用直綫，許多生活用品都与"圓"有关系(如圓的水管、圓柱形的罐头、半球形的鍋子)等，对于这些，大家都已習以为常，并不感到奇怪，然而仔細考虑一下，这些事情的本身，却不是偶然的巧合，而是有着頗为發人深思的原因的。

就以走路要走直綫来說，乃是因为我們从出發点到目的地，要走近路，而兩点間最短的距离是直綫，所以就选擇了直綫。至于許多用品，为什么都与圓有关系，那是我們要求一个用品，除掉要坚固美观以外，还要节省材料，而同面积的平面圖形中，以圓的周長最短，同体积的几何体中，以球的表面积最小，因此許多用品，就制成了圓形或球形，以节約材料。事实上，任何一件事情，都可能有多种不同的解决办法，而我們則是取最好的办法来进行的。

目前我国正处于社会主义建設大躍进的时代，"多快好省"是我們建設社会主义的总路綫，在某种意义上来說，"多"与"好"就是要求在数量与質量方面达到較高的水平，快与省就是要縮短建設的时間，与减少材料的消费，在新的形势下，我們在解决問題的方法方面，將会遇到更多需要判别它們的"好"与"坏"的地方，以貫徹"多快好省"的精神，下面便是常見的一些例子：

1． 某人民公社有一段現成的籬笆，現在要用来圍一个矩形的猪厩，一边可以利用房屋的牆，应該怎样圍法，方可使猪厩的面积最大？

2. 夜晚四人圍桌看書，电灯以掛在桌子中心怎样的高度，方能使桌边的書照得最亮？

3. 某白鉄生产合作社为食品工厂承制一定容量的圓柱形罐头一批，为了节約材料，罐头应該用怎样的尺寸？

4. 农業社兴修水利，建造断面为等腰梯形的灌溉渠，要使水对渠的浸湿面积最小，渠壁的傾斜度应該如何？

5. 鉗工要从小于半圓的扇形鋼板中切出一塊具有最大面积的矩形鋼板，应該怎样切法？

6. 將一塊矩形硬紙板的四角，各剪去一个正方形，可折成一个無盖的盒，要使紙盒有最大容积，則剪去的正方形的边長应該是多少？

懂得这类問題的解法是很需要的，在数学中我們也已有了关于这类問題的一般解法，那就是將問題中所涉及到的若干个量之間的相依关系，用函数关系表达出来，通过計算来求得結果，也就是將实际中的好坏問題，归結为求函数的極大值与極小值的問題。下面我們介紹給讀者有关这类問題的几种解法，并从基础知識談起。

二、函数概念

§1. 函数

在自然現象和社会生活中，我們經常可以遇到各种不同的量，例如：距离、时間、速度、長度、面积、体积等等。在一定的情况下，它們彼此之間有着一定的联系。其中有的保持着固定的数值，有的則可以取不同的数值，如物体在等速运动的情况下，运动的速度 v，經过的时間 t，与所走的距离 S 之間，就有着这样的关系：

$$S=vt.$$

其中速度 v 保持着一定的数值，距离 S 则随着时間 t 的不同而可以取不同的数値，我們將保持着一定数值的量叫做常量，如上式中的速度 v，可以取不同数值的量叫做变量，如上式中的时間 t 与距离S。变量中可以任意选擇的量，又叫做自变量，如上式中的时間t,对于自变量在一定变化范圍內的每一个値，另一个变量有确定的値和它对应，那末这另一个变量，叫做自变量的函数，如上式中的距离S，便是时間 t 的函数。

再如圓面积 A 和半徑 r 的关系式

$$A=\pi r^2$$

中，圓周率 π 是常量，圓半徑 r 是自变量，对于半徑 r 在正数范圍內的每一个值，总有确定的面积 A 的値与它对应，故圓面积 A 是圓半徑 r 的函数。

一般的关系式中，如

$$y=x^2-2x+3,$$

$$y=ax^2+bx+c,$$

对于 x 在一定范圍內的每一个値，总有确定的 y 値和它对应，故称y是x的函数。

研究兩个变量 y 和 x 的函数关系的时候，“y 是 x 的函数”这句話，我們常用符号表示为

$$y=f(x)。$$

这样，S 是 t 的函数，就可以写成 $S=f(t)$。A 是 r 的函数，就可以写成 $A=f(r)$。

兩个变量之間的函数关系，我們还可以用圖象来表达，就是在平面上繪出互相垂直的兩条直綫，水平的称X-軸，鉛直的称 Y-軸，交点 O 称原点，从原点开始，在X-軸上向右为正，向左为負，在 Y-軸上向上为正，向下为負，任意取一适当長的綫段作为一个單位(如一毫米)，这样平面內的每一点，就对

