·根据人教社最新教材同步编写·

·新教材·

完全解读

WANQUAN JIEDU

NEW

与最新教材完全同步

重点难点详尽解读

初3几何

主　　编：胡国华

分册主编：江建华

吉林人民出版社

·根据人教社最新教材同步编写·

·新教材·

完全解读

WANQUAN JIEDU

初3几何

主　　编：胡国华

分册主编：江建华

编　　者：饶国华　马永军　张凤玲　张少华　江建华
程时贵　刘　雄　田华军　甘小兵　张胜友
黄次元　韩恩莉　陈　蓉　徐秋蓉　熊建武
高登芳　张绪文　殷满元　高智军　李清华
江　波　吴秋玲　卢鲲鹏　匡利人　廖丽芳
钟新华　徐世运　余　丹　胡春阳　许安珠
谢　波

(吉)新登字 01 号

新教材完全解读·初三几何

吉林人民出版社出版发行(中国·长春人民大街 4646 号　邮政编码:130021)
网址:www.jlpph.com　电话:0431--5678541

主　　编　胡国华　　分册主编　江建华
责任编辑　张长平　王胜利　　封面设计　魏　晋
责任校对　唐晓明　　版式设计　王胜利

印刷:北京市人民文学印刷厂
开本:880×1230　1/32
印张:11.875　字数:428 千字
标准书号:ISBN 7-206-02597-8/G·1412
2003 年 5 月第一版　2003 年 5 月第一次印刷
印数:1—15000 册　定价:14.50 元

出版说明

对教材内容的学习，不能完全依赖教师的讲授，而应充分发挥学生的学习主动性；知识，让学生主动地去探求；技能，让学生主动地去习得。将教材内容的结构体系、知识要点、重点难点进行完全解读，让学生去钻研，让学生去领悟，让学生在学习中学会学习。“会学”比“学会”更重要。

《新教材完全解读》系列丛书就是立足于上述理念，由华中师大一附中、黄冈地区中学及孝感高中的全国著名特高级一线教师联袂编写的。

《新教材完全解读》系列丛书根据最新人教版初高中教材编写，紧扣新大纲，结合新考纲，全面、系统地解析教材，具体地指导学习方法，是供学生同步自学的参考用书。

丛书编写的体例为：

〔**本章视点**〕和〔**单元视点**〕：根据各学科特点，分别按“章”或“单元”编写。指出本章或本单元在教材中的地位，交待本章或本单元的知识结构体系，指明学习的重点和难点，并具体指导学习方法。

〔**新课指南**〕：指明本节或本课的学习目的和要求，让学生“心中有数”，能有的放矢地去学习。

〔**教材精讲**〕：本书的主体部分，分以下几个小栏目：

“**相关链接**”：为学习新课作准备，提供学习新课必需的相关资料，指出与学习“新”知识相关的“旧”知识，由已知过渡到未知。

“知识详解”和“课文品析”：“知识详解”用于按章节编写教材的学科。全面而系统地讲析教材内容，落实知识点，连成知识线，组成知识面，结成知识网。突出重点，突破难点，抓住关键点，注重能力点。“课文品析”用于按课编写教材的学科。采用分栏品析的形式，帮助学生明确主旨，理清思路，品味语言。

