技工学校教材

数学

下册

兴平化工技校
李丰 主编

·6
19

化学工业出版社

技工学校教材

数学

下册

兴平化工技校
李丰 主编

化学工业出版社

内 容 提 要

本教材系由化工部教育司委托化工技校基础课教材编委会组织编写的。教材立足于目前技校教学改革的要求，对传统的数学课教材的内容作了必要的调整和修改，力图使之更能适应后继课程教学的需要和培养新型人材的需要。本教材分上、下两册出版。下册包括：函数和极限，导数及其应用，微分及其在近似计算中的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程简介等高等数学的简单内容。

本教材可作为技工学校各化工类专业的数学教科书，亦可作为职业中学和职工培训的数学教材。

技工学校教材

数　　学

下　　册

兴平化工技校

李丰　主编

责任编辑：徐世峰

封面设计：任　辉

*

化学工业出版社出版

（北京和平里七区十六号楼）

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本$787\times1092\ 1/32$印张$6\ 3/4$字数 148千字

1989年11月第1版　1989年11月北京第1次印刷

印　数　1—10,500

ISBN 7-5025-0658-6/G·170

定　价2.50元

前　　言

本教材是根据化工部1988年颁发的化工技工学校《数学教学大纲》、由无机教材委员会具体组织、本着改革的精神编写的。

教材分上、下两册。上册包括：代数、立体几何、解析几何；下册包括：微积分、常微分方程。总课时拟订为198学时，上册讲授130学时，下册讲授68学时，两学期讲完。

教材以打好基础为目的，加强了基础知识的掌握、基本技能的培养等方面的内容。并在第〇章简要复习了初中的部分重要内容。为了保证学生在规定时间内学好基础内容，未将参数方程、极坐标等章节列入本教材，将指数方程和对数方程、三角函数的和差化积和积化和差、三角方程、复数等章节作为选学内容（在书中用※标示出来）。为了强调和体现教材知识性和实用性的有机统一，以便更符合学生的认识水平和接受能力，在不破坏数学体系的前提下，对教材深度的确定、层次的编排等方面作了一些探索性的改革。微积分所取的内容，基本上满足了专业课和专业技术对高等数学的要求，并可为学生今后进一步的提高打下一定的基础。常微分方程简介作为部分专业的选学内容。

在编写过程中，力求做到理论联系实际，尽量符合培养中级工的需要，并注意文字通俗易懂，详略得当，重点突出，便于学生接受。尽量使作业编排比较精练，分练习和习题两类，便于选用。

本教材适应于招收初中毕业生三年制技工学校各专业，下册可单独作为招收高中毕业生的技校各专业的教材。也可作为职业高中和职工培训的数学教材。

本教材由陕西兴平化工技校王向东和李丰主编。王向东编写第〇、一、二、七、八、十、十一共七章，李丰编写其余各章。南京化学工业公司技校杜德有主审第十二章～第十七章；吉林化学工业公司技校徐春晖主审第九章～第十一章；其余各章由重庆市化工技校郝一夫主审。参加审阅的有：四川化工总厂技校李正维，湖南岳阳设备安装技校孙长春，太原化工技校王红平，北京有机化工厂技校邢淑燕。

这次编写工作，由于时间比较紧促，编者水平有限，缺点和错误在所难免，恳切地希望广大读者批评指正，以便今后进一步的修改和完善。

编者

一九八八年九月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第十二章　函数和极限

极限是事物发展变化的趋势在数量上的反映，是微积分学中最基本的概念之一，本章首先系统地复习五种基本初等函数，研究复合函数和初等函数，然后引入极限概念，并建立一些有关极限运算的法则，最后讨论函数的连续性。

第一节　基本初等函数与初等函数

一、函数的概念

定义　设A是一个确定的数集，f是一个确定的对应法则。如果对于任意一个$x\in A$，通过f，都有唯一确定的y与之对应，那么我们就说f是定义在A上的一个函数，记作

$$y=f(x)$$

x叫做自变量，数集A叫做这个函数的定义域。y叫做函数或因变量。当x取遍A中的一切值，与之对应的y所成的数集叫做这个函数的值域。

如果自变量x取某一数值x_0时，函数y有确定的对应值，那么就说这个函数在x_0处有定义，用记号

$$f(x_0)\text{或}y|_{x=x_0}$$

表示对应的函数值。

记号“f”表示变量y和变量x之间的对应法则，在对函数进行一般性研究时，$f(x)$可以代表x的任何一个函数，但在同一个问题中，如需要同时讨论几个不同的函数时，为了避免混淆，不同的函数要用不同的记号来表示，例如$y=$

