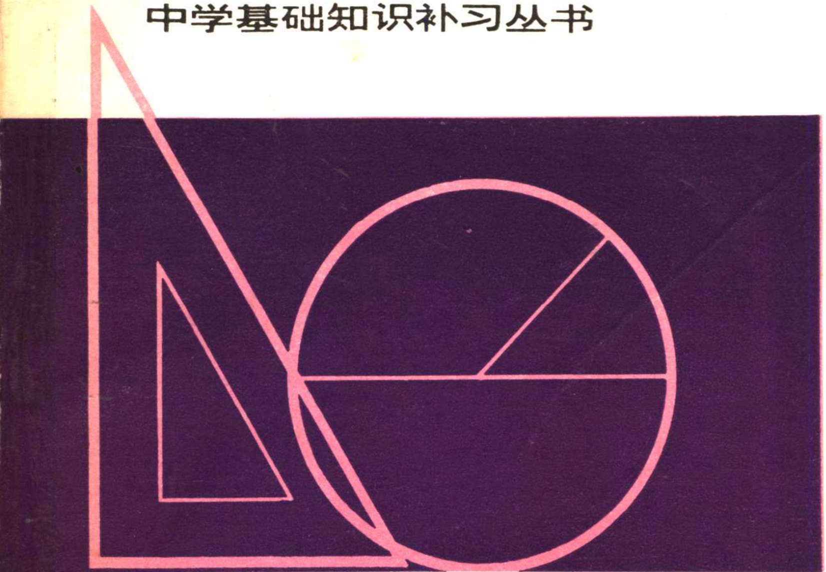
中学基础知识补习丛书



北京市海淀区教师进修学校主编

数学复习与题解

补 充

电力工业出版社

中学基础知识补习丛书

数学复习与题解

补 充

北京市海淀区教师进修学校主编

电 力 工 业 出 版 社

中学基础知识补习丛书
数学复习与题解
补　充
北京市海淀区教师进修学校主编
*
电力工业出版社出版
（北京德胜门外六铺炕）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力印刷厂印刷
*
787×1092毫米　32开本　$6\frac{1}{4}$印张　136千字
1982年5月第一版　1982年5月北京第一次印刷
印数 000001—500000 册　定价 0.54 元
书号 15036·4322

说　明

《数学复习与题解》1981年版，是按教学大纲1981年度过渡执行计划要求编写的．这次再版，按1982年度过渡执行计划要求，补充“集合与对应”及“行列式与线性方程组”两章，合为第六篇“代数补充”，增编“导数和微分”及“导数和微分的应用”两章，合为第七篇“微积分初步（上）”，以满足1982年复习需要．“微积分初步（下）”及大纲的其他内容（如概率和统计部分等）将于1982年修订版中补齐，以满足1983年及以后完全执行大纲时的复习需要．

