连分数

〔苏联〕A. Я. 辛钦 著

上海科学技术出版社

連 分 数

〔苏联〕A. Я. 辛欽 著

刘詩俊 刘紹越 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

連分数理論研究一种特殊的算法，是数学分析、概率論、力学、数論等的重要工具之一.

本书系統地叙述連分数理論，是一本入門书，共分三章，闡述連分数的性质，用連分数来表示数和連分数的度量理論，深入淺出，說理清晰.

本书可供大学数学系师生，高中数学教师以及科学工作者閱讀参考.

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

А. Я. Хинчин

Физматгиз · 1961

連 分 数

刘詩俊 刘紹越 譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

大东集成联合印刷厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印張 3 4/32 排版字数 75,000
1965 年 9 月第 1 版 1965 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—5,000

統一书号 13119·670 定价（科六）0.46 元

第三版序言

当 A. Я. 辛欽 (Хинчин) 的这本书由苏联国家数学物理书籍出版社刊印第三版时，作者已經逝世了. 因此，本版除去增添了一些关于文献的注解之外，沒有作任何修改.

虽然辛欽写此书已是二十五年以前的事了，但它仍使人讀来新颖有味. 难怪在最近十年中，它被許多国家翻譯再版了很多次. 并且，由于計算技术新工具的发展，自然地引起了对各种計算算法，其中也包括連分数算法的注意. 在这方面，几年前曾出現了 A. H. 霍萬斯基 (Хованский) 的一本有实用意义的专著 ("連分式及其推广在近似分析問題上的应用，Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа"，苏联国家技术书籍出版社，1956 年❶). 虽然辛欽并沒有提出类似的目的，可是他的书对于連分数算法的研究，对于数的度量理論这一深入而有趣的問題，都可以作为一个很好的引論. 作者在后一問題的发展上貢献了很大的力量. 第三章的大部分是他的研究成果.

我希望所推荐的这本书将有象二十五年前那样多的广大讀者津津有味地来閱讀，而本人也就是二十五年前的讀者行列中的一員.

Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко)

---

❶ 此书有中譯本，叶乃膺譯，科学出版社，1962 年. ——譯者注

第二版序言

本书第二版与第一版相比較，沒有重要的修改.

从本书出第一版之时起，关于連分数的其他俄文专著还未出現. 在包含連分数初步知識的一般的数論教本中，可以推荐 Д. А. 格拉維(Граве)，Б. А. 温科夫(Венков)及 И. В. 阿諾尔德(Арнольд)的书。

1949 年 10 月　**A. 辛欽**

第一版序言摘要

連分数理論(或者更常見地称之为連續分数理論)研究一种特殊的算法，它是数学分析、概率論、力学、特別是数論中的重要工具之一. 这本初級入門性讀物的目的仅在于向讀者介紹形如

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}$$

的所謂最簡連分数，而且主要是一切"元素"$a_i(i\geqslant 1)$为正整数的連分数. 这个最重要的同时也是研究得最多的連分数类，是連分数理論的极大部分算术应用与很多分析应用的基础.

我认为出版关于連分数理論的专題性初等著作是必要的. 因为这一理論过去是中学数学教学大綱中的一部分，現在却被删去了，因此沒有被写进新的初等代数教本里；另一方面，高等学校(甚至綜合大学的数学系)教学大綱中也沒有規定讲授这种理論，因此

高等学校的相应的新教本中自然也沒有談到連分数．于是，有必要掌握这一初等工具的专家們就不得不寻找革命前的教科书或国外的专著了．

因此，本书的基本目的在于填补我們教科书中的这一空白，因而它必須是初等的和尽可能通俗的书；这在很大程度上預先决定了本书的体例．但是，为了适应各种应用的需要，它的內容有些已超出了最低限度的范圍．特別是最后一章包含着連分数的度量理論（或概率論）的基础，这是重要的新篇章；其次，在第二章內許多地方，我試图在不超出初等范圍的条件下，尽可能地着重指出連分数这一工具在研究无理数的算术性质时的基本作用．我认为，既然出版連分数理論基础的单行本，不提到这些最富于現代科学意义的部分是可惜的事．

至于談到材料的安排，这里必須說明的只是在第一章先敍述了理論的形式部分（这里說的基本上都是元素为正数——不一定是整数——的連分数，或常常更广泛的是元素为簡单独立变量的連分数）．我們先将所研究对象的形式方面的性质告訴讀者，再讲到它的內容，这样做是有缺陷的——它使形式与內容相脫离，——这从教育学的角度来看也是不好的．