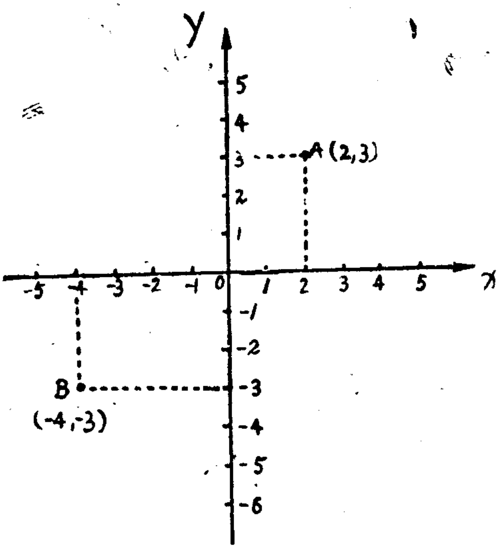


圖 1　直角坐标

应着两个值，一个是与 Y-軸的距离，称横坐标 x，一个是与 X-軸的距离，称縱坐标 y，我們就將这点記为（x，y）。并規定括弧中常把 x 值写在前，y 值写在后，如圖 1.中 A 点到 Y-軸的距离为 2，到 X-軸的距离为 3，因此記为（2，3），B 点到 Y-軸的距离为 −4，到 X-軸的距离为 −3，因此記为（−4，−3）。

相反，函数关系中每一个自变量 x 与相应的函数 y 的值，也可用平面內对应的点来表示。这样在一个函数关系中，我們便可先求出函数与自变量的許多对应的值，再在平面內找到对应的点，把这些点，根据它們的性質，順着它們变化的趋势，联結成平滑的曲綫，这样就得出函数的圖象。例如我們要作

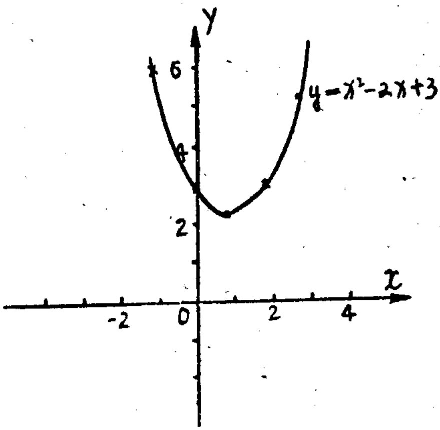


圖 2　函数的圖象

函数

$$y=x^2-2x+3$$

的圖象，先求出 y 与 x 的对应值，列成下表：

x	$-1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$
y	$6, 3, 2, 3, 6, \cdots\cdots$

再在坐标平面內找到对应的諸点$(-1, 6)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 6)$, ……，根据它們的性質，順着变化的趋势，联成平滑的曲綫，便得

$$y=x^2-2x+3$$

的圖象，如圖 2。

§ 2. 函数的極大值和極小值

在函数关系中，函数值是随着自变量取不同的值而定的，在这些相应的函数值之中，有时我們可以發現在一定范圍之內有較大的值或者較小的值。例如函数

$$y=x^2-2x+3,$$

当 $x=-1$ 时，$y=6$；$x=2$ 时，$y=3$；
$x=0$ 时，$y=3$；$x=3$ 时，$y=6$；
$x=1$ 时，$y=2$；$x=4$ 时，$y=11$；

其中当 $x=1$ 时，$y=2$，函数 y 的值較其附近的 y 值都小。再如函数

$$y=4+2x-x^2,$$

当 $x=-2$ 时，$y=-4$；$x=1$ 时，$y=5$；
$x=-1$ 时，$y=1$；$x=2$ 时，$y=4$；
$x=0$ 时，$y=4$；$x=3$ 时，$y=1$；

其中当 $x=1$ 时，$y=5$，此时函数的值，較其附近的值都大。像这种函数 y 的某一个較附近各点都大的值，叫做函数的極大值，

以符号 max 表示之；較附近各点都小的值，叫做函数的極小值，以符号 min 表示之。如上面的兩个例子：

$$y=x^2-2x+3,\qquad 当\ x=1\ 时,\qquad 有\ y_{min}=2;$$
$$y=4+2x-x^2\qquad 当\ x=1\ 时,\qquad 有\ y_{max}=5。$$