北京市海淀区教师进修学校等

一九八一年十一月

目　录

说　明

第六篇　代数补充

第七篇　微积分初步（上）

第六篇 代数补充

第一章 集合与对应

一、基 本 概 念

1.集合：

集合是一个不定义的原始概念，可以认为它是具有一定范围的、确定的对象的全体。

集合应具有以下三个属性：

（1）集合指的是某一类事物（对象）的全体，而不是其中任何个别事物。

（2）集合中的对象可以是任何事物，但事物的范围是确定的。

（3）一般说来，集合中的各个对象是互不相同的。

例如，所有质数组成一个集合；“一切大的自然数”不是集合；不能由1，1，1，2组成一个集合，等等。

集合的表示法：列举法；描述法。集合一般用大写字母A，B，C，…表示。特别地，以N表示自然数集，J表示整数集，R表示实数集。

2.元素：

组成一个集合A的每一个对象叫做集合A的元素，一般用小写字母a，b，c，…表示。

不含任何元素的集合叫做空集，用符号ϕ表示。

仅含有一个元素的集合叫做单元素集。单元素集$\{0\}$与

空集ϕ是不同的集合。

至少含有一个元素的集合叫做非空集合。

3.集合的包含与相等：

子集与扩集：如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，而集合B叫做集合A的扩集，记为

$$A \subseteq B,\ 或\quad B \supseteq A.$$

读作：A包含于B或B包含A。

真子集与真扩集：如果集合A是集合B的子集，并且集合B中至少有一个元素不是集合A的元素，那么集合A叫做集合B的真子集，而集合B叫做集合A的真扩集，记为

$$A \subset B,\ 或\quad B \supset A.$$

任何一个非空集合A都至少有两个显然的子集A与ϕ，这两个子集叫做A的显易子集。空集ϕ仅有一个显易子集是ϕ。

对于两个集合A、B，如果$A \subseteq B$，同时$B \subseteq A$，那么集合A与集合B叫做相等，表示为$A = B$，读作"集合A等于集合B"。

4.交集、并集与补集：

由同时属于A和B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的交集，记为$A \cap B$，读作A交B 或 A与B的交。

用描述法表示交集就是：

$$A \cap B = \{x; x \in A \quad 且 x \in B\}.$$

由属于A或者属于B（包括属于A且属于B）的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的并集，记为$A \cup B$，读作A并B或A与B的并。

用描述法表示并集就是：

$$A\cup B=\{x:x\in A或x\in B\}.$$

已知全集I，$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合叫做集合A的补集，记为$\bar{A}$，读作A的补集.

用描述法来表示：

$$\bar{A}=\{x:x\notin A且x\in I\}.$$

5.单值对应：

对应是一个原始概念．如果按照某一法则，使集合A的每一个元素a都与集合B中某一个元素b搭配，那么就说集合A中的元素a与集合B中的元素b对应.

如果按照某种对应关系，使集合A的任何一个元素在B中都有唯一的元素与它对应，这样的对应关系叫做从集合A到集合B的单值对应.

在单值对应下，A中的元素a所对应的B中的元素b叫做a的象，a叫做b的原象.

6.一一对应：

设f是从集合A到集合B的单值对应．如果对于集合A的不同元素，在B中有不同的象，而且B中的每一个元素都有原象，单值对应f叫做从A到B的一一对应.

设f是从集合A到集合B的一一对应．对于B中的每一个元素b，使在A中b的原象a和它对应．这样所得的对应叫做对应f的逆对应，表示为f^{-1}．显然，f也是f^{-1}的逆对应.

7.充分必要条件：

充分条件：如果条件A具备，结论B一定成立，那么条件A就叫做结论B的充分条件.

必要条件：如果条件A不具备，结论B一定不成立（或者说结论B成立时，条件A必定具备），那么条件A就叫做

结论B的必要条件。

充要条件：如果条件A既是结论B的充分条件，同时又是结论B的必要条件，那么条件A叫做结论B的充要条件。

如果规定A表示条件，B表示结论，那么上述定义可以简记为：

若A，则$B \Longrightarrow A$是B的充分条件。

若不A，则不B（或若B，则A）$\Longrightarrow A$是B的必要条件。

若A，则B；同时若不A，则不$B \Longrightarrow A$是B的充要条件。

二、例 题 分 析

例 1. 判断下列命题是否正确，并说明理由：

（1）一个矩形是多边形的集合的一个元素。

（2）一辆汽车是汽车场的集合的一个元素。

（3）"一切大偶数"组成一个集合。

（4）方程$(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-4)=0$的五个根组成一个集合。

解：（1）对。多边形集合是以多边形为元素组成的，而矩形是多边形。

（2）不对。汽车场集合是以汽车场为元素组成的，而汽车与汽车场不是同一类事物。

（3）不对。"一切大偶数"没有确定的界限，如不能断定10008或10^{100}是否在这一范围之内。

（4）不对。我们约定集合中的各个对象是互不相同的，因此不能由1，1，2，3，4组成一个集合。

说明：（2）、（3）、（4）是分别根据“一、基本概念”中提到的集合的属性（1）、（2）、（3）进行判断的。其中问题（3）的解答是根据中学数学介绍的集合是指普通集合而言，界限不分明的集合叫模糊集合，这不在我们的讨论范围内。