但是，不言自明，这样作能够达到方法学上更大的明确性（因为讀者可以直接看出，連分数的哪些性质依賴于本身的构造，哪些性质是元素为正整数的連分数所特有的）．提前敍述形式部分可使算术理論（它是全部理論的实际对象）的进一步发展建立在已經准备好了的公式的基础上，因此可以把讀者的全部注意力集中于所敍述材料的內容方面去，不再被純粹的公式推导分散了精力．

1935年2月12日　莫斯科　　A. 辛欽

目　　录

第一章　工具的性质

§1 引　言

如下的表达式称为最簡連分数:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}. \tag{1}$$

字母 a_0, a_1, a_2, $\cdots$ 在最一般的情形下理解为独立变量；根据不同的需要这些变量可以在不同的域中取值．例如，可以认为 a_0, a_1, a_2, $\cdots$ 是实数或复数，一个或多个变量的函数，等等．按照本书的目的，我們假定 a_1, a_2, $\cdots$ 都是正数；a_0 为任意实数．我們称这些数为給定的連分数的元素．元素的个数可为有限或无限．在第一种情况下，我們可将此連分数表为如下形式

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}} \tag{2}$$

并且称之为有限連分数，或更确切地称之为 n 項連分数(所以 n 项連分数有 $n+1$ 个元素)；在第二种情况下，我們将連分数表为(1)的形状，并称之为无限連分数．

每个有限連分数都是对其元素进行有限次有理运算的結果；因此按照我們对其元素所作的假設，任何有限連分数都表示某个实数；特别是若此連分数的元素皆为有理数，则此連分数本身也是有理数．

反之，我們不能直接认为无限連分数代表某个数值．至少，在

获得进一步的結論之前，它只是一种形式上的記号，就象无穷級数，在它的收斂性問题还未提出时，也只是一种形式上的記号．但是，它应当是数学研究的对象．

为了方便起見，我們約定，今后将无限連分数(1)写成如下形式

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots], \tag{3}$$

又把有限連分数(2)写成

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]; \tag{4}$$

这样，有限連分数的項数就等于位于分号后的記号(指元素)的个数．

我們約定，把連分数

$$s_k=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k]$$

称为連分数(4)的节，在此，$0\leqslant k\leqslant n$；同样地，当 $k\geqslant 0$ 时，我們称 s_k 为无限連分数(3)的节．显然，任何(有限或无限)連分数的节都是有限連分数．

其次，我們約定，把連分数

$$r_k=[a_k;\ a_{k+1},\ \cdots,\ a_n]$$

称为(有限)連分数(4)的余式；类似地把連分数

$$r_k=[a_k;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \cdots]$$

称为(无限)連分数(3)的余式．显然，有限連分数的一切余式也是有限連分数，无限連分数的一切余式都是无限連分数．

对于有限連分数，按其定义推出关系式

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1},\ r_k] \tag{5}$$
$$(0\leqslant k\leqslant n).$$

对于无限連分数，类似的关系式

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots]=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1},\ r_k]\quad (k\geqslant 0)$$

只有形式的意义，因为等式右端的元素 r_k 是无限連分数，它現在还不是任何确定的数值．

§2 渐近分数

每一个有限連分数

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$$

都是对其元素进行有限次有理运算的結果，所以是其元素的有理函数，因而可表为关于 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ 的两个整系数多项式之商

$$\frac{P(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)}{Q(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)}.$$

如果这些元素取定了数值，则此連分数可表为普通分数 $\frac{p}{q}$ 之形．但此表示法自然不是唯一的．对于我們以后来說，重要的是它的某个**确定的**簡单分式表示式——我們称之为**标准式**．此表示式我們用归納法确定之．

我們采用分数 $\frac{a_0}{1}$ 作为零項連分数 $[a_0]=a_0$ 的标准式．現在假定对于項数小于 n 的連分数都已确定了其标准式，按照(5)式我們可将 n 項連分数 $[a_0;a_1,\ \cdots,\ a_n]$ 写为

$$[a_0;\ a_1,\ \cdots,\ a_n]=[a_0;\ r_1]=a_0+\frac{1}{r_1};$$

这里 $r_1=[a_1;\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$ 是 $n-1$ 項連分数，所以它的标准式已經确定；設它可表为