〔典例剖析〕：用于按章节编写教材的学科。紧扣考纲，按照中考、高考题型精选经典例题，作详细解析，明确解题思路，总结解题方法。

〔课堂小结〕：归纳本节或本课的知识要点，形成知识体系，加深对课堂知识的掌握程度，为课外学习打下扎实的基础。

〔习题全(选)解〕：对课后习题逐题精讲，明确解题思路，给出参考答案，分析解题步骤，总结解题规律。

〔课外鉴赏〕：用于语文学科。结合语文读本或其他与课文同类的文章，按中、高考阅读题形式命题，意在进行阅读能力的迁移训练。

〔章末总结〕和〔单元总结〕：对各章或各单元的知识结构和能力体系进行归结整理，帮助学生系统地巩固知识，有效地提高能力。

〔资料卡片〕：介绍与教材相关的轶闻趣事、人物介绍、时代背景、前沿科研成就等，激发学生的学习兴趣。

教是为了不须要教。有《新教材完全解读》系列丛书在手，如同把名师请到了身边，手把手教你自学。变被动学习为主动学习，从学会升华到会学，通过自学培养终身学习的能力。

愿《新教材完全解读》系列丛书成为你迈向成功之路的金桥。

吉林人民出版社综合室

目　录

专题复习

第6章 解直角三角形

本章视点

一、本章在教材中的地位

本章内容属于三角学.中学数学把三角形内容分成两部分,第一部分为本章的解直角三角形;第二部分是三角学内容的主体部分,包括斜三角形、三角函数、反三角函数和三角方程.这部分将在高中阶段学习.第一部分是第二部分的必要基础,学好锐角三角函数和直角三角形的解法,将为高中阶段学习第二部分内容打下扎实的基础.

二、本章的内容组成及相互联系

本章内容分为两部分.第一部分是有关锐角三角函数的基础知识,主要包括:锐角三角函数的概念,特殊角的三角函数值,同角三角函数关系,互余角的三角函数关系,以及用计算器求锐角三角函数值和由锐角三角函数值求锐角.第二部分主要研究解直角三角形及其应用,主要包括四种基本类型的直角三角形的解法,以及利用仰角、俯角测量山高、塔高问题,利用方位角测量航海问题,利用坡角、坡度(比)计算等实际问题.

三、本章的重点、难点及关键

本章的重点是锐角三角函数的概念和直角三角形的解法.难点是锐角三角函数的概念.学好本章的关键是正确理解锐角三角函数的概念以及掌握作辅助线构造直角三角形解决问题,特别是解决实际问题的方法.

四、学法指导

在本章学习中,要准确掌握四种三角函数的定义,并熟记各种特殊角的三角函数值.要善于用方程思想求解直角三角形的某些未知元素.会用转化思想通过添加辅助线把不规则图形转化为规则直角三角形求解.会用数形结合思想把一些实际问题抽象为数学模型,从而提高分析问题、解决问题的能力.

6.1 正弦和余弦

新课指南

1. 理解正弦、余弦的定义，熟记特殊角的正弦值、余弦值，掌握互余角的正弦和余弦关系以及同角的正弦和余弦关系式，这是本节的重点.

2. 正确地运用 $\sin A$、$\cos A$ 表示直角三角形中两边的比是本节的难点.

3. 利用数形结合思想正确理解正弦、余弦概念是学习本节的关键.

教材精讲

➡相关链接

1. 二次根式的混合运算，即二次根式的加、减、乘、除、乘方、开方运算的混合计算.

2. 直角三角形两锐角互余.

3. 直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半.

4. 勾股定理：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，则 $a^2+b^2=c^2$.

5. 相似三角形的性质：相似三角形对应边成比例.

➡知识详解

知识点1　正弦和余弦的定义

如图 6－1 所示，在锐角 A 的终边上取点 $B_1,B_2,B_3,\cdots$，分别过 $B_1,B_2,B_3,\cdots$ 作 B_1C_1,B_2C_2,B_3C_3 垂直于$\angle A$ 的始边，垂足分别为 $C_1,C_2,C_3,\cdots$.

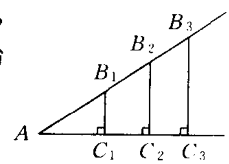

图 6－1

$\because B_1C_1\perp AC_1,B_2C_2\perp AC_2,B_3C_3\perp AC_3,\cdots$,

$\therefore B_1C_1/\!/B_2C_2/\!/B_3C_3/\!/\cdots$.

$\therefore \triangle AB_1C_1\backsim\triangle AB_2C_2\backsim\triangle AB_3C_3\backsim\cdots$.

