



21世纪高等院校教材

运筹学实用教程

宁宣熙 编著



科学出版社

www.sciencep.com

616

022-43

144

21 世纪高等院校教材

运筹学实用教程

宁宣熙 编著

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书是作者在教授运筹学课程 18 年的经验基础上撰写的一本运筹学教材,内容包括了运筹学的主要分支。书中重点介绍了各分支数学模型的基本概念和实用算法,并列举实例来说明建模方法和求解步骤,其中包括作者在教学研究中提出的若干已经证明有效的改进算法。

本书写法简明扼要,通俗易懂。可作为高等院校管理工程、信息管理、工商管理、财经等有关专业的教材及管理干部培训用教材,也可作为政府部门和企事业管理干部、工程技术人员和理工科学生学习现代管理方法和优化方法的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学实用教程/宁宣熙编著. —北京:科学出版社,2002.8

(21 世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-010523-0

I. 运… II. 宁… III. 运筹学—高等学校—教材 IV. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 046636 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2002 年 8 月第一次印刷 印张:17 1/2

印数:1—5 000 字数:328 000

定价:23.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

目 录

绪论	(1)
第一章 线性规划的基本理论及其应用	(6)
第一节 线性规划的数学模型及其标准形式	(6)
第二节 线性规划问题的图解法	(11)
第三节 线性规划问题的单纯形解法	(17)
第四节 非标准型线性规划问题的解法	(28)
第五节 对偶问题	(33)
第六节 灵敏度分析	(42)
第七节 运输规划问题	(52)
第八节 工作指派问题	(64)
第九节 线性规划在管理决策中的应用	(73)
第二章 目标规划	(85)
第一节 目标规划的数学模型	(85)
第二节 目标规划的单纯形法	(89)
第三章 动态规划	(98)
第一节 动态规划的基本概念与方法	(98)
第二节 动态规划模型的建立与求解步骤	(104)
第三节 动态规划的应用举例	(105)
第四章 网络分析	(117)
第一节 网络分析中常用的名词	(117)
第二节 最小生成树问题	(119)
第三节 最短路问题	(124)
第四节 最大流问题	(129)
第五节 最小费用流问题	(134)
第六节 中国邮递员问题	(142)
第七节 网络计划技术	(145)
第五章 决策论	(172)
第一节 概论	(172)
第二节 风险型决策	(176)

第三节	不确定型决策	(188)
第四节	效用理论	(191)
第六章	对策论基础	(196)
第一节	概论	(196)
第二节	矩阵对策的基本理论	(198)
第七章	存储论	(206)
第一节	存储论的基本概念	(206)
第二节	确定型存储模型	(208)
第三节	随机存储模型	(217)
第八章	排队论	(221)
第一节	服务系统的基本概念	(221)
第二节	服务系统的基本数学模型——生灭过程	(226)
第三节	单通道服务系统	(231)
第四节	多通道服务系统 $[M/M/C]$	(239)
第五节	其他类型的服务系统	(245)
第六节	服务系统的优化问题	(247)
第七节	服务系统实例分析	(249)
习题		(257)
参考文献		(276)

绪 论

一、运筹学的发展简史

运筹学的起源可以追溯到很多世纪以前,随着社会经济活动的日益频繁和企业组织规模的不断扩大,当人们企图应用科学的方法去管理日益复杂的经济活动和企业组织时,应当说就已经具有了古朴的运筹学思想了。但真正把它称为运筹学,一般都认为是在第二次世界大战初期。当时的一个迫切任务是如何把极其紧缺的资源更有效地应用于军事活动中。因此军事部门集中了一大批各科门类的科学家用科学的方法处理各种军事战略和战术上的问题。其中英国比美国早参战两年,因此第一批进行军事“作业研究”或“运作分析”的研究小组就在英国诞生了。其中著名的“布莱克特混合小组”就是由曼彻斯特大学教授 P. M. S. 布莱克特领导的英国有名的运筹学小组。它由三位生理学家、两位数学物理学家、一位天体物理学家、一位陆军军官、一位测量员、一位普通物理学家和两位数学家组成,当时被称为布莱克特马戏团。1942 年在美国也出现了类似的研究组织。这些研究小组在建立英国有效的空防预警系统,反潜战中深水炸弹的效能研究,护航舰队保护商船队的编队等问题上都起了十分重要的作用,对英美等国赢得英伦三岛空战、太平洋岛战以及北大西洋战争的胜利都作出了重要贡献。