函数的極大值在圖象上常常是波峯的頂，極小值則是波谷的底，因为函数的極大值与極小值是就該值附近的局部地区来考察的，所以在同一函数中，有时可能有几个極大值与極小值。如圖 3，函数 $y=f(x)$ 便有兩个極大值 MM'，PP'，兩个極小值 NN' 与 TT'，同时也可能在同一函数中，某一个極大值反而較另一个極小值还要小，如圖 3的 $MM'<TT'$。至于函数的最大值与最小值，則是指整个自变数的范圍內所对应着的函数的最大与最小的值（包括它們的兩个端点在內），可以通过求函数的極大值与極小值来得出。

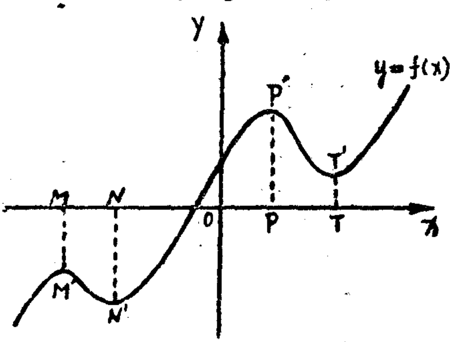


圖 3 函数的極大值和極小值

三、二次三項式 $y=ax^2+bx+c$ 的极大值与极小值

§ 3. **問題一** 某人民公社有 60 尺長的一段籬笆，現在要用来圍一个矩形的猪厩，一面可以利用房屋的牆，問应該怎样圍法，方可使猪厩的面积最大？

这是一个很普通的实际問題，我們可以把問題中猪厩面积与籬笆長的关系用数学中的函数关系表达出来，化为数学問題

来解。

設园地垂直于牆的一边为 x，則它的鄰边之長当为

$$60-2x$$

园地面积 $S=x(60-2x)=$

$$=-2x^2+60x。$$

式中园地面积 S 隨着一边之長 x 取不同的值而定，是 x 的函数，因此要使园地有最大面积的問題，就归結为当 x 为何值时，函数 S 有極大值的問題，在这里 S 是一个以 x 为变量的二次式。

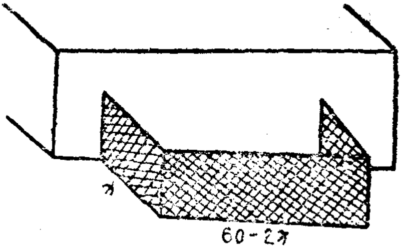


圖 4 籬笆圍成的豬厩

类似这种情况的实际問題很多，因此我們先不急于單純尋求这个問題的解答，而来研究一般的二次三項式

$$y=ax^2+bx+c$$

的極大值与極小值的問題。

§ 4. 函数 $y=ax^2+c$ 的極大值与極小值。

討論函数 $y=3x^2+8$，当 x 取不同的值时，总有一个 y 的值与之对应，如

$x=1$，	$y=11$；	$x=0$，	$y=8$；
$x=2$，	$y=20$；	$x=-1$，	$y=11$；
$x=3$，	$y=35$；	$x=-2$，	$y=20$；
$x=4$，	$y=56$；	$x=-3$，	$y=35$。

但根据正数的平方是正数，負数的平方也是正数，零的平方是零，因此任何实数的平方，都不可能是負数，我們可以断言，無論 x 取什么实数值，$3x^2$ 总不会是負值，而只在 $x=0$ 时，有最小的值 $3x^2=0$。再上式中常数項 8 不受 x 变化的影响，所以函数 $y=3x^2+8$，当 $x=0$ 时，有極小值 $y_{min}=8$。另一方面，

因为 $3x^2$ 可以随着 x 的絕对值的增大而無限制地增大，故函数 y 沒有極大值。

同样函数 $y=8-3x^2$，無論 x 为任何实数，y 总不可能大于8，因此在 $x=0$ 时，有 $y_{max}=8$，又因为 $3x^2$ 可以無穷增大，y 也就可以無限制地減小，故函数 y 沒有極小值。