$\therefore \dfrac{B_1C_1}{AB_1}=\dfrac{B_2C_2}{AB_2}=\dfrac{B_3C_3}{AB_3}=\cdots=$定值，　　①

$\dfrac{AC_1}{AB_1}=\dfrac{AC_2}{AB_2}=\dfrac{AC_3}{AB_3}=\cdots=$定值.　　②

由①、②可知：当锐角 A 固定时，$\angle A$ 的对边与斜边的比值是一个固定值，$\angle A$ 的邻边与斜边的比值也是一个固定值，于是可得

在 Rt$\triangle ABC$ 中，锐角 A 的对边与斜边的比叫做$\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A$，即 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$（如图 6－2 所示）；

在 Rt$\triangle ABC$ 中，锐角 A 的邻边与斜边的比叫做$\angle A$ 的余弦，记作 $\cos A$，即

$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$（如图 6-2 所示）.

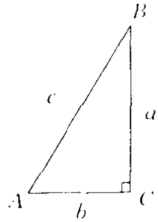

图 6-2

例如：在 Rt△ABC 中，∠C=90°，$a=2\sqrt{2}$，$b=1$，求 $\sin A=$______，$\cos A=$______.

我们首先可利用勾股定理求出 $c=\sqrt{a^2+b^2}=3$，再分别利用正弦、余弦定义得 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{3}$（如图 6-2 所示）.

【注意】 (1)正弦、余弦是一个比值，它是一个没有单位的数值.

(2)正弦、余弦值只与角的大小有关，而与三角形的大小无关.

(3)$\sin A$，$\cos A$ 是一个整体符号，不能写成 $\sin\cdot A$，$\cos\cdot A$.

(4)当用三个字母表示角时，角的符号“∠”不能省略，如 $\sin\angle BAC$.

(5)$\sin^2 A$ 表示 $(\sin A)^2$ 而不是 $\sin A^2$，即 $\sin^2 A=(\sin A)^2$，$\cos^2 A$ 亦然.

(6)三角函数的其他表示方法：$\sin\alpha$，$\cos\beta$ 等.

【思维误区】 如图 6-3 所示，△ABC 中，$AB=AC=13$，$BC=10$，求 $\sin B$ 的值.

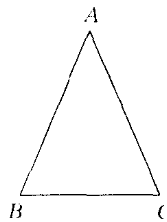

图 6-3

由正弦定义得 $\sin B=\dfrac{AC}{AB}=1$，这里犯的错误是把正弦、余弦错误地理解成是在任意三角形中定义的，事实上正弦、余弦是在直角三角形中定义的，正确解法应为过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，先求 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=12$，故 $\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{12}{13}$.

思考与讨论 如图 6-3 所示，$AB=AC=13$，$BC=10$，求 $\sin\dfrac{B}{2}$ 的值.

知识点 2 0°，30°，45°，60°，90°的正弦值、余弦值

如图 6-4 所示，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，∠A=30°，设 $BC=R$，由直角三角形中 30°角所对直角边等于斜边的一半可知 $AB=2R$，由勾股定理可知 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(2R)^2-R^2}=\sqrt{3}R$，故 $\sin 30°=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{R}{2R}=\dfrac{1}{2}$；$\cos 30°=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}R}{2R}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 又由 $\angle A+\angle B=90°$ 可知 $\angle B=60°$，故 $\sin 60°=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}R}{2R}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$\cos 60°=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{R}{2R}=\dfrac{1}{2}$.

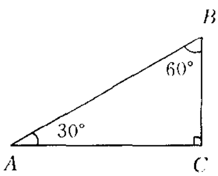

图 6-4

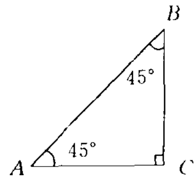

图 6 - 5

如图 6 - 5 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=45^\circ$，设 $BC=R$，由 $\angle A+\angle B=90^\circ$ 得 $\angle B=45^\circ$，故 $\sin 45^\circ=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{R}{\sqrt{2}R}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$\cos 45^\circ=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{R}{\sqrt{2}R}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因此有 $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 30=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 60=\dfrac{1}{2}$.