第二次世界大战后,世界经济不断走向新的繁荣,于是人们开始把在二战中发挥过重大作用的运筹学迅速地应用到经济领域。很多从事军事运筹学研究的科学家转向工业和经济发展等新的领域。这一时期,出现了很多重要的运筹学成果,如 1947 年丹捷格(G. B. Dantzig)提出的线性规划等。到 20 世纪 50 年代末,很多标准的运筹学方法,如动态规划、排队论、存储论等都已发展得基本成熟。

促进这一时期运筹学蓬勃发展的另一因素是计算机的发展。因为运筹学中很多复杂问题需要大量的计算,在很多情况下,这些计算用手工进行处理是根本不可能的。因此,能够快速处理大量计算任务的电子模拟计算机的出现和发展,就大大帮了运筹学的忙,促进了运筹学的迅速成长和发展。

运筹学引进中国是 20 世纪 50 年代中期由钱学森等教授首倡的,后来一大批中国学者在推广运筹学及其应用中作了大量工作,并取得了很大成绩,同时也发表了不少专著和论文,在世界上也产生了一定的影响。

目前,经过近 50 年的发展,运筹学已成为一个门类齐全、理论完善、有着重要

应用前景的新兴学科。

二、什么是运筹学

回答这个问题一般采用给出定义的方法。根据不同的学术组织从不同角度给出的定义,可以对运筹学有一个比较全面的认识。

大不列颠运筹学会给出的定义是:“运筹学是运用科学的方法,解决工业、商业、政府和国防事业中,由人、机器、材料、资金等构成的大型系统管理中所出现的复杂问题的一门学科。它的一个显著特点是科学地建立系统模型和对机会与风险的评价体系去预测和比较不同的决策策略与控制方法的结果。其目的是帮助管理者科学地确定他的政策和行动。”

美国运筹学会给出的定义更简单,但含义基本相同:“运筹学是一门在紧缺资源的情况下,如何设计与运行一个人—机系统的决策科学。”

莫斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)曾对运筹学下过这样的定义:“为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时,提供以数量化为基础的科学方法。”

在其他教科书中还有下面一些定义:如“运筹学是一门应用科学,它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法,解决实际中提出的专门问题,为决策者选择最优决策提供定量依据。”等等。

从这些定义不难看出,运筹学具有下面几个明显的特点:

1. 它是以研究事物内在规律,探求把事情办得更好的一门事理科学。
2. 它是在有限资源条件下,研究人—机系统各种资源利用最优化的一种科学方法。
3. 它是通过建立所研究系统的数学模型,进行定量分析的一种分析方法。
4. 它是多学科交叉的解决系统总体优化的系统方法。
5. 它是解决复杂系统活动与组织管理中出现的实际问题的一种应用理论与方法。
6. 它是评价比较决策方案优劣的一种数量化决策方法。

总之,科学性、综合性、系统性和实践性是运筹学这门学科四大特点。当然,运筹学也有它的弱点。其主要问题是,在建立数学模型时,为了能够进行数学上的处理,常常要对实际情况进行简化或假设。因此,如果这种简化稍有过分,就会使模型偏离实际,而失去它的实用价值。

三、运筹学与系统工程

随着人类的各项活动日益变得多样化、复杂化和高级化,为了实现人类的某一目标,不是一个人或少数几个人能够完成的,往往需要大量的人、设备、资源等的高

度组织和配合。这种组织的集合体就是实现某一特定目标的人造系统或复合系统。在这样的系统中,包含着人和物的多层次复杂关系,它们之间相互作用、相互影响、相互制约。如果把它们机械地凑合在一起,系统只能是个别事物的集合,丧失应有的功能而成为一堆废物。如果把它们有机地组合起来,协调它们之间的关系,使系统中各元素各部分不仅完成本身应担负的任务,还与其他元素和部分最有效地配合,以最优的方式达到整个系统的目标。“系统工程学就是为了研究多个子系统构成的整体系统所具有的多种不同目标的相互协调,以期系统功能的最优化、最大限度地发挥系统组成部分的能力而发展起来的一门科学。”所以它是一种设计、规划、建立一个最优化系统的科学方法,是一种为了有效地运用系统而采取的各种组织管理技术的总称。