例 2. 用适当的方法表示下列各集合，并指出哪些是有限集合？哪些是无限集合？

（1）方程 $x^2-x-2=0$ 的解。

（2）所有被 7 整除的数。

（3）方程 $x^2+1=0$ 的实数解。

（4）坐标平面上中心在原点半径是 5 的圆上的所有的点。

（5）以空集 ϕ 为元素的集合。

解：（1）$\{-1,2\}$，有限集合。

（2）$\{x: x=7k, k\in J\}$，无限集合。

（3）ϕ，有限集合。

（4）$\{(x,y): x^2+y^2=5^2\}$，无限集合。

（5）$\{\phi\}$，有限集合。

说明：我们把由有限个元素组成的集合叫做有限集，而把由无限个元素组成的集合叫做无限集。ϕ 为有限集。题（5）中 $\{\phi\}$ 是以 ϕ 为元素的单元素集，不应视作空集 ϕ。特别地，如令 $A=\{a\}$，且 $P=\{A\}$，这里 P 是以集合 A 为元素的单元素集，不能写成 $a\in P$ 或 $A\subset P$，应写成 $A\in P$。

例 3. 已知：集合 A、B 和 C。

试证：若 $A=B$，$B=C$，则 $A=C$。

证明：根据两个集合相等的定义，要证 $A=C$，仅需证 $A\subseteq C$，且 $C\subseteq A$ 即可。

（1）设x是集合A的任一元素，即$x\in A$。

$$\because A=B,\quad \therefore x\in B;$$

又 $$\because B=C,\quad \therefore x\in C.$$

由子集的定义可得 $A\subseteq C$.

（2）设x是集C的任一元素，即$x\in C$。

$$\because B=C,\quad \therefore x\in B;$$

又 $$\because A=B,\quad \therefore x\in A.$$

由子集定义可得 $C\subseteq A$.

由于$A\subseteq C$，且$C\subseteq A$，根据两集合相等的定义，因此有$A=C$.

说明：这一命题的证明，说明集合之间的相等关系具有传递性。想一想：集合之间的包含关系是否也具有传递性？

例 4. 求证：对于任意两个集合A与B，"并"的运算满足交换律，即有

$$A\cup B=B\cup A.$$

证明：从韦恩（Venn）图观察，集合的"并"对交换律是成立的。下面根据定义来证明。

（1）先证$A\cup B\subseteq B\cup A$.

设$x\in A\cup B$，则有$x\in A$或$x\in B$（并集定义），

即$x\in B$，或$x\in A$.

$$\therefore x\in B\cup A.\ （并集定义）$$

$$\therefore A\cup B\subseteq B\cup A.\ （子集定义）$$

（2）再证$B\cup A\subseteq A\cup B$。

设 $x\in B\cup A$，则有$x\in B$或$x\in A$（并集定义）.

即 $x\in A$，或$x\in B$.

$$\therefore x\in A\cup B.\ （并集定义）$$

$$\therefore B\cup A\subseteq A\cup B.\ （子集定义）$$

根据集合相等的定义，综合（1）、（2）的证明可得：

$$A\cup B=B\cup A.$$

说明：跟数和数之间的运算类似，集合与集合之间也需要进行如“并”、“交”、“补”等运算。这些运算也具有某些规律，如集合的“并”满足交换律等。想一想：集合的“交”是否满足交换律？用韦恩图来检验一下．应该指出：“集合的运算”与“集合上（或内）的运算”是不同的，后者是指在一个集合内元素之间的运算．