由此可知，一般仅含自变量二次項的函数

$$y=ax^2+c,$$

若 $a<0$，則当 $x=0$ 时，有 $y_{max}=c$；

若 $a>0$，則当 $x=0$ 时，有 $y_{min}=c$。

§ 5. 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的極大值与極小值

再討論函数 $y=x^2-2x+4$，式中除含有自变量 x 的二次項外，尙有一次項在內，为了使自变量 x 具有完全平方关系，我們將原式进行配方，即

$$\begin{aligned} y&=x^2-2x+4\\ &=x^2-2x+1+3\\ &=(x-1)^2+3 \end{aligned}$$

由于 $(x-1)^2$ 不可能是負值（x 为实数），仅在 $x=1$ 时，$(x-1)^2$ 取得最小的值0，因此函数

$$y=x^2-2x+4$$

在 $x=1$ 时，有極小值 $y_{min}=3$。另一方面 $(x-1)^2$ 却可以無穷增大，所以函数沒有極大值。

同样討論函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+4$，我們进行配方，即

$$y=\frac{1}{2}x^2+2x+4$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+4x)+4$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+4x+4)-2+4$$

$$=\frac{1}{2}(x+2)^2+2,$$

因此函数 y 在 $x=-2$ 时，有極小值 $y_{min}=2$，同样沒有極大值。

再研究函数 $y=-2x^2+4x-6$，进行配方，

$$\begin{aligned} y&=-2x^2+4x-6\\ &=-2(x^2-2x)-6\\ &=-2(x^2-2x+1)+2-6\\ &=-2(x-1)^2-4 \end{aligned}$$

因为 $(x-1)^2$ 不会是負值，因此函数 y 的值不会大于 -4，仅当 $x=1$ 时，函数 y 有極大值 $y_{max}=-4$，另一方面函数 y 沒有極小值。

由上面的例子，我們可以知道：一个二次三項式，將含有自变量 x 的項配成完全平方后，便可求出它的極大值或極小值。为了今后求極大值与極小值方便起見，我們观察二次三項式的一般形式：

$$y=ax^2+bx+c,$$

式中 a,b,c 都是实数，且 $a\neq0$（因为 $a=0$，就不成为二次三項式了），我們將式中含有 x 的項进行配方。

$$\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c\\ &=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\ &=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c\\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

由此可知：当 $a<0$，则$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$不会是正値，仅当$x=-\frac{b}{2a}$时有最大値 0，函数 y 在此时，有一極大値 $c-\frac{b^2}{4a}$。同时$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$可以無限地減小，所以函数 y 沒有極小値。当 $a>0$，则 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$不会是負値，仅当 $x=-\frac{b}{2a}$时有最小値 0，函数 y 在此时有一極小値 $c-\frac{b^2}{4a}$。同时 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$可以無窮增大，所以函数 y 沒有極大値。