说　明

(1) $\sin 0^\circ=0$，$\cos 0^\circ=1$，$\sin 90^\circ=1$，$\cos 90^\circ=0$.

(2)特殊角的正弦值、余弦值的常见应用有两个方面：一是利用它计算含有特殊角的正、余弦的代数式的值，如计算 $\sqrt{2}\sin 45^\circ+\cos 30\cdot\sin 60^\circ$. 二是已知正、余弦值求特殊角，如若 $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且$\angle A$ 为锐角，求$\angle A$ 的值.

知识点 3　互余两角的正弦和余弦的关系

观察下列等式：$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 45^\circ=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，不难发现上述等式有下列两个特点：(1)三角函数名称互变，即正弦变余弦，余弦变正弦；(2)角变成它的余角，如 30°变成 60°. 上述规律我们可以推广到任意锐角.

任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值，即 $\sin A=\cos(90^\circ-A)$；

任意锐角的余弦值等于它的余角的正弦值，即 $\cos A=\sin(90^\circ-A)$.

例如：$\cos 55^\circ=0.5736$，则 $\sin 35^\circ=0.5736$.

说　明

在直角三角形中(如图 6 - 2 所示)，$\sin A=\cos B$，$\cos A=\sin B$，例如：$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ$，$\cos 32^\circ=\sin 58^\circ$.

【注意】　在使用 $\sin A=\cos B$，$\cos A=\sin B$ 时，一定要注意前提条件$\angle A$ 与$\angle B$ 互余.

知识点 4　同角的正弦、余弦的关系

$\because \sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$.

$\because \sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \sin 45^\circ+\cos^2 45^\circ=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$.

∵ $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 60°=\frac{1}{2}$，∴ $\sin^2 60°+\cos^2 60°=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$.

观察上面的等式. 试猜想对任意锐角 α 是否都有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

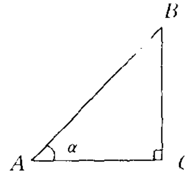

图 6 - 6

如图 6 - 6 所示，在 Rt△ABC 中，∠$C=90°$，设∠$A=\alpha$.

∵ $\sin\alpha=\frac{BC}{AB}$，$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}$，∴ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{BC^2}{AB^2}+\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}$. 又由勾股定理可知 $AC^2+BC^2=AB^2$，∴ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{AB^2}{AB^2}=1$，于是有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$（$\alpha$ 为锐角）.

说　明

（1）在 Rt△ABC 中，∠$C=90°$，有 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，$\sin^2 B+\cos^2 B=1$. 又由 $\sin A=\cos B$，$\cos A=\sin B$，可得 $\sin^2 A+\sin^2 B=1$，$\cos^2 A+\cos^2 B=1$.

（2）在运用公式时，注意公式的逆向运用和恒等变形. 如 $1=\sin^2 A+\cos^2 A$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$，$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$（$0°<\angle A<90°$）.

知识点 5　锐角的正弦值、余弦值的增减性

由特殊角的三角函数值我们知道：

$\sin 0°<\sin 30°<\sin 45°<\sin 60°<\sin 90°$；

$\cos 0°>\cos 30°>\cos 45°>\cos 60°>\cos 90°$.

观察上述两个不等式，我们不难发现下列规律：(1)正弦值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）；(2)余弦值随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）.

该规律用数学语言表示为 $0°<\alpha<90°$，$0°<\beta<90°$，(1)若 $\alpha>\beta$，则 $\sin\alpha>\sin\beta$，$\cos\alpha<\cos\beta$；(2)若 $\alpha<\beta$，则 $\sin\alpha<\sin\beta$，$\cos\alpha>\cos\beta$.

【注意】(1)同名三角函数比较大小可以按上述规律比较，如 $\sin 42°>\sin 23°$；异名三角函数比较大小可以先化成同名三角函数再比较，如比较 $\sin 20°$ 与 $\cos 20°$ 的大小，由 $\cos 20°=\sin(90°-20°)=\sin 70°$，有 $\sin 20°<\sin 70°$，故 $\sin 20°<\cos 20°$.

