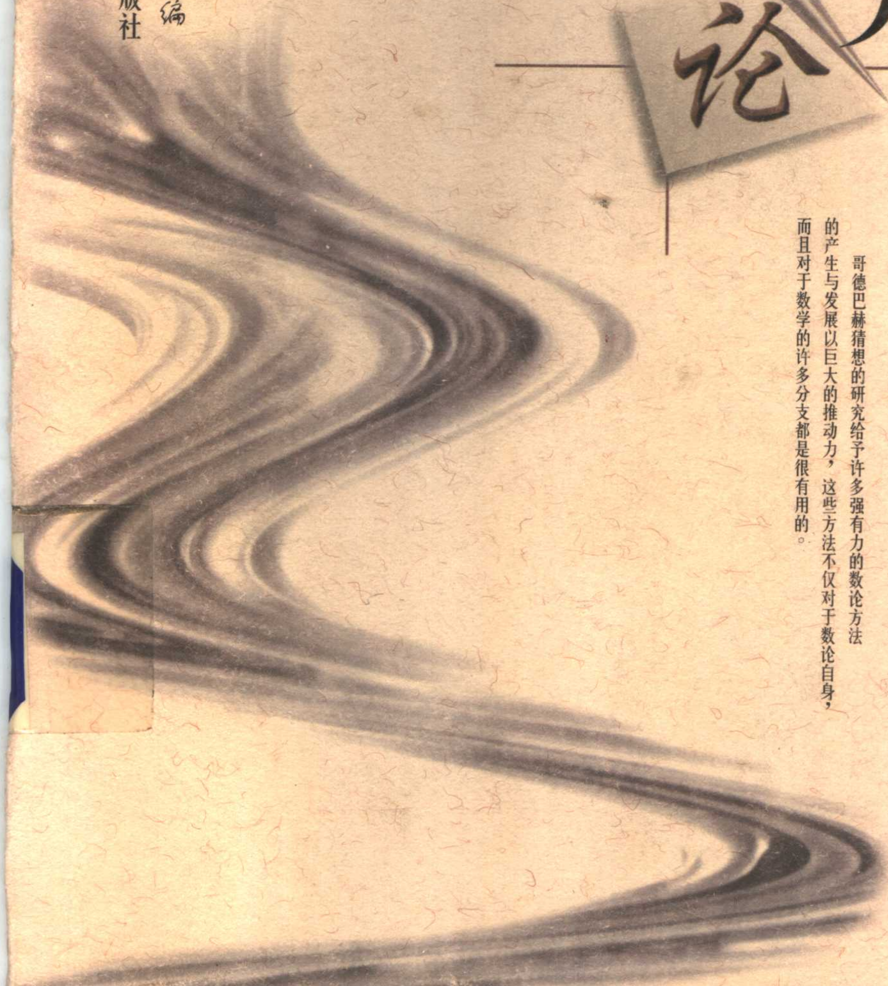
论丛

【数学名家论丛】

王元论哥德巴赫猜想

哥德巴赫猜想的研究给予许多强有力的数论方法的产生与发展以巨大的推动力，这些方法不仅对于数论自身，而且对于数学的许多分支都是很有用的。



◎李文林\主编

◎山东教育出版社

论丛

王元论哥德巴赫猜想

【数学名家论丛】

哥德巴赫猜想的研究给予许多强有力的数论方法的产生与发展以巨大的推动力，这些方法不仅对于数论自身，而且对于数学的许多分支都是很有用的。

◎李文林\主编

◎山东教育出版社

王元论哥德巴赫猜想

李文林　主编

出 版 者：山东教育出版社
（济南市纬一路 321 号　邮编：250001）
电　　话：(0531) 2023919　传真：2011455
网　　址：http://www.sjs.com.cn
发 行 者：山东教育出版社
印　　刷：山东新华印刷厂
版　　次：1999 年 9 月第 1 版
1999 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1—3000
规　　格：880mm × 1230mm　32 开本
印　　张：16 印张
插　　页：8 插页
字　　数：395 千字
书　　号：ISBN 7 - 5328 - 2833 - 6/O·26
定　　价：22.50 元