$$r_1=\frac{p'}{q'},$$

这时

$$[a_0;\ a_1,\ \cdots,\ a_n]=a_0+\frac{q'}{p'}=\frac{a_0p'+q'}{p'};$$

我們用此分数作为連分数 $[a_0;\ a_1,\ \cdots,\ a_n]$ 的标准式；这样，設

$$[a_0;\ a_1,\ \cdots,\ a_n]=\frac{p}{q},$$

$$r_1=[a_1;\ a_2,\ \cdots,\ a_n]=\frac{p'}{q'},$$

则对于这些标准式的分子与分母有关系式：

$$p=a_0p'+q',\quad q=p'. \tag{6}$$

同时我們看出，对于項数为任意的有限連分数，我們已唯一地确定了它的标准式．

在連分数理論中，連分数（有限或无限）$\alpha=[a_0;a_1,\ a_2,\ \cdots]$的节的标准式起着特别重要的作用；节

$$s_k=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k]$$

的标准式我們用 $\frac{p_k}{q_k}$ 来表示，并称之为連分数 α 的 k 阶漸近分数．此概念对于有限或无限的連分数 α 都是以同一方式确定的；不同之点仅仅在于，有限連分数只有有限个漸近分数，而无限連分数的漸近分数形成无穷集合．对于 n 項連分数 α，显然，

$$\frac{p_n}{q_n}=\alpha;$$

这样的連分数共有 $n+1$ 个漸近分数(阶数为 0, 1, 2, $\cdots$, n)．

定理 1 （漸近分数的构成規律）对于任何 $k\geqslant 2$

$$\left.\begin{aligned}p_k&=a_kp_{k-1}+p_{k-2},\\ q_k&=a_kq_{k-1}+q_{k-2}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

証明 当 $k=2$ 时，(7)式容易直接驗証．假設，当 $k<n$ 时(7)式都成立；观察連分数

$$[a_1;\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$$

并且用 $\frac{p'_r}{q'_r}$ 表示它的 r 阶漸近分数；根据(6)式

$$p_n=a_0p'_{n-1}+q'_{n-1},$$
$$q_n=p'_{n-1},$$

又因为按照我們的假設

$$p'_{n-1}=a_np'_{n-2}+p'_{n-3},$$
$$q'_{n-1}=a_nq'_{n-2}+q'_{n-3}$$

（这里写的是 a_n 而不是 a_{n-1}，因为連分数 $[a_1;\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$ 从 a_1 开

始，而不是从 a_0 开始)，所以根据(6)式

$$p_n=a_0(a_n p'_{n-2}+p'_{n-3})+(a_n q'_{n-2}+q'_{n-3})$$
$$=a_n(a_0 p'_{n-2}+q'_{n-2})+(a_0 p'_{n-3}+q'_{n-3})$$
$$=a_n p_{n-1}+p_{n-2},$$
$$q_n=a_n p'_{n-2}+p'_{n-3}=a_n q_{n-1}+q_{n-2},$$

定理由此得証.

我們所建立的遞推公式 (7)，它以元素 a_n 及前两个漸近分数的分子与分母来表示 n 阶漸近分数的分子与分母，乃是連分数全部理論中的基本公式.

附注 在研究中引入 -1 阶漸近分数并且設 $p_{-1}=1$，$q_{-1}=0$ 有时是方便的. 显然，在此約定 (而且仅仅在此約定) 之下，(7) 式当 $k=1$ 时保持有效.

定理 2 对于一切 $k\geqslant 0$

$$q_k p_{k-1}-p_k q_{k-1}=(-1)^k. \tag{8}$$

証明 将 (7) 式中两式分别乘以 q_{k-1} 及 p_{k-1}，然后由第二式减去第一式，我們得到:

$$q_k p_{k-1}-p_k q_{k-1}=-(q_{k-1}p_{k-2}-p_{k-1}q_{k-2}),$$

又因为

$$q_0 p_{-1}-p_0 q_{-1}=1,$$

所以定理得証.

推論 对于一切 $k\geqslant 1$

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}-\frac{p_k}{q_k}=\frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}. \tag{9}$$

定理 3 对于一切 $k\geqslant 1$

$$q_k p_{k-2}-p_k q_{k-2}=(-1)^{k-1}a_k.$$

証明 将 (7) 式中的两式分别乘以 q_{k-2} 与 p_{k-2}，然后从第二式减去第一式，我們据定理 2 得到:

$$q_k p_{k-2}-p_k q_{k-2}=a_k(q_{k-1}p_{k-2}-p_{k-1}q_{k-2})=(-1)^{k-1}a_k,$$

定理由此得証.

