

[苏联] В. Ф. 安托紐任科 著

李錫泉譯 吳天柱校

导线网的平差

中国工业出版社

本书以附有补充未知数的条件观测法之计算理论为基础，详细阐述了在顾及与不顾及边的系统误差情况下进行导线网平差的各种严密方法与概略方法。

在阐述各种方法的理论根据的同时，并列举了计算实例加以说明。

对于导线网的观测与平差之精度估计，亦列出了各种必要的公式。

本书供测绘作业人员、科研人员和测绘学院学生参考之用。

В. Ф. Антоноженко

УРАВНОВЕШИВАНИЕ

ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

ГЕОДЕЗИЗДАТ

МОСКВА·1962

* * *

导线网的平差

李锡泉译

吴天柱校

国家测绘总局测绘书籍编辑部编辑（北京三里河国家测绘总局）

中国工业出版社出版（北京修门内大街10号）

北京市书刊出版业营业登记证出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本 $787 \times 1092^{1/32}$ ·印张 $4^{1/8}$ ·字数87,000

1964年9月北京第一版·1964年9月北京第一次印刷

印数0001—2,740·定价（科七）0.65元

*

统一书号：15165·3059（测绘-110）

原 序

导綫网就其本身的用途、作业的方法以及所得成果的精度等方面来看，其形式是很多的。

选择最合理的方法来平差导綫网具有重大的意义。由于严密的平差方法过于繁瑣，由于测量中不可避免的系統誤差和起始数据的誤差，由于难于正确規定角度观测与长度测量之間的精度关系，以及由于多余观测的个数不多等緣故，因而在实际生产中，便广泛地采用了各种簡化的平差方法，其中亦包括分組平差法。

为了有效地应用各种比較严密的平差方法，作者認為必須作出如下說明。

估計观测的精度，規定角度观测与长度测量之間的精度关系，确定系統誤差的存在与性质，以及規定平差网对起始数据的精度要求等問題，只有在网比較大的情况下，即只有当这些問題对于作业已显得极为重要的情况下，才能更可靠地解决。如果在单一导綫中，多余观测的个数不多，那末在平差这样的网（即由各結点組成的导綫系）时，除了一条导綫外，其他所有与結点相連接的导綫都是多余的。顧及这种情形，便不能同意对网的結点元素实行概略平差，然后再对各导綫进行严密平差。

严密平差的结果，观测誤差将在顧及誤差累积的情形下进行配賦，并且网中各元素的最或然值之精度亦将因此而得到更严密的估計。

可是在分組平差的情形下，观测只是取得部分的一致，此时精度估計常常是不完全的。因为平差計算所消耗的人力和物力，較之建立导綫网所消耗的全部人力和物力乃是为数不大的，所以對於具有相当精度的观测成果和起始数据便應該采用严密的方法进行平差。

本书編写的目的就是向測量工作者介紹各种严密或近似严密的平差方法，但是这些方法从应用的观点来看却較古典的方法簡單。

本书所述方法是以附有未知数的条件观测法之計算理論作为基础。书中对任意导綫网和直伸导綫网的严密解算列举了三种情况：（1）边长系統誤差在平差前已用改正数改正；（2）在平差过程中确定整个网的系統誤差之共同系数 λ ；（3）在平差过程中按菲尔斯特內(G. Förstner)法分別确定每条导綫的系統誤差之系数 λ 。

关于附有未知数的条件观测法之应用，在И. Ю. 普兰尼斯-普兰涅維奇、Б. А. 利特文諾夫和И. И. 庫普欽諾夫的論文中已有說明。

在平差由直伸导綫构成的导綫网时，問題显然比較簡單。但是在按古典的方法进行严密平差时，却并不顧及导綫的直伸性。而根据細則和規範的要求則又必須尽量使导綫网由直伸的导綫构成。

对于单一导綫的平差，本书列出了四种方法：（1）古典的方法；（2）图解解析法；（3）等边直伸导綫的简化平差法；（4）确定坐标增量改正数不取决于角度和边长改正数时的平差方法。