$F(x)$，$y=\varphi(x)$等等。

例 1 将直径为d的圆木锯成截面为矩形的木料（图12-1），试列出矩形截面的两条边长之间的函数关系式。

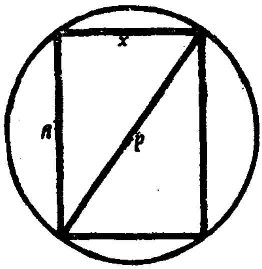

图 12-1

解：设矩形截面的一条边的长为x，另一条边的长为y，由勾股定理得

$$x^2+y^2=d^2$$

由于y只能取正值，解出y，得

$$y=\sqrt{d^2-x^2}$$

这就是所求的函数关系式。根据问题的实际意义，这个函数的定义域为区间（0，d）。

例 2 设$f(x)=x^2-2x$，求$f(x-1)$。

解：$f(x-1)=(x-1)^2-2(x-1)=x^2-4x+3$。

例 3 若$f(x-1)=x^2$，求$f(x)$。

解：令$x-1=u$，则$x=u+1$，

所以 $f(u)=(u+1)^2$，

从而 $f(x)=(x+1)^2$。

二、基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这五种函数统称为**基本初等函数**。这些函数我们在前面几章中已经学过，下面分别对它们作一系统的复习。

1．幂函数 $y=x^a$（a为常数）

这个函数的定义域随a值的不同而有所不同，例如，$y=x^3$的定义域是$(-\infty, +\infty)$（如图12-2）；$y=x^2$的定义域是$(-\infty, +\infty)$（如图12-3）；$y=x^{1/2}=\sqrt{x}$的定义域

是[0, $+\infty$)（如图12-4）；$y=x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$（如图12-5）；$y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$的定义域是 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$（如图12-6）。

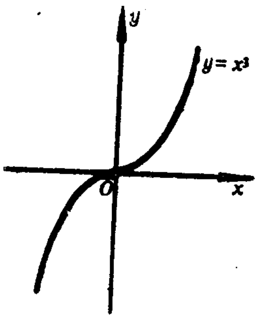

图 12-2

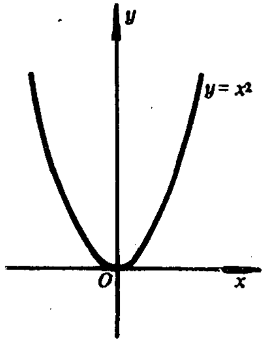

图 12-3

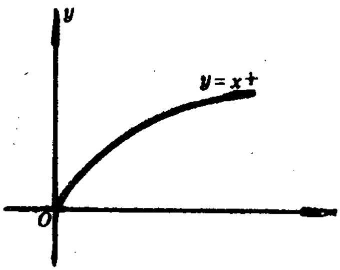

图 12-4

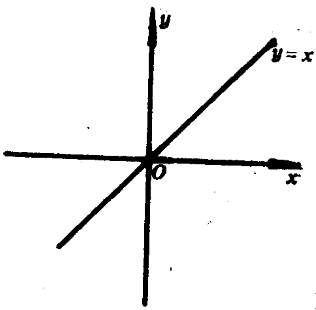

图 12-5

幂函数$y=x^{\alpha}$有以下性质：

（1） α 是奇数时，函数为奇函数，α 是偶数时，函数

为偶函数。

（2）其图象分布在每个象限的一支都具有单调性。

2．指数函数　$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）

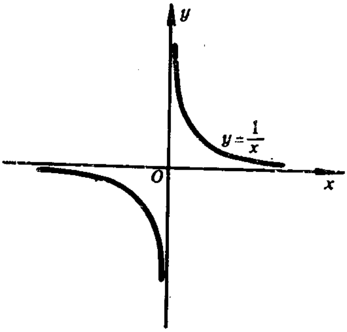

图 12-6

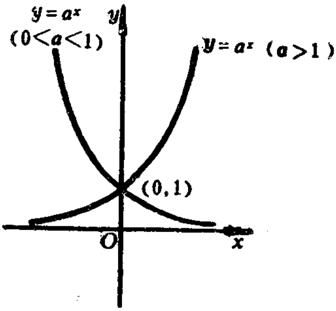

图 12-7

这个函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$，它的图象如图12-7所示。

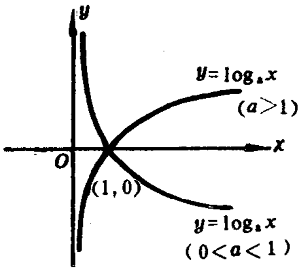

图 12-8

指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）有以下性质：

（1）对于$a>0$，函数的图象都在x轴的上方。都经过点（0，1）。

（2）当$0<a<1$时，函数单调减少；当$a>1$时，函数单调增加。

3．对数函数　$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）

对数函数和指数函数互为反函数。它的定义域是$(0, +\infty)$，其图象如图12-8所示。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