推論 对于一切 $k\geqslant 2$

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}-\frac{p_k}{q_k}=\frac{(-1)^{k-1}a_k}{q_kq_{k-2}}. \tag{10}$$

已經得到的这一系列簡单的結果，使我們很容易作出关于連分数的漸近分数之間相互关系的最重要結論．事实上，等式(10)指出，偶数阶漸近分数形成递增序列，而奇数阶漸近分数形成递减序列，所以此二序列彼此相向靠近（当然这些結論是在从 a_1 起所有元素为正数的前提下作出的）．因为据(9)式，每一个奇数阶分数都大于紧接着它的那个偶数阶分数，所以显然，任何奇数阶漸近分数必大于任何偶数阶漸近分数，从而我們得到下列結論：

定理 4 偶数阶漸近分数是递增序列，而奇数阶漸近分数是递减序列．同时任何奇数阶漸近分数大于任何偶数阶漸近分数．

显然，就特例而言，对于有限連分数 α，其所有偶数阶漸近分数都小于 α，其所有奇数阶漸近分数都大于 α（当然，最后一个等于 α 的漸近分数是例外）．

在結束本节时，我們来証明关于漸近分数的分子与分母的两个簡单而又重要的性质．

定理 5 对于任何 $k(1\leqslant k\leqslant n)$

$$[a_0;\,a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n]=\frac{p_{k-1}r_k+p_{k-2}}{q_{k-1}r_k+q_{k-2}} \tag{11}$$

（这里的 p_i, q_i, r_i 皆属于等式左端的連分数）．

証明 据(5)式

$$[a_0;\,a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n]=[a_0;a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_{k-1},\,r_k].$$

这等式右端的連分数显然有 $k-1$ 阶漸近分数 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$；其 k 阶漸近分数 $\frac{p_k}{q_k}$ 就是它自己，又按(7)式可得

$$p_k=p_{k-1}r_k+p_{k-2},\quad q_k=q_{k-1}r_k+q_{k-2},$$

所以定理得到証明．

定理 6 对于任何 $k\geqslant 1$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}}=[a_k;\ a_{k-1},\ \cdots,\ a_1].$$

証明 当 $k=1$ 时此关系式显然成立，因为它就是

$$\frac{q_1}{q_0}=a_1;$$

設 $k>1$，且設已証明

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}=[a_{k-1};\ a_{k-2},\ \cdots,\ a_1];\tag{12}$$

据(7)式

$$q_k=a_k q_{k-1}+q_{k-2},$$

故我們有：

$$\frac{q_k}{q_{k-1}}=a_k+\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}=\left[a_k;\ \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}\right],$$

因此，按照(5)式及(12)式

$$\frac{q_k}{q_{k-1}}=[a_k;\ a_{k-1},\ \cdots,\ a_1],$$

定理由此得到証明.

§3 无限連分数

每一个无限連分数

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots]\tag{13}$$

都对应着一个漸近分数的无穷序列

$$\frac{p_0}{q_0},\ \frac{p_1}{q_1},\ \cdots,\ \frac{p_k}{q_k},\ \cdots.\tag{14}$$

每个漸近分数都是某个实数；当序列(14)收斂，即它具有唯一确定的极限 α 时，很自然地可认为此数 α 是連分数(13)之“值”并写成

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots].$$

連分数(13)在这时称为收斂的；如果序列(14)无确定的极限，

则我們称連分数(13)是发散的.

收斂的无限連分数有許多类似于有限連分数的性质. 下面的命题使我們能充分地引伸这些类似性,因而它是一条基本性质.

定理 7 設无限連分数(13)收斂,则其所有余式皆收斂;反之,設連分数(13)的某一个余式收斂,则此連分数收斂.

証明 我們約定以 $\frac{p_k}{q_k}$ 表示連分数(13)的漸近分数,又以 $\frac{p'_k}{q'_k}$ 表示它的任何余式(例如 r_n)的漸近分数.

根据(11)式,显然有

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}=[a_0;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n+k}]=\frac{p_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k}+p_{n-2}}{q_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k}+q_{n-2}}\quad (k=0,\ 1,\ \cdots).\tag{15}$$

由此直接得到,若余項 r_n 收斂,即分数 $\frac{p'_k}{q'_k}$ 当 $k\to\infty$ 时趋于某极限,这个极限我們也用 r_n 表示,则分数 $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ 此时也趋于极限 α,

$$\alpha=\frac{p_{n-1}r_n+p_{n-2}}{q_{n-1}r_n+q_{n-2}};\tag{16}$$

从关系式(15)中解出 $\frac{p'_k}{q'_k}$,我們可用完全相同方式証明逆命題的正确性,这样就完成了定理 7 的証明.