早在 2000 年前,系统工程的思想就已经在埃及的金字塔、中国的都江堰水利工程等的实施中有所体现。但近代的系统工程应当说是在 19 世纪初起源于美国。如麻省理工学院的布什(V. Bush)教授在研制机械式微分器时,就把系统工程作为分析的工具。美国贝尔电话公司应用得更早,并在 1940 年正式采用了系统工程的名称。他们在发展美国微波通讯网时应用了一套系统工程的方法论,并取得了良好的效果。特别是在二次世界大战期间出现的运筹学,为系统工程奠定了理论基础,提供解决实际问题的有效方法。

实施系统工程的一般程序和步骤如下:

1. 问题定义:通过全面收集有关资料和数据,提出所要解决的问题,弄清问题的实质。
2. 评价系统设计:提出为解决问题所应达到的目标,并按照预期的目标提出应采取的政策、行动和控制方法,制定考核目标完成程度的评价标准。
3. 系统综合:将能够达到目标的政策、行动和控制方法综合成整个系统的概念,形成方案。
4. 系统分析:通过建立模型对系统方案进行分析,研究各种参数、行动方案的变化对达到系统目标所产生的影响。
5. 最优化:精心选择系统参数和行动方案的最佳配合,找到达到系统目标最优的方案。
6. 作决策:进行系统开发。
7. 计划实施:将选定的最优方案付诸实施,并在实践中不断修改。

从系统工程的发展简史和它解决问题的思路与步骤,可以看出运筹学与系统工程的关系极为密切,它是系统工程的主要理论基础。难怪早期的有关系统工程理论的教科书很多都以教授运筹学理论为其主要内容。尽管 20 世纪 90 年代以后,系统工程中结构化模型技术、系统分析、系统评价、系统仿真等技术已发展得比较成熟而自成体系,但运筹学的各个分支如数学规划、网络分析、存储论、排队论、

决策论、对策论等仍然是处理系统优化的主要技术手段。

四、运筹学的主要分支

运筹学是由解决不同领域优化问题的理论与方法构成的,其主要分支有:

1. 规划论:是运筹学的一个主要分支,它包括线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划等。它是在满足给定约束要求下,按一个或多个目标来寻找最优方案的数学方法。它的适用领域十分广泛,在工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策中都可以发挥作用。

2. 图论与网络分析:图是研究离散事物之间关系的一种分析模型,它具有形象化的特点,因此,比单用数学模型更容易为人们所理解。由于求解网络模型已有成熟的特殊解法,它在解决交通网、管道网、通讯网等的优化问题上具有明显的优势,因此,其应用领域也在不断扩大。最小生成树问题、最短路问题、最大流、最小费用流问题、中国邮递员问题、旅行推销员问题、网络计划都是网络分析中的重要组成部分,而且应用也很广泛。

3. 排队论:是一种研究公共服务系统的运行与优化的数学理论与方法。它通过对随机服务现象的统计研究,找出反映这些随机现象的平均特性,从而研究提高服务系统水平和工作效率的方法。

4. 决策论:是为了科学地解决带有不确定性和风险性决策问题所发展的一套系统分析方法,其目的是为了提高科学决策的水平,减少决策失误的风险。它广泛地应用在经营管理工作的高中层决策中。

5. 存贮论:又称库存论,是研究经营生产中各种物资应当在什么时间,以多少数量来补充库存,才能使库存和采购的总费用最小的一门学科。它在提高系统工作效率、降低产品成本上有重要作用。

6. 对策论:又称博弈论,是一种研究在竞争环境下决策者行为的数学方法。在社会政治、经济、军事活动中,以及日常生活中都有很多竞争或斗争性质的场合与现象。在这种形势下,竞争双方为了达到自己的利益和目标,都必须考虑对方可能采取的各种可能的行动方案,然后选取一种对自己最有利的行动方案。对策论就是研究双方是否都有最合乎理性的行动方案,以及如何确定合理行动方案的理论与方法。

此外运筹学还包括模拟论、可靠性理论、多目标规划、随机规划、组合优化等。近些年来又提出冲突分析,可以说运筹学的研究也出现了定量分析与定性分析相结合的发展趋势。

本书的主要任务是对现在的和未来的管理人才普及与推广运筹学的基本思想、理论和方法,并以把这些理论与方法能够应用于实践为主要目标。因此,全书内容以基本理论与方法为主,讲解由浅入深,通俗易懂,尽量避免烦琐的理论证明