以10为底的对数函数叫做**常用对数函数**，记作$y=\lg x$；以e（$e\approx 2.71828$，是个无理数）为底的对数函数叫做**自然对数函数**，记作$y=\ln x$。在高等数学中，常常把对数函数$y=\log_a x$通过换底变成自然对数函数$y=\dfrac{\ln x}{\ln a}$再进行研究。

对数函数$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）有以下性质：

（1）函数的图象都在y轴的右侧，都经过点(1，0)。

（2）当$0<a<1$时，函数单调减少；当$a>1$时，函数单调增加。

4．三角函数

$y=\sin x$　$y=\cos x$　$y=\mathrm{tg}\,x$　$y=\mathrm{ctg}\,x$　$y=\sec x$　$y=\csc x$。

前四个函数比较常用，它们的定义域、图象和性质如图12-9，图12-10，图12-11，图12-12所示。

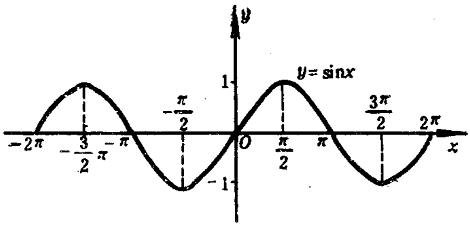

图 12-9

$X\in(-\infty, +\infty)$；奇函数，周期是2π；在区间$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$（$k\in Z$）上单调增加，在区间$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$（$k\in Z$）上单调减少；$|\sin x|\leqslant 1$。

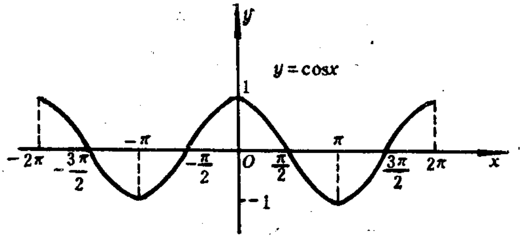

图 12-10

$x\in(-\infty, +\infty)$；偶函数；周期是2π；在区间$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ $(k\in Z)$上单调增加，在区间$[2k\pi, (2k+1)\pi]$ $(k\in Z)$上单调减少；$|\cos x|\leqslant1$。

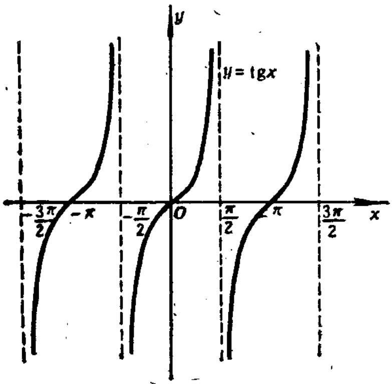

图 12-11

$x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in Z)$：在区间$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in Z)$内单调增加；奇函数；周期是$\pi$。

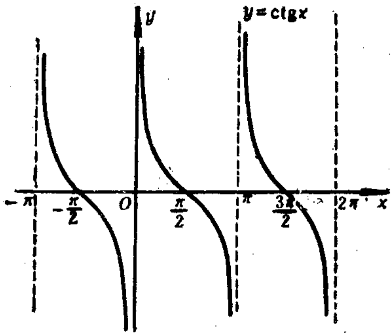

图 12-12

$x\in(k\pi,\ (k+1)\pi)(k\in Z)$；在区间$(k\pi,\ (k+1)\pi)(k\in Z)$内单调减少；奇函数；周期是$\pi$。

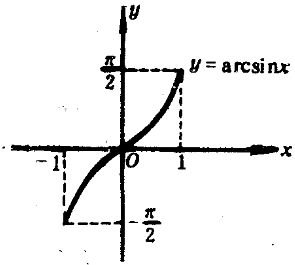

图 12-13

$x\in[-1,\ 1]$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，奇函数；增函数。

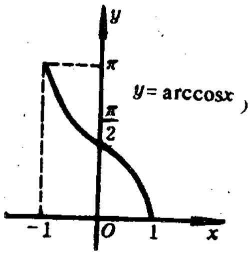

图 12-14

$x\in[-1,\ 1]$，$y\in[0,\ \pi]$，减函数

5．反三角函数

$y=\text{arc}\sin x$ $\quad y=\text{arc}\cos x$ $\quad y=\text{arc tg}x$ $\quad y=\text{arc ctg}x$