(2)若∠A 为锐角，则 $0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$.

(3)当 $0°<\alpha<45°$ 时，$\sin\alpha<\cos\alpha$；当 $\alpha=45°$ 时，$\sin\alpha=\cos\alpha$；当 $45°<\alpha<90°$ 时，$\sin\alpha>\cos\alpha$.

典例剖析

➡基础题

例 1　在 Rt△ABC 中，∠$C=90°$，下列等式一定成立的是　（　　）

A. $\sin A=\sin B$　　B. $\sin A=\cos A$

C. $\sin(A+B)=\cos C$　　D. $\sin A=\cos B$

【分析】 本题考查互余角的正弦、余弦之间的关系，判断时应注意两次改变，一是要变三角函数名称，二是要变角为它的余角.故正确答案为D项.

【小结】 本题也可采用特殊值法求解，如取$\angle A=30°$，$\angle B=60°$，易得D项正确.利用特殊值解题也是解选择题的一种常用的方法.

同类变式 若$\angle A$为锐角，则$\sin A+\cos A$的值 ( )

A. 大于1 B. 等于1 C. 小于1 D. 小于或等于1

【分析】 若取$\angle A=45°$，则易知A项正确.

例2 已知$\cos 43°24'=0.726\ 6$，且在"正弦和余弦表"中同一行的修正值是：

分	1′	2′	3′
修正值	2	4	6

则$\cos 43°26'=$________.

【分析】 由余弦值随着角度的增大而减小易得

$$\cos 43°24'=0.726\ 6$$

角度↓增2′ 值↓减少4

$$\cos 43°26'=0.726\ 2$$

【小结】 查三角函数表时，已知一个角的正弦值求另一个角的正弦值，左边角度增加几分，右边相应增加它的修正值；左边角度减少几分，右边相应减少它的修正值.已知一个角的余弦值求另一个角的余弦值，左边角度增加几分，右边相应减少它的修正值，左边角度减少几分，右边相应增加它的修正值.

例3 求下列各式的值.

(1)$\sqrt{2}\sin 45°\cdot\cos 60°$；

(2)$(\sqrt{2}+1)^{\cos 90°}-|\sin 60°-1|-\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^{-\cos 0°}+(-1)^3$.

【分析】 快速、准确的解答此类计算题的前提条件是熟记特殊角的正、余弦值.

解：(1)原式$=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$；

(2)原式$=(\sqrt{2}+1)^0-\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right|-\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^{-1}+(-1)$

$=1-\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-(\sqrt{3}-1)+(-1)$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

【注意】 解答过程中用特殊角三角函数值代入计算时，原先的"·"乘应变为"×"乘，如$\sin 30°\cdot\cos 45°=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，而不能写成$\sin 30°\cdot\cos 45°=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例4 化简.

(1) $|\sin 36^\circ-\sin 42^\circ|$； (2) $|\cos 25^\circ-\cos 47^\circ|$； (3) $|\sin 12^\circ-\cos 12^\circ|$.

【分析】 (1)、(2)两小题可由正弦、余弦值的增减性化简，解答(3)小题时应先化为同名三角函数再化简.

解：(1) ∵ $36^\circ<42^\circ$，∴ $\sin 36^\circ<\sin 42^\circ$. ∴ $\sin 36^\circ-\sin 42^\circ<0$.

∴ $|\sin 36^\circ-\sin 42^\circ|=-(\sin 36^\circ-\sin 42^\circ)=\sin 42^\circ-\sin 36^\circ$.

(2) ∵ $25^\circ<47^\circ$，∴ $\cos 25^\circ>\cos 47^\circ$. ∴ $\cos 25^\circ-\cos 47^\circ>0$.

∴ $|\cos 25^\circ-\cos 47^\circ|=\cos 25^\circ-\cos 47^\circ$.