与推导。很多算法以实例为引导,便于自学和理解。本书可以做为普通高校经济管理类专业本科生教材,也可以做为企业管理干部培训和自学的教材或参考书。

第一章

线性规划的基本理论及其应用

第一节 线性规划的数学模型及其标准形式

一、线性规划问题的数学模型

在生产实践和日常生活中,经常会遇到规划问题。所谓规划问题,简单地说,是指如何最合理地利用有限的资源(如资金、劳力、材料、机器、时间等),以便使产出的消耗最小,利润最大。如果利用数学方法来进行这种分析,这就是数学规划。当所建立的模型,都是线性代数方程时,这就是一个线性规划问题。这样的例子在管理和生产的实践中是很多的,我们现举一些例子来加以说明。

【例 1-1】 产品决策问题:某汽车工厂生产大轿车和载重汽车两种型号的汽车,已知生产每辆汽车所用的钢材都是 2 吨/辆,该工厂每年供应的钢材为 1 600 吨;工厂的生产能力是每 2.5 小时可生产一辆载重汽车,每 5 小时可生产一辆大轿车,工厂全年的有效工时为 2 500 小时;已知供应给该厂大轿车用的座椅每年可装配 400 辆。据市场调查,出售一辆大轿车可获利 4 千元,出售一辆载重汽车可获利 3 千元。问在这些条件下,工厂应如何安排生产才能使工厂获利最大?

解:这是一个典型的线性规划问题,现建立数学模型如下:

设: x_1 为生产大轿车的数量(辆),

x_2 为生产载重汽车的数量(辆)。

全年的利润值 $z = 4x_1 + 3x_2$ (千元)

我们的目标是使利润愈大愈好,所以这个函数我们称之为目标函数。

约束条件是:

原材料的限制 $2x_1 + 2x_2 \leq 1600$

工时的限制 $5x_1 + 2.5x_2 \leq 2500$

大轿车用座椅的限制 $x_1 \leq 400$

非负限制 $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

于是我们的这个例题可以用数学模型表达如下:

目标函数 $\max Z = 4x_1 + 3x_2$

约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 5x_1 + 2.5x_2 \leq 2500 \\ x_1 \leq 400 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

【例 1-2】 广告方法的选择问题:某公司要求销售部经理制定一个广告计划,计划用经费 10 000 元,要求尽量多的人能看到广告。该经理选择了三种广告方法:电视、广播电台和报纸。据调查各种广告的费用如下:在地方电视台下午播放 1.5 分钟要 1 000 元,晚上要 2 000 元。该经理决定在电视上作广告至少两次,但不多于四次。在地方报纸上作半页广告费用是 300 元,一页要 1 000 元。在广播电台上作广告的价格是,白天每半分钟 600 元,晚上每半分钟 400 元。公司限制用电台作广告的次数,白天最多不超过 5 次,晚上不超过 3 次。

根据该经理所获得的资料估计,在下午观看电视广告节目的大约有 40 000 人,晚上有 90 000 人。看日报的大约有 60 000 人,并估计其中 $1/2$ 的人看整页的广告, $1/3$ 的人看半页的广告。广播电台的听众白天有 40 000 人,晚上有 30 000 人。

解:现建立数学模型如下:

设: x_{TA} ——在下午用电视作广告的次数
 x_{TE} ——在晚上用电视作广告的次数
 x_{RA} ——在白天用电台作广告的次数
 x_{RE} ——在晚上用电台作广告的次数
 x_{NH} ——在报纸上登半页广告数目
 x_{NF} ——在报纸上登整页广告数目

其目标要求是尽量多的人能受到广告的宣传,所以目标函数是:

$$\begin{aligned} \max Z = & 40000x_{TA} + 90000x_{TE} + 40000x_{RA} \\ & + 30000x_{RE} + 20000x_{NH} + 30000x_{NF} \end{aligned}$$

受到的约束条件是:

$$\begin{cases} 1000x_{TA} + 2000x_{TE} + 600x_{RA} + 400x_{RE} + 300x_{NH} \\ \quad + 1000x_{NF} \leq 10000 \\ x_{TA} + x_{TE} \geq 2 \\ x_{TA} + x_{TE} \leq 4 \\ x_{RA} \leq 5 \\ x_{RE} \leq 3 \\ x_{TA}, x_{TE}, x_{RA}, x_{RE}, x_{NH}, x_{NF} \geq 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

【例 1-3】 配料问题:某奶牛场面临着选择两种饲料问题,每种饲料所含的营

营养成分及价格如表 1-1 所示:

表 1-1

营养成分 \ 饲料	甲(斤)*	乙(斤)
A(单位/斤)	4	2
B(单位/斤)	1	2
C(单位/斤)	1	4
价 格(元/斤)	0.15	0.22

已知每头奶牛每天需要三种营养的最低数量是 $A=20$ 单位, $B=14$ 单位, $C=16$ 单位, 问如何找一个最经济的配方, 以满足奶牛每天的最低营养量。

解: 建立其数学模型如下:

设: x_1 ——甲种饲料所需斤数

x_2 ——乙种饲料所需斤数

目标函数 $\min Z = 0.15x_1 + 0.22x_2$

约束条件

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

如果在每种饲料中都含有一种有害的成分 D, 甲饲料每斤含 D 0.1 个单位, 乙饲料每斤含 D 0.05 个单位。而奶牛每日食用 D 成分不得大于 1 个单位, 于是我们又增加了一个约束条件

$$0.1x_1 + 0.05x_2 \leq 1$$

则上面的线性规划问题变成

目标函数 $\min Z = 0.15x_1 + 0.22x_2$

约束条件

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ 0.1x_1 + 0.05x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1-4)$$

【例 1-4】下料问题: 某工厂要做 100 套钢架, 每套由长 2.9 米, 2.1 米和 1.5

* 斤为非法定单位, 1 斤 = 0.5 公斤。

米的圆钢各一根组成,已知原料长 7.4 米,问应如何下料使需用的原材料最省。

解:最简单的方法是从每根长 7.4 米的料上各截一根 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢,还余 0.9 米。这样共需 100 根原料,余料头 $0.9 \times 100 = 90$ (米)。

现考虑合理套裁,方法见表 1-2。

表 1-2

下料数(根) 长度(米) \ 方案	一	二	三	四	五
2.9	1	2		1	
2.1			2	2	1
1.5	3	1	2		3
合 计(米)	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头长(米)	0	0.1	0.2	0.3	0.8

建立数学模型如下:

设:按各方案下料的根数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , 于是有目标函数

$$\min Z = 0.0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5$$

约束条件

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

从上面几个例子,可以看出线性规划问题的数学模型有如下特点:

1. 都有一组未知变量($x_1, x_2, \dots, x_n$)代表某一方案,它们取不同的非负值,代表不同的具体方案。
2. 都有一个目标要求,实现极大或极小。目标函数用未知变量的线性函数表示。
3. 未知变量受到一组约束条件的限制,这些约束条件用一组线性等式或不等式表示。

正是由于目标函数和约束条件都是未知变量的线性函数,所以我们把这类问题称为线性规划问题。

二、线型规划问题的标准型

从前面的例子我们知道线性规划问题有各种形式,如目标函数有的是求极大

值,有的是求极小值;约束条件也有“ $\leq$ ”,“ $=$ ”,“ $\geq$ ”三种形式。现规定线性规划问题的标准形式为:

目标函数

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \\ b_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \end{cases} \quad (1-6)$$

式中, $c_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为价值系数; $a_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为技术系数; $b_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 称为限定系数。

建立标准型的好处在于:我们可以只针对这种标准形式来研究它的求解方法。至于其他各种形式的线性规划问题,我们可以先将非标准型变成标准型,然后再用标准型的求解方法求解。

为书写简便起见,(1-6)式可以写成如下两种形式,其中 s. t. 代表约束条件。

1. 简缩形式:

目标函数

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \cdots, n \\ b_i \geq 0 \end{cases}$$

2. 矩阵形式:

$$\max Z = CX$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

其中

$$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

在生产和管理实践中,很多优化问题都可用线性规划模型去解决,这些实际应用的例子见本章第九节。

第二节 线性规划问题的图解法

学习这一节的目的是通过两个变量的线性规划问题的图解法,了解线性规划问题解的特点,从而了解求解线性规划问题的一般方法——单纯形法的基本原理。

一、两个变量的线性规划问题的图解法

仍以前面汽车生产安排为例,它可以用下面的数学模型表示:

$$\text{目标函数} \quad \max Z = 4x_1 + 3x_2 \quad (1-7)$$

约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 5x_1 + 2.5x_2 \leq 2500 \\ x_1 \leq 400 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1-8)$$

1. 决策空间的几何表示法:现把所有约束条件都化为等式,即

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1600 \\ 5x_1 + 2.5x_2 = 2500 \\ x_1 = 400 \end{cases}$$