本书所述的导綫网，是指其边长用直接测量的方法測定的导綫网。对于其边长用間接测量方法測定的导綫网，在采

用本书所述的方法时，必須根据該网所用的不同的观测方法而分別用其他的公式来計算权数。

由于本书是供測量生产的作业員用的，所以书中甚为注意平差計算和精度估計的实践方面。

В. Г. 謝利汉諾維奇副教授对本书草稿作出了評論并进行了校訂，作者对此表示衷心的感謝。作者在此还向П. А. 拉林副教授致以謝意，感謝他在評論本书时提出了不少改进意見。

目 录

原序

第一章 单一导线的平差	1
§ 1. 古典的方法	1
§ 2. 直接确定增量改正数的平差法	3
§ 3. 边长大致相等的直伸导线之平差	16
§ 4. 导线的图解解析平差法	17
第二章 导线网用附有补充未知数的条件观测法之 平差	22
§ 5. 一般理论	22
§ 6. 不顾及边的系统误差之导线网平差	24
§ 7. 各边系统误差含有共同系数 λ 的导线网之平差	45
§ 8. 分别确定每条导线的系统误差系数 λ 的导线网之平差	48
第三章 直伸导线构成的导线网之平差	76
§ 9. 导线折曲的限度	76
§ 10. 对所有导线具有确定共同系数 λ 之导线网的平差	79
§ 11. 具有确定每条导线的独立系数 λ 之导线网的平差	91
§ 12. 不顾及边的系统误差之导线网的平差	92
§ 13. 建筑方格网的平差	94
§ 14. 对分组平差的精度的若干见解	100
§ 15. 导线网的各种平差方法之比较	103
第四章 精度估计	107
§ 16. 平差前观测成果和起始数据的精度估计	107
§ 17. 按平差数据进行精度估计的基本公式	115
§ 18. 借反演法方程式确定未知数的权数	117
§ 19. 平差后未知数函数权的确定	119
§ 20. 借可靠间隔进行精度估计	122
参考文献	125

第一章 单一导线的平差

§ 1. 古典的方法

現以如下符号表示敷設于两固定点間的导綫之各种元素：

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ 为导綫左側的观测角；

$s_1, s_2, \dots, s_n$ 为直接测定的边长（这些 s 和 β 为已化算至高斯投影平面上的边和角）；

m_β 为测角中誤差；

μ 为每一米的量长中誤差；

$q = \frac{m_\beta^2}{\mu^2 \rho}$ 为輔助值；

$p_\beta = \frac{1}{q\rho}$ 和 $p_s = \frac{1}{s}$ 为观测角和测定边的权数；

α 为坐标方位角；

x 和 y 为点的坐标；

ζ 和 η 为重心坐标；

i 、 H 和 K 为指数，他們分別表示第 i 个元素、起始元素和終点元素；

$v_\beta, v_s, v_\alpha, v_x, v_y$ 为 β, s, α, x 和 y 的改正数；

f_β 为导綫的角度閉合差；

F'_x 和 F'_y 为对角度未作概略改正而算得的增量閉合差；

ρ 为 206265''。

若以导綫重心作为坐标原点，則将有如下形式的三个条件方程式：

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad [v_\beta] + f_\beta &= 0 \\ 2. \quad [v_x \cos \alpha] + \frac{1}{\rho} [v_\beta \eta] + F'_x + \frac{f_\beta}{\rho} \eta_K &= 0 \\ 3. \quad [v_x \sin \alpha] - \frac{1}{\rho} [v_\beta \zeta] + F'_y - \frac{f_\beta}{\rho} \zeta_K &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

顧及角度和边长的权数之法方程式为：

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad (n+1)q\rho k_1 + f_\beta &= 0 \\ 2. \quad Ak_2 + Ck_3 + f_x &= 0 \\ 3. \quad Ck_2 + Bk_3 + f_y &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= [\Delta x \cos \alpha] + \frac{q}{\rho} [\eta^2] \\ C &= [\Delta x \sin \alpha] - \frac{q}{\rho} [\zeta \eta] \\ B &= [\Delta y \sin \alpha] + \frac{q}{\rho} [\zeta^2] \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} f_x &= F'_x + \frac{f_\beta}{\rho} \eta_K \\ f_y &= F'_y - \frac{f_\beta}{\rho} \zeta_K \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