例 5． 指出下述条件相对于结论来说是充分条件？必要条件？还是充要条件？

（1）已知A、B表示集合，且$A\neq\phi$．

条件：$A\cap B=\phi$；结论：$B=\phi$．

（2）已知I表示全集，A为其子集($A\subseteq I$)．

条件：$\overline{A}=\phi$；结论：$A=I$．

（3）已知f是从集A到集B的一个对应．

条件：f是一一对应；结论：f是单值对应．

解：（1）在A是非空集合的前提下，条件$A\cap B=\phi$具备时，不一定有结论$B=\phi$发生，如$A=\{1,2\}$，$B=\{3,4\}$．因此条件不是结论的充分条件．但条件不具备时，即$A\cap B\neq\phi$时，结论一定不成立，即$B\neq\phi$．因此，$A\cap B=\phi$是$B=\phi$的必要条件．

说明：对于结论，必要条件是，有了它结论不一定成立，而没有它结论却一定不成立。如果把条件与结论的联系写成命题的形式：若A，则B．那么，原命题不真，逆命题正确，便构成A是B的必要条件．如此例，若$A\cap B=\phi$，则$B=\phi$不真，但$B=\phi$，则$A\cap B=\phi$正确．因此，$A\cap B=\phi$是$B=\phi$的必要条件．

（2）已知$A\subseteq I$，$\bar{A}=\{x: x\notin A且x\in I\}$，但条件$\bar{A}=\phi$具备时，$I$中这样的$x$是不存在的，因此结论$A=I$一定成立。这样，$\bar{A}=\phi$是$A=I$的充分条件。反过来，当$A=I$时，有$\bar{A}=\phi$。这样，$\bar{A}=\phi$是$A=I$的必要条件。因此条件$\bar{A}=\phi$是结论$A=I$的充分必要条件。

说明：把条件与结论写成命题形式：若$\bar{A}=\phi$，则$A=I$。反过来，其逆命题：若$A=I$，则$\bar{A}=\phi$。逆命题正确，则原命题的条件$\bar{A}=\phi$是结论$A=I$的必要条件。注意，不要把$A=I$当条件，而$\bar{A}=\phi$当结论。

（3）已知f是集A到集B的一个对应。当f是一一对应时，f一定是单值对应。但当f不是一一对应时，f不一定不是单值对应。如设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6,7\}$，且f：$x\longmapsto 2x+1$。由于B中元素4、6没有原象，因此f不是一一对应，但显然f是单值对应。这样，条件"f是一一对应"是结论"f是单值对应"的充分条件。

说明：充分条件是这样的条件：有了它一定行，没有它不一定不行。按命题形式去考虑：若A，则B真确，但若B，则A不真，那么A是B的充分条件。

例6. 根据下述已知条件，判断f是不是从集A到集B的一一对应。如果是，求出f的逆对应；如果不是，说明理由。

（1）$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,7,10\}$。

$$f: x\longmapsto y=3x+1.$$

（2）$A=\{-1,1,2,3\}$，$B=\{2,5,10\}$。

$$f: x\longmapsto y=x^2+1.$$

（3）$A=\{1,2,3,\cdots\}$，$B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$。

$$f: x \longmapsto y=\frac{1}{x-1}.$$

（4）$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 5, 10\}$.

$$f: x \longmapsto y=x^2+1.$$

解：（1）对应关系 f，使得 A 中每一个元素在 B 中都有唯一的元素和它对应，即

$$f: 1 \longmapsto 4; \quad 2 \longmapsto 7; \quad 3 \longmapsto 10.$$

因此 f 是从集 A 到集 B 的单值对应（映射）。又由于集合 A 的不同元素在集合 B 中有不同的象（单映射），因此单值对应 f 满足一一对应定义的第一条（是单射）。但是，由于集合 B 中的元素 5 没有原象，因此 f 不是从集合 A 到集合 B 的一一对应。

（2）对应关系 f，使得 A 中每一个元素在 B 中都有唯一的元素和它对应，即

$$f: -1 \longmapsto 2; \quad 1 \longmapsto 2; \quad 2 \longmapsto 5; \quad 3 \longmapsto 10.$$