(3) ∵ $\cos 12^\circ=\sin(90^\circ-12^\circ)=\sin 78^\circ$，

∴ $\sin 12^\circ-\cos 12^\circ=\sin 12^\circ-\sin 78^\circ<0$.

∴ $|\sin 12^\circ-\cos 12^\circ|=-(\sin 12^\circ-\cos 12^\circ)=\cos 12^\circ-\sin 12^\circ$.

【小结】 有关绝对值的化简要用到下列结论：$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时}, \\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$

➡综合题

例5 已知 $\sin A+\cos A=\dfrac{4}{3}$（$\angle A$ 是锐角），求 $\sin A\cdot\cos A$ 的值.

【分析】 本题是已知锐角 A 的正弦、余弦的和，要求的是锐角 A 的正弦、余弦的积，常用方法是将已知条件两边平方，再借用 $\sin^2 A-\cos^2 A=1$ 求解.

解：∵ $\sin A+\cos A=\dfrac{4}{3}$（$\angle A$ 是锐角），

∴ $(\sin A+\cos A)^2=\dfrac{16}{9}$.

∴ $\sin^2 A+2\sin A\cdot\cos A+\cos^2 A=\dfrac{16}{9}$.

∴ $1+2\sin A\cdot\cos A=\dfrac{16}{9}$. 故 $\sin A\cdot\cos A=\dfrac{7}{18}$.

思考与讨论 已知 $\sin A+\cos A=\dfrac{4}{3}$，求 $\sin^3 A+\cos^3 A$ 的值.

例6 设 $\angle A$ 为锐角，若 $2\cos^2 A-5\sin A+1=0$. 求 $\angle A$ 的大小.

【分析】 这是一个关于锐角 A 的三角方程，我们可以借用 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 把已知条件转化为 $2\sin^2 A+5\sin A-3=0$，再进行因式分解，进一步求解.

解：∵ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，∴ $\cos^2 A=1-\sin^2 A$.

∴原方程可化为 $2(1-\sin^2 A)-5\sin A+1=0$.

∴ $2\sin^2 A+5\sin A-3=0$.

∴ $(2\sin A-1)(\sin A+3)=0$.

∴ $\sin A=\dfrac{1}{2}$，或 $\sin A=-3$.

当 $\sin A=\frac{1}{2}$ 时，锐角 $A=30^\circ$；

当 $\sin A=-3$ 时，不合题意，舍去.

故 $\angle A=30^\circ$.

【小结】 本题的关键是运用公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 把已知条件转化为关于 $\sin A$ 的一元二次方程，同时应注意逆向思维的运用，即由三角函数值求锐角.

例7 化简下列各式.

(1) $\sqrt{(\sin 60^\circ-1)^2}-|\cos 45^\circ-\sin 30^\circ|$；(2) $\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 89^\circ$.

【分析】 第(1)小题中，化简时应注意算术平方根和绝对值都是非负数；第(2)小题中，化简时应注意 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的运用.

解：(1)原式 $=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|-\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right|$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}.$$

(2)原式 $=\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ+\cdots+\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ+\cos^2 45^\circ$

$$=(\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+\cdots+(\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$=(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+\cdots+(\cos^2 44^\circ+\sin^2 44^\circ)+\frac{1}{2}$$

$$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{44个1}+\frac{1}{2}=44\frac{1}{2}.$$

【小结】 (1)二次根式化简时应注意：$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & a\geq 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

(2) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 是一个重要关系式，注意它的灵活运用.

思考与讨论 求 $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ$ 的值.

例8 在斜边为10的 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，两直角边 a,b 是方程 $x^2-mx+3m+6=0$ 的两个根.

(1)求 m 的值；

(2)求两个锐角的正弦值.

【分析】 由已知条件易知由根与系数关系定理和勾股定理可求出 m 的值. 再利用正弦定义可求出两个锐角的正弦值.

解：$\because a,b$ 是方程 $x^2-mx+3m+6=0$ 的两个根，

$\therefore a+b=m, ab=3m+6$.