数值 f_x 和 f_y 为坐标增量的閉合差，它們是在将角度閉合差按导綫上 $n+1$ 个角度进行平均配賦之后求得的。

联系数按下式确定：

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{f_\beta}{(n+1)q\rho} \\ k_2 &= \frac{C}{N}f_y - \frac{B}{N}f_x \\ k_3 &= \frac{C}{N}f_x - \frac{A}{N}f_y \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

式中

$$N = AB - C^2. \quad (6)$$

改正数按下式计算:

$$\left. \begin{aligned} v_{s_i} &= \Delta x_i k_2 + \Delta y_i k_3 \\ v_{\beta_i} &= \eta_i k_2 - \zeta_i k_3 + q\rho k_1 \\ v_{\alpha_i} &= [v_\beta]_i \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{\Delta x_i} &= v_{s_i} \cos \alpha_i - \frac{v_{\alpha_i}}{\rho} \Delta y_i \\ v_{\Delta y_i} &= v_{s_i} \sin \alpha_i + \frac{v_{\alpha_i}}{\rho} \Delta x_i \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

如果角度已用闭合差 f_β 进行了概略改正, 这时, 式(1) — (8) 仍将是正确的, 不过这时应视 $f_\beta = 0$ 和 $k_1 = 0$ 。

§ 2. 直接确定增量改正数的平差法

直接确定增量改正数的平差方法与古典的方法之区别, 在于计算坐标增量改正数时, 不必与角度和边长的改正数发生关系, 因而它们可以不予确定。

将所得数值 v_s 和 v_α 代入计算坐标增量改正数的公式, 并引入如下符号:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \cos \alpha - \frac{q}{\rho} [\eta]_1^i \Delta y &= a \\ \Delta y \cos \alpha + \frac{q}{\rho} [\zeta]_1^i \Delta y &= c_x \\ \Delta x \sin \alpha + \frac{q}{\rho} [\eta]_1^i \Delta x &= c_y \\ \Delta y \sin \alpha - \frac{q}{\rho} [\zeta]_1^i \Delta x &= b \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

即得:

$$\left. \begin{aligned} v_{\Delta x} &= a k_2 + c_x k_3 \\ v_{\Delta y} &= c_y k_2 + b k_3 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

对导线各边求和之后可得:

$$\left. \begin{aligned} [v_{\Delta x}] &= [a] k_2 + [c_x] k_3 = -f_x \\ [v_{\Delta y}] &= [c_y] k_2 + [b] k_3 = -f_y \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

将等式 (11) 与法方程式比较, 便可以看到:

$$[a] = A, [b] = B, [c_x] = [c_y] = C.$$

等式 $[c_x] = [c_y]$ 可用作检查这些系数计算的正确性。

求得了联系数并知道了系数 a 、 c 、 b 之后, 即可按公式 (10) 算出 $v_{\Delta x}$ 和 $v_{\Delta y}$ 。

必要时, 边长改正数可按公式 (7) 计算, 而坐标方位角的改正数则按下式计算:

$$v_{\alpha_i} = \frac{q}{\rho} [\eta]_1^i (\rho k_2) + \frac{q}{\rho} [\zeta]_1^i (-\rho k_3). \quad (12)$$

角度改正数可作为有关的 v_{α} 的差数而求出。

按公式 (12) 计算改正数 v_{α} 之所以方便, 是因为式 $\frac{q}{\rho}$

$[\eta]_1^i$ 和 $\frac{q}{\rho} [\zeta]_1^i$ 均为已知。

現在我們来分析一下确定系数 a , b , c_x 和 c_y 的問題。

計算这些系数时将公式 (9) 写成如下形式更为方便:

$$\left. \begin{aligned} a &= s - \tau \Delta y \\ c_x &= \nu \Delta y \\ c_y &= \tau \Delta x \\ b &= s - \nu \Delta x \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \tau_i &= \sin \alpha_i + \frac{q}{\rho} [\eta]_i^4 \\ \nu_i &= \cos \alpha_i + \frac{q}{\rho} [\zeta]_i^4 \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