（如印装质量有问题，请与印刷厂联系调换）

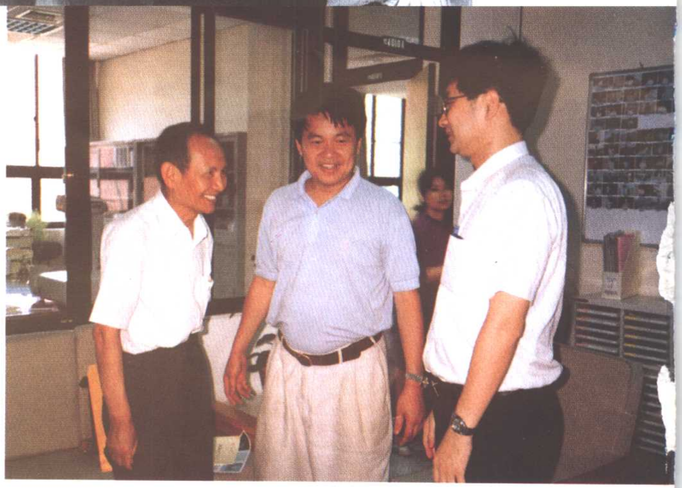
华罗庚先生与他的学生（左5王元，左7华罗庚）▷

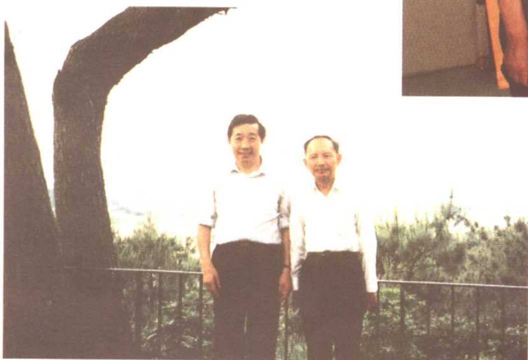
◁ 与华罗庚先生在一起

与苏步青先生一起去日本（左起：胡和生，苏步青，村上信吾，王元）▷

◁ 1981年与年轻学部委员在一起

1995年在台湾（中立者为合作者方源）▷





◁ 1992年在香港

1989年与肖文杰夫妇在北京 ▷

朝辭白帝彩雲間千里
江陵一日還两岸猿聲啼
不住輕舟已過萬重山

李白詩一首　戊寅王元

清明時節雨紛紛路上行
人欲斷魂借問酒家何處
有牧童遙指杏花村

杜牧詩一首 慕鵬先生雅屬 戊寅 王元

图书在版编目(C I P)数据

王元论哥德巴赫猜想/李文林主编.—济南：山东教育出版社，1999

(数学名家论丛)

ISBN 7—5328—2833—6

Ⅰ.王…　Ⅱ.王…　Ⅲ.哥德巴赫猜想—研究 Ⅳ.0156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 24930 号

序

本书是王元院士多年来在国内外各种刊物上发表的部分论述性文章（不包括专门的学术论著）的汇集. 内容分为四大部分：第一部分是全书的核心，论述哥德巴赫猜想的历史、意义、研究方法与进展，进而涉及当代数论的成就、应用及其在数学中的地位等；第二部分“综合论述”，从更广阔的视角阐发作者对整个数学的认识，以及作者在担任中国科学院数学研究所所长和中国数学会理事长等领导实践中形成的对发展中国现代数学的看法、见解，这部分还包括了以青少年为对象的关于如何学习与钻研数学的体会；第三部分“数学家”，收集了作者为我国现代数学史上一些著名数学家所写的纪念与评述文章，是中国现代数学的珍贵史料；最后一部分为作者个人成长经历与学术道路的自述.

本书书名强调了哥德巴赫猜想这一主题. 在数学史上，著名的猜想占有重要地位，这不仅是因为它们的难度使它们具有诱人的魅力，而且更由于在问题解决过程中产生的新概念与新方法对于整个数学进步的推动. 哥德巴赫猜想正是这样的著名问题. 在即将过去的世纪里，哥德巴赫猜想的研究取得了巨大进展，其中中国数学家留下了最辉煌的记录，王元的名字也因他在这方面的关键贡献（详见代导论及正文）而与这一著名的猜想联系在一起. 另一方面，为解决这样的世界难题而作出的巨大努力，必然深刻影响着一个数学家的数学思想和数学观. 主要基于上述这样一些考虑，本书书名中

突出了哥德巴赫猜想，但本书广泛的题材和王元院士丰硕的科研成果（参见代导论）都大大超出了哥德巴赫猜想的范围.