注意,我們对于收斂的无限連分数所建立的(16)式,完全类似于以前对于有限連分数所証得的(11)式,因而定理 5 对于收斂的无限連分数也成立❶.

从上节定理 4 显然可得关于收斂的无限連分数的下述命题.

定理 8 收斂无限連分数的值大于其任何偶数阶漸近分数而小于其任何奇数阶漸近分数.

其次,上节定理 2 的推論引导我們从定理 8 得出下列結果,它

❶ 只須将定理 5 中的 r_k 理解为无限連分数的值. ——譯者注

在連分数的算术理論中起基本作用.

定理9 对任何 $k\geqslant 0$, 收斂无限連分数 (13) 的值 α 满足不等式[1]

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

显然,当 $k<n$, 定理9对于有限連分数

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$$

也成立,并且仅仅在 $k=n-1$ 时不等式变为等式,因为 $\alpha=\dfrac{p_n}{q_n}$.

若 α 为收斂无限連分数(13)的值, 則以下我們也将此連分数的元素称为数 α 的元素;同样地,我們把連分数 (13) 的漸近分数,节及余式称为数 α 的漸近分数,节及余式. 按照定理7, 收斂无限連分数(13)的一切余式具有确定的实数値.

类似于无穷級数, 对于无限連分数自然会提出关于其收斂性的判別法問題; 在我們所考虑的情形中(即当 $i\geqslant 1$, 有 $a_i>0$)能够提出非常簡便的收斂性判別法.

定理10 連分数(13)收斂的必要且充分条件是級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{17}$$

为发散.

証明 显然,据定理4, 无限連分数收斂的必要且充分条件为此定理所指出的两个序列具有同一极限 (当然, 据定理4, 在一切情况下,此二序列都有极限). 而(9)式指出,这种情形当且仅当

$$q_k q_{k+1}\to\infty \quad (k\to\infty) \tag{18}$$

时才会发生.

这样,条件(18)即所給連分数收斂的必要充分条件.

假設級数(17)收斂;据(7)式中第二式

---

[1] 我們指出,按照我們的假設,对一切 $k\geqslant 0$, 都有 $q_k>0$, 因为 $q_0=1, q_1=a_1$,又我們借助于归納法并按照 (7) 式之第二式可得 $q_k>0$ 对于一切 $k>1$ 都成立. ——辛欽注

$$q_k > q_{k-2} \quad (k \geqslant 1).$$

因此对于任何 k，$q_k > q_{k-1}$ 及 $q_{k-1} > q_{k-2}$ 二式中至少有一式成立．在第一种情况下，(7)式之第二式指出

$$q_k < a_k q_k + q_{k-2},$$

因此对于充分大的 k（据級数(17)的收斂性，当 $k > k_0$ 有 $a_k < 1$）有

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1-a_k};$$

在第二种情况下，当 $a_k < 1$ 上一公式指出

$$q_k < (1+a_k) q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1-a_k};$$

这样，对于一切 $k \geqslant k_0$ 我們有

$$q_k < \frac{1}{1-a_k} q_l,$$

这里 $l < k$；如果 $l \geqslant k_0$，則可对 q_l 再用此不等式；继續这些討論，显然，我們得到不等式：

$$q_k < \frac{q_s}{(1-a_k)(1-a_l)\cdots(1-a_r)}, \tag{19}$$

这里 $k > l > \cdots > r \geqslant k_0$ 而 $s < k_0$．但由于級数(17)收斂，所以无穷乘积

$$\prod_{n=k_0}^{\infty} (1-a_n)$$

收斂，也就是說此乘积具有正数値，我們記之为 λ．显然

$$(1-a_k)(1-a_l)\cdots(1-a_r) \geqslant \prod_{n=k_0}^{\infty} (1-a_n) = \lambda;$$

因此，若記 q_0，q_1，…，q_{k_0-1} 中的最大値为 Q，我們可以从不等式(19)断定

$$q_k < \frac{Q}{\lambda} \quad (k \geqslant k_0),$$

因此，

$$q_k q_{k+1} < \frac{Q^2}{\lambda^2} \quad (k \geqslant k_0),$$