$\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore(a+b)^2-2ab=10^2$.

$\therefore m^2-6m-112=0$. $\therefore m_1=-8, m_2=14$.

又$\because a+b=m>0$，$\therefore m=14$.

原方程可化为 $x^2-14x+48=0$. 解得 $x_1=8, x_2=6$.

当 $a=6, b=8, c=10$ 时，$\sin A=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{4}{5}$；

当 $a=8, b=6, c=10$ 时，$\sin A=\frac{4}{5}$，$\sin B=\frac{3}{5}$.

【小结】 本题是关于一元二次方程根与系数关系定理、勾股定理、正弦函数的综合题，解题时应特别注意 m 的取舍和最后的分类讨论.

例 9 已知$\triangle ABC$的两边长 $a=3$，$c=5$，且第三边长 b 为关于 x 的方程 $x^2-4x+m=0$ 的两个正整数根之一，求 $\sin A$ 的值。

【分析】 解题的关键是利用根与系数关系求 b 的值，再构造直角三角形求 $\sin A$的值.

解：设 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2-4x+m=0$ 的两个正整数根，

$\therefore x_1+x_2=4$.

$\therefore x_1=1, x_2=3$，或 $x_1=x_2=2$，或 $x_1=3, x_2=1$.

$\therefore b$ 只能取 1，2，3.

根据三角形三边之间关系定理可知 $2<b<8$，$\therefore b=3$.

如图 6－7 所示，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，

则 $AC=BC=3$. $\therefore AD=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，

$$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{9-\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2},$$

$$\therefore \sin A=\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{11}}{6}.$$

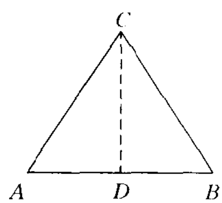

图 6－7

思考与讨论 在本题条件下求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的值.

例 10 若 α 是锐角，求证 $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

【分析】 本题可借助公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 和 $0<\sin\alpha<1$（α 为锐角）化简证明.

证明：$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\therefore\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

【小结】 代数式的恒等证明的途径主要有三种：从左边化简到右边；从右边化简到左边；左右两边同时化简. 本题选用的是第一种途径.

➡错解题

例 11 求 $\cos 60^\circ-\cos 30^\circ$ 的值.

错解：$\cos 60^\circ-\cos 30^\circ=\cos(60^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【分析】 错解的实质是把 $\cos A$ 理解成 cos 与 A 相乘，再提取公因式，事实上 $\cos A$ 是一个整体符号，不能割裂开来.

正解：$\cos 60^\circ-\cos 30^\circ=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

例 12 化简：$\sqrt{\sin^2 70^\circ-4\sin 70^\circ\cos 60^\circ+1}+\cos 20^\circ$.

错解：原式 $=\sqrt{\sin^2 70^\circ-2\sin 70^\circ+1}+\cos 20^\circ$

$=\sqrt{(\sin 70^\circ-1)^2}+\cos 20^\circ$

$=\sin 70^\circ-1+\cos 20^\circ$

$=2\sin 70^\circ-1$.

【分析】 错误实质是没有明确锐角三角函数值与“1”的大小关系，而错误地得出 $\sqrt{(\sin 70^\circ-1)^2}=\sin 70^\circ-1$，事实上，$\sin 70^\circ<1$，$\therefore \sin 70^\circ-1<0$.

正解：原式 $=\sqrt{\sin^2 70^\circ-2\sin 70^\circ+1}+\cos 20^\circ$

$=\sqrt{(\sin 70^\circ-1)^2}+\cos 20^\circ$

$=|\sin 70^\circ-1|+\cos 20^\circ$

$=1-\sin 70^\circ+\cos 20^\circ=1$.

课堂小结

本节课学习的是在三角形中研究边角之间的关系，即锐角的正弦和余弦. 在理解概念的基础上能灵活进行三角函数之间的转换. 在学习中要注意数形结合思想的建立和分类讨论思想的运用.