正如希尔伯特在列出包括哥德巴赫猜想在内的23个数学问题时所指出：“数学的有机的统一，是这门科学固有的特点.”面对分支越来越多的现代数学，有成就的数学家站在更高的高度考察数学的历史、特点、研究方法与发展趋势，他们在这方面的观点对于加深对数学作为有机整体的认识，引导创造性的研究，具有不可低估的作用. 同时，他们深入浅出的说明也有力地促进了社会公众对数学的了解. 在这样的意义上，可以说，出版著名数学家的论述性文集，比出版一本专门的数学论著更有影响. 因此，我们要感谢山东教育出版社为出版本书所作的努力和支持，感谢王元院士欣然同意将他的有关论述编纂成集，以飨读者.

本书是由王元院士亲自参与编选的,定稿之后,王元院士将全部稿件交给我通读,并嘱为之作序,这使我感到莫大的荣幸,同时又诚恐自己才疏学浅而有负信托.我于1965年从中国科技大学分配到数学所,当时王元已因哥德巴赫猜想等研究而享有声誉.1987年我担任数学研究所党委书记,有机会与当时任所长的王元院士合作共事.这是一段难忘的相处,这位著名学者在科研领导方面表现出来的远见卓识与民主风范,同样给我留下了深刻的印象,我们从此建立了密切的关系.在此次阅读文稿的过程中,联想多年来王元院士在工作和数学史事业上对我的热情扶持以及学术方面的谆谆教诲,不禁释虑从命,谨志小序,祝贺《王元论哥德巴赫猜想》文集的成功出版.

李文林

1998年6月12日

目　录

综合论述

数 学 家

自　述

王元：生平与工作简介（代导论）

李文林　袁向东

王元于 1930 年 4 月 30 日出生于浙江省兰豁县．他的父亲王懋勤当时任兰豁县长．抗日战争开始后，举家迁往四川，居于重庆江北县悦来场乡下．家庭生活颇难．王元的小学就是在战乱与艰难中，在农村小学中度过的．

1942 年，王元小学毕业，考取了位于合川县的国立第二中学．那时他的父亲出任中央研究院总办事处主任秘书．1946 年，随家一起回到南京，转入社教附中就读高中二年级，一年后，学校改名为南京市立六中．

1948 年，高中毕业．王元考取位于浙江金华的英士大学数学系．1949 年，随英士大学并入浙江大学数学系就读．浙江大学是我国著名数学家陈建功与苏步青教授多年执教的地方．特别是他们倡导的高年级学生读书讨论班，对于培养学生的独立工作能力很有帮助，浙大数学系的良好环境培育了王元对数学的浓厚兴趣．大学四年级时，王元在读书讨论班上报告了英格姆（A. E. Ingham）的"素数分布论"(The distribution of prime numbers, Camb, Tracts 30, 1932)，解析数论的优美深深地吸引着他．

1952 年，王元以优良的成绩从浙大毕业．在陈建功与苏步青教授的推荐下，由政府分配到中国科学院数学研究所工作．一年后，他被分配到数论组，在华罗庚教授指导下，研究解析数论．

王元在数论组很快显示出数学才能．1954 年，波兰数学家库拉托夫斯基（K. Kuratowski）来华访问，带来了西尔宾斯基（W. Sierpinski）与辛哲尔（A. Schingel）关于数论函数的论文．王元对这些工作作了一些改进，他的处女作就是与辛哲尔合作的《关于函数 $\varphi(n)$，$\sigma(n)$ 与 $\theta(n)$ 若干性质的一个注记》并在波兰发表．以后他就致力于筛法与哥德巴赫（C. Goldbach）猜想的研究，并于 1957 年证明（2，3），即每个充分大的偶数都是一个不超过 2 个素数之积与一个不超过 3 个素数之积之和．

1958 年，华罗庚与王元一起合作研究数论方法在近似分析中的应用，特别是高维空间的数值积分问题．他们建立了基于经典代数数论与丢番图逼近论的高维积分近似计算方法，他们的这一合作延续了二十年．

1966 年，"文化大革命"中断了王元的工作，他受到了错误的批判与不公正的待遇．1972 年，王元恢复了他的数学研究工作，此后他从事代数数域上的丢番图方程与不等式的研究及与方开泰教授一起研究数论方法在统计中的应用．1985 年以后，王元还从事中国近代数学史的研究．

1978 年以后，王元致力于撰写一些专著，计有：《数论在近似分析中的应用》（1978，与华罗庚合作），《哥德巴赫猜想》（1984），《在中华人民共和国普及数学方法的个人体会》（1989，与华罗庚合作），《代数数域上的丢番图方程与不等式》（1991），《统计中的数论方法》（1994，与方开泰合作），《华罗庚》（1995）与《微积分》（1997 与方源合作）．