其中 s 为边长。

每条边的系数計算均按下式进行检查:

$$a + c_x + c_y + b = (\tau - \nu)(\Delta x - \Delta y) + 2s, \quad (15)$$

此式是由式 (13) 求得的。

系数 a 、 c 和 b 具有几何意义, 它們亦可用图解法确定。

如果引用如下符号:

$$-\frac{q}{\rho} [\zeta]_i^4 s_i = Q_{x_i}, \quad -\frac{q}{\rho} [\eta]_i^4 s_i = Q_{y_i}, \quad (16)$$

則式 (9) 可得如下形式:

$$\left. \begin{aligned} a &= \Delta x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha \\ c_y &= \Delta x \sin \alpha - Q_y \cos \alpha \\ c_x &= \Delta y \cos \alpha - Q_x \sin \alpha \\ b &= \Delta y \sin \alpha + Q_x \cos \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

将公式 (17) 与坐标軸轉动 α 角之后所得的坐标变换公式相比較, 变换后新的坐标是:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

可見公式 (17) 和 (18) 相似，因此按 Δx 和 Q_y 确定 a 和 c_y ，以及按 Q_x 和 Δy 确定 b 和 c_x 时，其計算所用的图解亦可以和按 x 、 y 确定 x' 、 y' 时所用的图解相同。必要的图形可以作于導綫图上。这些数值若按图 1 所示的諾模图来确定則更为簡便。

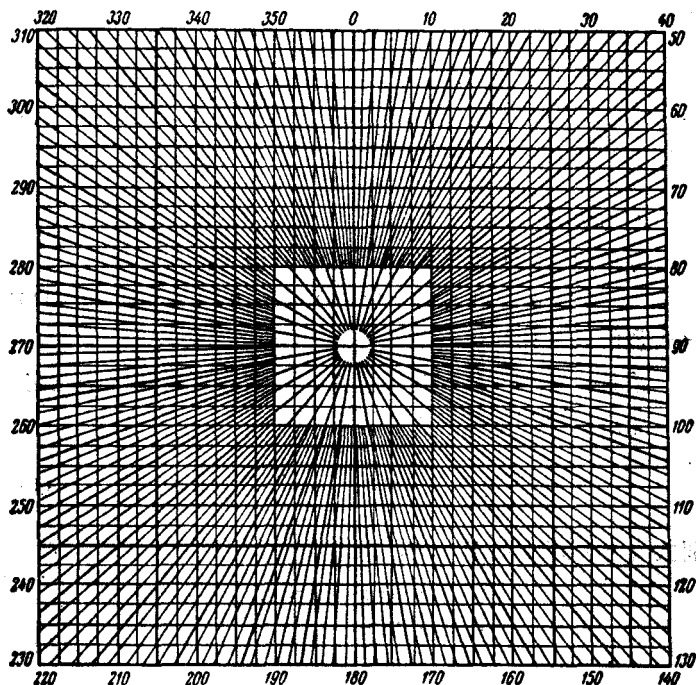


图 1

图 2a 所示，为利用放在諾模图上的彼此垂直的分划尺按 Δx 和 Q_y 来确定 a 和 c_y 的情形。图 2b 上所示，则为利用量测器来解算这个問題的情形。設由数值 Δx 和 Q_y 所确定的点系位于

α' 的方向上，茲从 0° 起，将此点移至 $\alpha' - \alpha$ 的方向上（ α 为由 a 和 c_y 所确定的直綫之坐标方位角），則移动后的点之坐标 x, y 即等于 a 和 c_y 。

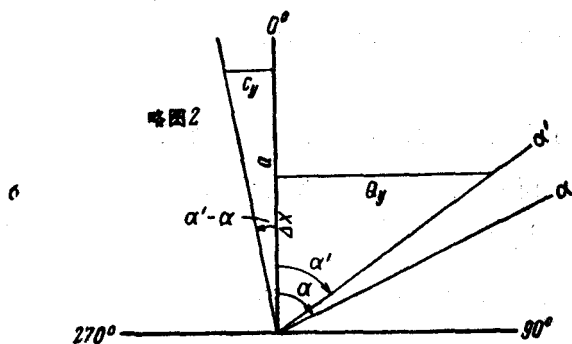
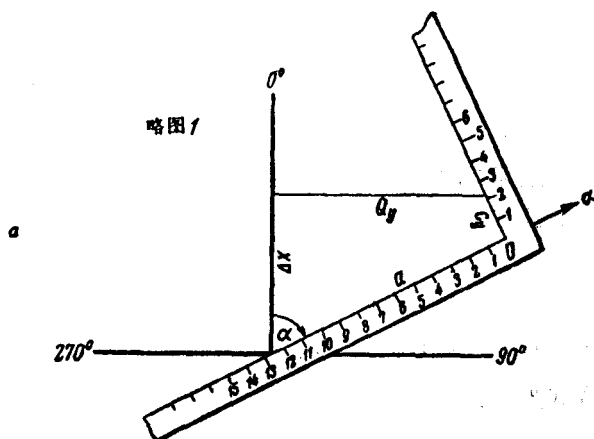