因此 f 是从 A 到 B 的单值对应（映射）。又由于集合 B 中的每一个元素都有原象（满映射），因此单值对应 f 满足一一对应定义中的第二条（是满射）。但是，由于集合 A 中的不同元素，如 -1 与 1，在 B 中有相同的象 1，因此 f 不是从 A 到 B 的一一对应。

（3）由于集合 A 中的元素 1 在集合 B 中没有象，因此对应关系 f 不是从 A 到 B 的单值对应。这样，f 不是从 A 到 B 的一一对应。

（4）对应关系 f 是从 A 到 B 的单值对应，即是从 A 到 B 的映射。由于对于 A 中的不同元素，在 B 中有不同的象（单映射），因此单值对应 f 满足一一对应定义中的第一条，即映射 f 是单射。同时由于 B 中的每一个元素都有原象（满映

射），因此单值对应 f 满足一一对应中的第二条，即映射 f 是满射。根据一一对应的定义，f 是从 A 到 B 的一一对应。

一一对应是，f：$x \longmapsto y = x^2 + 1$，由于

$x = \sqrt{y-1}$（$y > 1$），因此 f 的逆对应是

$$f^{-1}: y \longmapsto x = \sqrt{y-1}.$$

说明：在判断对应关系 f 是否是一一对应时，应首先判断 f 是否是从 A 到 B 的单值对应（映射）。由于"f 是单值对应"是"f 是一一对应"的必要条件，因此如果 f 不是单值对应，f 就一定不是一一对应［如（3）］。单值对应 f，应同时满足单射与满射的条件时才是从 A 到 B 的一一对应（或一一映射）。

为表达方便起见，我们引用了单射与满射两个名词。其实课本中规定单值对应是一一对应的第一个条件便是单射的定义，而第二个条件便是满射的定义。由一一对应定义可知，单值对应、单射、满射、一一对应四者之间有如下关系：

{单值对应(映射)}$\supset${{单射}$\cup${满射}}

{单射}$\cap${满射}={一一对应(一一映射)}

用韦恩图表示如下（见图6-1）：

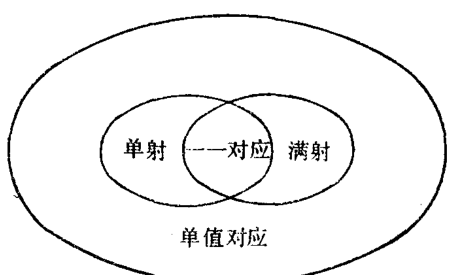


图 6-1

练　　习（A组）

1.用列举法表示下列各集合：

（1）$A=\{$一年中的四个季节$\}$.

（2）$A=\{$252与180的最大公约数$\}$.

（3）$A=\{$90的约数$\}$.

（4）$A=\{x:|x|<1$，且$x\in N\}$.

（5）$A=\{$任一整数的平方的末位数字$\}$.

并指出哪些集合是有限集？哪些是无限集？哪些是单元素集？哪些是空集？

解：（1）$A=\{$春，夏，秋，冬$\}$，有限集.

（2）$A=\{36\}$，单元素集.

（3）因为

$$\begin{aligned}90&=1\times 90=2\times 45=3\times 30=5\times 18\\&=6\times 15=9\times 10,\end{aligned}$$

所以$A=\{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$，是有限集.

说明：在列举一个自然数的约数时，可以从小到大试除得到“因数对”后再作列举。如果把一个自然数N分解质因数：$N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{11}^{\alpha_n}$（$p_1$，$p_2$，…，$p_n$为互异质数），其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$是自然数，那么$N$的约数的个数是

$$F(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1).$$

利用这个自然数约数个数的公式可以检验所得的约数是否有遗漏。如$90=2^1\times 3^2\times 5^1$，则其约数的个数为$F(90)=(1+1)(2+1)(1+1)=12$(个)，从而看出本题列举的约数没有遗漏.