这些等式约束条件在以 x_1, x_2 为坐标轴的平面内都可以用直线表示(见图 1-1),于是这些约束条件构成了一个区域 $OABCD$ 。在这个区域里每一点都满足约束条件(1-8)。我们把满足所有约束条件的解称为可行解,而所有可行解的集合称为可行域。图 1-1 中 $OABCD$ 所围的区域就是可行域,这个区域里的每一点,包括边界上的点都是可行解。从图上我们可以看到这个可行域是一个凸多边形,我们把它称为凸集。

下面介绍几个有关的数学概念及定理。

(1) 凸集:如果在形体中任意取两点连接一根直线,若线段上所有的点都在这个形体中,则称该形体为凸集。

用数学语言表示就是:

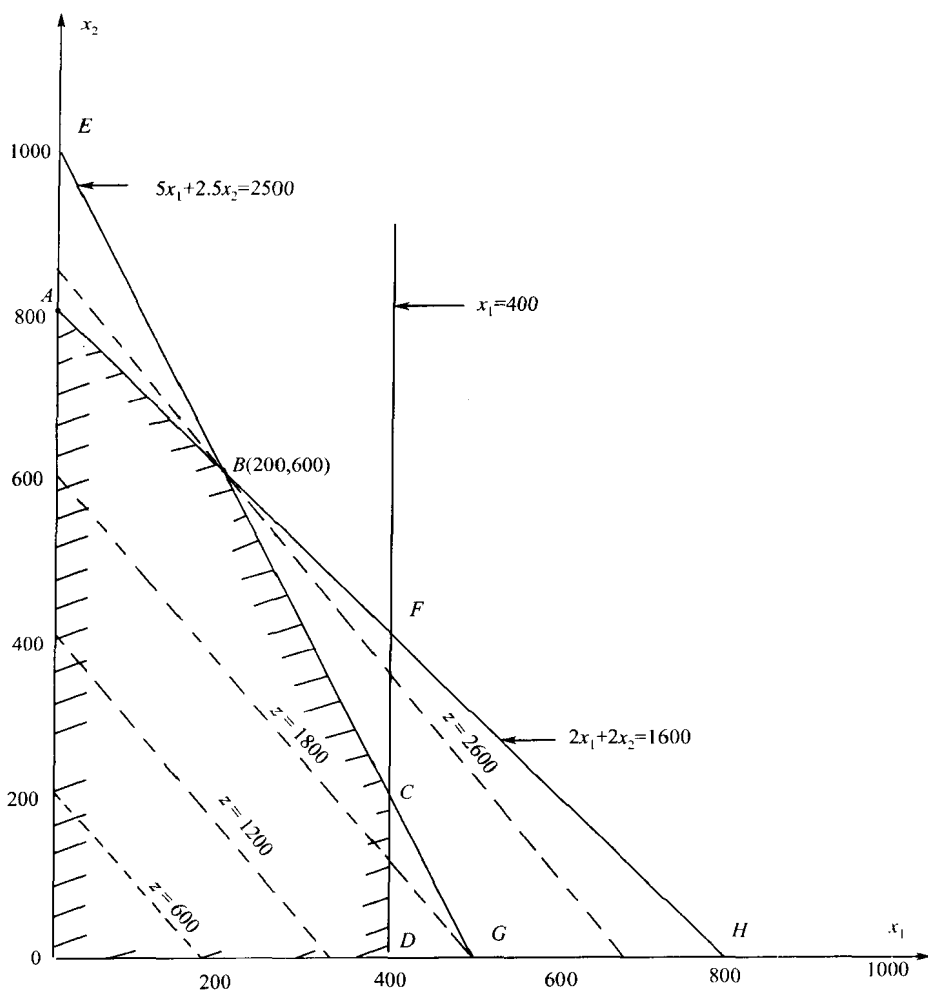


图 1-1

设 k 是 n 维欧空间的一个点集,任取两点 $x_1 \in k, x_2 \in k$ 。若它们连线上的一切点

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in k \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 k 为凸集。

实心圆、实心球体、实心立方体等都是凸集。如图 1-2 中的(a)、(b)图形为凸集,而(c)、(d)图形则不是凸集。

(2) 角顶: 设 k 为凸集, $x \in k$, x 若不能用不同的两点 $x_1 \in k, x_2 \in k$ 的线性组合表示为