图 2

如果待定数值的有关綫段具有如下位置：即 a 和 b 位于方向 α 之上， c_y 位于方向 α 之左， c_x 位于方向 α 之右，則其待定

数值的符号为正。在利用量测器时方向 α 在 0° 上。

检查 a , c_y 和 b , c_x 的确定之正确性是: 数值 $x = \Delta x + Q_x$ 和 $y = \Delta y + Q_y$ 必须相应于数值 $x' = a + b$ 和 $y' = c_x - c_y$ 。

诸模图上的坐标网格之所以没有注记, 是为了根据导线的长度和 $\frac{q}{\rho}$ 的数值以便随时来赋予这些网格以不同的数值。

重心坐标 ζ 和 η 必须以10米整数为单位按增量 Δx 和 Δy 来计算, 其公式为:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= -\frac{1}{n+1} (\Delta x_n + 2\Delta x_{n-1} + \dots + n\Delta x_1) \\ \zeta_{i+1} &= \zeta_i + \Delta x_i \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

其检查式为 $[\zeta] = 0$ 。

数值 $\frac{q}{\rho}[\zeta]_i$ 的计算若用计算机按所有 ζ 的次序逐次乘以 $\frac{q}{\rho}$ 的方法来进行, 是很方便的。

由于增量的数值已减少了10倍, 所以 $\frac{q}{\rho}$ 应取用增大10倍之值。而 Q_x , Q_y 和 a , b , c 之值则由减少了10倍(以10米整数为单位)的数值求得。

η 和 $\frac{q}{\rho}[\eta]_i$ 可用与此类似的方法来计算。

必须指出, 数值 $\frac{q}{\rho}[\zeta]_i$ 和 $\frac{q}{\rho}[\eta]_i$ 对于增量数值变动的反应并不灵敏, 因此, 即使增量改正数与其精密的改正数有2—3毫米之差, 而坐标方位角的改正数有1—2"之

差，其数值 $\frac{q}{\rho}[\zeta]_1^i$ 和 $\frac{q}{\rho}[\eta]_1^i$ 仍可以按中数值，

$$\Delta x_{\text{中数}} = \frac{[\Delta x]}{n} \quad \text{和} \quad \Delta y_{\text{中数}} = \frac{[\Delta y]}{n} \quad (20)$$

并按如下公式进行计算，

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{\rho}[\zeta]_1^i &= -\frac{q}{\rho} \frac{\Delta x_{\text{中数}}}{2} (n+1-i)i \\ \frac{q}{\rho}[\eta]_1^i &= -\frac{q}{\rho} \frac{\Delta y_{\text{中数}}}{2} (n+1-i)i \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中 n 为导线的边数。

检查公式为：

$$[(n+1-i)i] = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad (22)$$

公式 (21) 能得出较好的成果。例如有一条导线，其边数为 16，边长为 150 米至 730 米，而坐标方位角则在 110° 的范围内变动，那末其改正数与精密的改正数之差的变动范围是：对于边和增量的改正数为 2 毫米，对于坐标方位角改正数为 $1''$ ；当改正数的数值最大时，它们则相应为 43 毫米和 $10''$ （见本书参考文献^[10]的第 300—303 页）。改正数的收敛性从下述例 2 亦可以得到证明。