它们的定义域、值域、图象及其性质如图12-13，图12-

14，图12-15，图12-16所示。

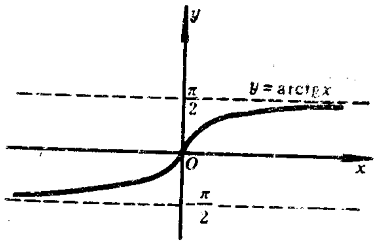

图 12-15

$x\in(-\infty,\ +\infty)$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，奇函数；增函数。

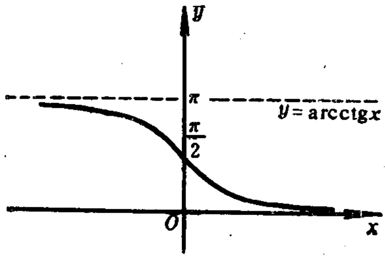

图 12-16

$x\in(-\infty,\ +\infty)$，$y\in(0,\ \pi)$，减函数。

三、复合函数　初等函数

在很多实际问题中，变量间的函数关系，往往都是比较复杂的。

例如，将质量为m的物体，以初速v_0竖直向上抛出，试求它的动能E和时间t的函数关系。

由物理学知$E=\frac{1}{2}mv^2$，即动能E为速度v的函数。但速度v又是时间t的函数：$v=v_0-gt$，这里略去空气阻力，其中g是重力加速度。因此，得

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$$

这样，动能E通过v而变成了t的函数。

定义 设y是u的函数：$y=f(u)$，而u又是x的函数：$u=\varphi(x)$，并且$\varphi(x)$的函数值的全体或部分使得$f(u)$有定义，那么y通过u也是x的函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

我们称这个函数是由$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称**复合函数**。其中u称为中间变量。

例 4 设$y=f(u)=\lg u$，$u=\varphi(x)=\sin x$，求复合函数$y=f[\varphi(x)]$，并指出它的定义域。

解：$y=f[\varphi(x)]=\lg\varphi(x)=\lg\sin x$，

复合函数的定义域由不等式$\sin x>0$确定，解这个三角不等式，得

$$x\in(2k\pi,\ (2k+1)\pi)\quad(k\in Z)。$$

由例4不难看出，复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域和$u=\varphi(x)$的定义域可能不相同。

例 5 设$f(x)=\frac{1}{x}$，$\varphi(x)=1+x^2$，求$f[\varphi(x)]$和$\varphi[f(x)]$。

解：$f[\varphi(x)]=\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{1+x^2}$，

$$\varphi[f(x)]=1+[f(x)]^2=1+\frac{1}{x^2}。$$

例5表明：复合函数的复合次序不能调换。

例 6 指出下列各复合函数是由哪些基本初等函数（以及多项式）复合而成的：

（1） $y=\sqrt{\sin x}$； （2） $y=\mathrm{arc}^2\sin x$；

（3） $y=\ln\sqrt{1-x^2}$； （4） $y=x^2+2^{\cos x}$。

解：（1）函数$y=\sqrt{\sin x}$是由函数$y=\sqrt{u}$和$u=\sin x$复合而成的；

（2）函数$y=\mathrm{arc}^2\sin x$是由函数$y=u^2$和$u=\arcsin x$复合而成的；

（3）函数$y=\ln\sqrt{1-x^2}$是由函数$y=\ln u$、$u=\sqrt{v}$和$v=1-x^2$复合而成的；

（4）函数$y=x^2+2^{\cos x}$等于函数$y=x^2$与$y=2^{\cos x}$之和，而函数$y=2^{\cos x}$是由函数$y=2^u$和$u=\cos x$复合而成的。

例 7 分析函数$y=\mathrm{arc}\ \sin(\ln x)$的复合过程，并求它的定义域。

解：$y=\mathrm{arc}\ \sin(\ln x)$是由函数$y=\mathrm{arc}\ \sin u$和$u=\ln x$复合而成的；

∵ $y=\mathrm{arc}\ \sin u$的定义域是$[-1, 1]$，

$u=\ln x$的定义域是$(0, +\infty)$，

∴ $y=\mathrm{arc}\ \sin(\ln x)$的定义域由不等式组：

$$\begin{cases}-1\leqslant\ln x\leqslant 1,\\ x>0。\end{cases}$$

确定，解这个不等式组，得

$$\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e。$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com