綜合上面所討論的結果，我們可以归納成如下：

定理：函数 $y=ax^2+bx+c$

若 $a<0$，则当 $x=-\frac{b}{2a}$时，函数有極大値

$$y_{\max}=c-\frac{b^2}{4a}$$

若 $a>0$，则当 $x=-\frac{b}{2a}$时，函数有極小値

$$y_{\min}=c-\frac{b^2}{4a}。$$

例 1. $y=2x^2+5x-7$。

［解］ $\because a>0$，$\therefore$ 当 $x=-\frac{5}{2\times2}=-\frac{5}{4}$时，有

$$y_{\min}=-7-\frac{5^2}{4\times2}=-7-\frac{25}{8}=-\frac{81}{8}$$

例 2. $y=-3x^2+12x+8$。

［解］ $\because a<0$，$\therefore$ 当 $x=-\frac{12}{2\times(-3)}=2$ 时，有

$$y_{\max}=8-\frac{12^2}{4\times(-3)}=8+12=20。$$

这样，凡是日常生活与生产中，量与量之間的关系可以表达成为 $y=ax^2+bx+c$ 形式的問題，我們都可以很方便地用上述的定理来求它的極大値或極小値。

§ 6. 实际問題举例

現在我們再回过头来用这个方法研究前面的問題一。

已知猪圈面积 S 与一边的長 x 之間的关系式是

$$S=-2x^2+60x$$

則当 $x=-\dfrac{60}{2\times(-2)}=15$ 尺时，有

$$S_{\max}=-\frac{60^2}{4\times(-2)}=450 \text{ 平方尺}$$

此时猪圈另一边的長为 $60-2x=30$ 尺。

所以最大面积的猪圈，应該是傍屋的兩边各为 15 尺，其他兩边各为 30 尺的矩形。

問題二 要在牆上开一个上部为半圓形，下部为矩形的窗戶，在窗框一定的情况下，要使透过来的光綫最多，則窗的寬与高应成怎样的比例？

［解］ 这个問題的意义也就是如圖 5 所示，將半圓与矩形拼在一起，若周長一定，則矩形的寬与高之比为何値时，圖形有最大面积。

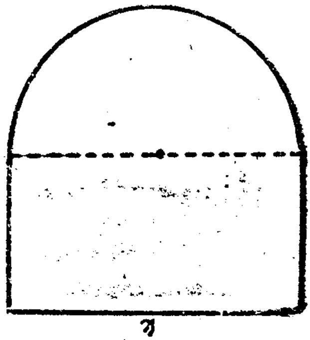


圖 5 挪威式窗戶

設周長为 l，矩形的寬为 x

則

$$\text{半圓周長}=\frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}x$$

$$\text{矩形的高}=\frac{1}{2}\left(l-x-\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{2l-(\pi+2)x}{4}$$

$$半圆面积=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}x^2=\frac{\pi}{8}x^2$$

$$矩形面积=x\cdot\frac{2l-(\pi+2)x}{4}=\frac{2lx-(\pi+2)x^2}{4}$$

∴窗的总面积　$S=半圆面积+矩形面积$

$$=\frac{\pi}{8}x^2+\frac{2lx-(\pi+2)x^2}{4}$$

$$=-\frac{\pi+4}{8}x^2+\frac{l}{2}x$$

根据定理，当　$x=-\dfrac{\dfrac{l}{2}}{2\times\left(-\dfrac{\pi+4}{8}\right)}=\dfrac{2l}{\pi+4}$ 时，S 有極大值。此时矩形的高为

$$\frac{2l-(\pi+2)\cdot\dfrac{2l}{\pi+4}}{4}=\frac{l}{\pi+4},$$

矩形寬：矩形高$=\dfrac{2l}{\pi+4}:\dfrac{l}{\pi+4}=2:1$。

所以在窗框一定的情况下，要使透过来的光綫最多，窗子矩形部份的寬与高之比应是2:1。

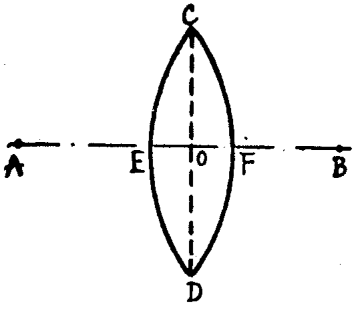


圖 6　凸面鏡的断面

問題三　某玻璃工厂要制造一批兩面均为球面的凸面鏡，規定其厚度为 a，鏡片的直徑为 d，如要使所費材料最少，則兩个球面的半

徑应如何？

［解］ 如圖6凸面鏡的断面为$CEDFC$，已知$EF=a$，$CD=d$，若$\overset{\frown}{CED}$之圓心为B，$\overset{\frown}{CFD}$之圓心为A，

今設 $OF=x$，

則 $OE=a-x$

球缺$CFDOC$的体积❶ $V_1=\frac{\pi}{6}x\left[x^2+3\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]$

球缺$CEDOC$的体积 $V_2=\frac{\pi}{6}(a-x)\left[(a-x)^2+3\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]$

凸面鏡$CEDFC$的体积

$$V=V_1+V_2=\frac{\pi}{6}x\left[x^2+3\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]+\frac{\pi}{6}(a-x)\left[(a-x)^2+3\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]=\frac{\pi}{6}\left(x^3+\frac{3d^2}{4}x+a^3-3a^2x+3ax^2-x^3+\frac{3ad^2}{4}-\frac{3d^2}{4}x\right)$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(3ax^2-3a^2x+a^3+\frac{3ad^2}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi a}{2}x^2-\frac{\pi a^2}{2}x+\frac{\pi a}{6}\left(a^2+\frac{3d^2}{4}\right)$$

当 $x=-\dfrac{-\frac{\pi a^2}{2}}{2\times\frac{\pi a}{2}}=\dfrac{a}{2}$时，$V$有最小值。

---

❶ 任意一个平面截球所得球的部份几何体称球缺。

球缺的体积$V=\frac{\pi}{6}h\left[h^2+3\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$ 式中h为球缺的高，b为球缺底面的直徑。