由于王元在数学上的成就，他于 1978 年被提升为中国科学院数学研究所研究员，1980 年被选为中国科学院学部委员（院士）．王元得到过国家自然科学一等奖（与陈景润、潘承洞一起）、陈嘉庚物质科学奖（与华罗庚一起）及何梁何利数学奖．

王元于1984～1987年任中国科学院数学研究所所长．1988～1992年任中国数学会理事长．1986年以后任全国政协委员．

王元于1967年与郭宝文女士结婚，他们有两个儿子．

数学工作

一 数论

1．筛法与哥德巴赫猜想．

哥德巴赫猜想是1742年哥德巴赫在与欧拉（L. Euler）通信中提出来的，可以表述为：

（A）每个偶数＞5都是两个奇素数之和．

（B）每个奇数＞8都是三个奇素数之和．

显然由（A）可以推出（B)．这一问题至今仍未解决．直至20世纪20年代，由于圆法与筛法的产生，才使这个问题的研究有了一些好的结果．

筛法起源于古老的“埃拉托塞尼氏（Eratosthenes）筛法”．布伦（V. Brun）于1919年对它作出了重要改进，并且用于猜想(A)，他证明了（9，9），即每个大偶数都是两个素因子个数均不超过9的整数之和，类似地可以定义（a，b)．布伦之后，又出现了其他一些关于筛法的改进．例如赛尔伯格（A. Selberg）筛法(1947)，布赫夕塔布（A. A. Buchstab）恒等式（1937）及孔恩（P. Kuhn）加权筛法（1954）等．至1954年，最好的结果为（4，4）（布赫夕塔布，1940）与（a，b）（$a+b\leqslant 6$）（孔恩，1954)．

综合上述方法，王元于1956年与1957年分别证明了：

$$(3,4)(1956),(2,3)(1957). \tag{1}$$

筛法可以简单叙于下：考虑集合 $P_a=\{m:1\leqslant m<n,\ p\mid m(n-m)\Rightarrow p>n^{1/a}\}$,此处 $a\geqslant 2$，n 为偶数及 p 表示素数，若

能证明当 l 为正整数且当 n 充分大时有 $P_{l+1}>0$，则得（l，l），再考虑 $Q_a=\{q:1<q<n,\ p\mid(n-q)\Rightarrow p>n^{1/a}\}$，此处 q 表示素数，则由 $Q_{l+1}>0$ 就导出(1, l).

首先是埃斯特曼（T. Estermann）于 1932 年在广义黎曼（G. Riemann）猜想（GRH）之下证明了：每个大偶数都是一个素数与一个不超过 6 个素数之积之和. 简单记为$(1,6)_R$.

王元将埃斯特曼的结果改进为：

$$(1,4)_R(1956),(1,3)_R(1957). \tag{2}$$

利用布伦筛法，素数分布理论与林尼克（Yu. V. Linnik）大筛法，瑞尼（A. Renyi）于 1948 年证明了（1，c），此处 c 是一个常数，瑞尼定理的证明中隐含了下面的中值公式：存在 $\delta>0$，使

$$(M_\sigma)\sum_{k\leqslant x^\delta}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x;k,l)-\frac{1}{\varphi(k)}\int_x^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right|$$

$$=O\left(\frac{x}{(l_nx)^{c_1}}\right).$$

此处 $c_1\geqslant 6$ 为一个常数，$\varphi(k)$ 表示欧拉函数及 $\pi(x;k,l)=\sum\limits_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(\mathrm{mot}\ k)}}1$，其中 p 过素数 $\leqslant x$，若将（M_δ）中的 k 的范围扩大至 $x^{1/2-\varepsilon}$，其中 ε 为任意正数，则（M_δ）就可以用来代替 $(1,3)_R$ 证明中的（GRH），巴尔巴恩（M. B. Barban）与潘承洞分别在 1961 年与 1962 年独立地证明了（M_δ），其中 $\delta=\frac{1}{6}-\varepsilon$ 与 $\delta=\frac{1}{3}-\varepsilon$. 潘承洞并由他的 M_δ（$\delta=\frac{1}{3}-\varepsilon$）推出了（1，5），以后他们又独立得出（$M_\delta$），其中 $\delta=\frac{3}{8}-\varepsilon$ 并推出（1，4）.

王元指出由潘承洞的$(M_\delta)(\delta=\frac{1}{3}-\varepsilon)$即能推出(1,4).

以后，庞比尼（E. Bombieri）与阿·维诺格拉朵夫（A. I.