在谈到导线平差计算的简化问题时，必须指出，这种简化计算不必用 2—3 个以上的有效数字来进行，其原因是增量与边长的改正数通常是以整数毫米来表示的，而坐标方位角改正数则通常是以整数秒来表示的。此外还须指出，由于导线中多余观测的个数不多，即使用最严密的公式进行计算，改正数确定的实际精度还是不高的。因此，没有必要强使改正数的计算达到 0.1 毫米和 $0''.1$ 的精度，而且即使达到

这种精度，也不过是形式而已。既然可使计算限制于整数毫米和整数秒数的精度上，那末我们就可以使计算简化，并且可以用对数计算尺来计算。

表 1 至表 3 列出按上述方法计算改正数的实例。

表 1 所作的计算是以一折曲导线为例，它的严密平差载于参考文献^[12]。表 2 和 3 则为图 7 所示导线网的第一条导线之平差计算。图 7 所示导线网在本书及本书参考文献^[12]中均用各种方法作了平差。

这条导线的直伸程度甚高，所以我们采用了较简单的公式。用严密的方法和用本书建议的方法进行平差之后可以看出，我们所得到的两个最后平差值实际上是相同的。

例 1. 折曲导线的平差。

法方程式及其解算：

$$1241 \quad k_2 + 796 \quad k_3 + 52 = 0$$

$$796 \quad 879 \quad -26 = 0$$

$$1 \quad 0.640 + 0.0419 = 0$$

$$1 \quad 1.105 - 0.0327 = 0$$

$$0.465 - 0.0746 = 0$$

$$10^4 k_2 = +0.160; \quad \rho k_2 = 3.30$$

$$10^4 k_3 = -0.144; \quad \rho k_3 = -2.93$$

系数 a , c , b 按诺模图确定。在表 1 的第 4 和 5、7 和 8、11 和 12 以及 13 和 14 栏中的分母，相应地表出了改正数 v_{a_1} 、 v_{a_2} 、 v_{a_3} 和 v_{a_4} 的计算。

例 2. 图 7 所示导线网的导线 1 之平差。

确定改正数的方法是将有关栏的分母相加，即坐标方位角改正数为第 3 栏加第 4 栏，边改正数为第 6 栏加第 7 栏， v_{A_1} 和 v_{A_2} 则相应为第 10 栏加第 11 栏和第 12 栏加第 13 栏。所得

表 1

点号	ζ	η	$\frac{q}{\rho} \left[\frac{t}{k_3} \right]$	$\frac{q}{\rho} \left[\frac{\eta}{\rho k_2} \right]$	$\frac{s}{\alpha^\circ}$	Δx k_3	Δy k_3	Q_x	Q_y	$\frac{a}{k_3}$	$\frac{a_x}{k_3}$	$\frac{a_y}{k_3}$	$\frac{b}{k_3}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-92	+90	-3.4 11.8	+3.4 -9.9	57 329°	48 -6.4	-29 -4.6	194	-194	140	76	140	180
2	-44	+61	-5.1 16.8	+5.6 -16.5	28 313°	19 -2.7	-20 -3.2	143	-157	128	91	92	112
3	-25	+41	-6.0 19.8	+7.1 -21.0	33 286°	9 -1.3	-31 -5.0	198	-234	228	182	57	88
4	-16	+10	-6.6 21.8	+7.5 -22.0	13 22°	12 -1.7	+5 +0.8	86	-98	-26 +3.7	-28 -4.5	96	82
5	-4	+15	-6.7 22.2	+8.0 -23.6	16 310°	11 -1.6	-13 -2.1	107	-128	104	74	73	79
6	+7	+2	-6.4 21.4	+8.1 -23.8	22 352°	22 -3.2	-3 -0.5	141	-178	47	18	174	140
7	+29	-1	-5.4 17.9	+8.1 -23.6	52 270°	0	-52 -8.3	281	-421	421	283	0	50
8	+29	-53	-4.3 14.2	+6.1 -17.8	36 311°	24 -3.5	-28 -4.5	155	-221	186	100	129	123
9	+53	-81	-2.3 7.8	+3.1 -9.0	11 355°	10 -1.4	-1 -0.2	25	-34	13	2	33	25
10	+63	-82	0	0						-1.9	0.3	-4.8	4.0
Σ	0	+2								$\Sigma=1241$ A	798 C	794 C	879 B