404

G 7 ... 6
... 76

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习指导丛书

高中起点升本、专科

数　学（理工类）

（附解题指导）

第9版

孙成基　主编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高考复习指导丛书. 数学. 理工类(附解题指导):高中起点升本、专科/孙成基主编. —9版. —北京:高等教育出版社,2002.7
ISBN 7-04-011276-0

Ⅰ.全… Ⅱ.孙… Ⅲ.数学课-成人教育:高等教育-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.G723.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第042796号

责任编辑 肖子东 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 郝 林
责任校对 存 怡 **责任印制** 陈伟光

全国各类成人高考复习指导丛书(高中起点升本、专科)
数学(理工类)附解题指导(第9版)
孙成基 主编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	北京民族印刷厂		
		版 次	1986年4月第1版
开 本	850×1168 1/16		2002年7月第9版
印 张	19	**印 次**	2002年10月第2次印刷
字 数	470 000	**定 价**	26.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

第九版前言

本书经教育部高校学生司、教育部考试中心组织的有关大纲编写、审定专家和命题研究人员审定。

《全国各类成人高考复习指导丛书》第九版是在第八版的基础上，根据教育部2002年6月新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——高中起点升本、专科》修订而成的。

本丛书自1986年问世以来，一直受到广大读者的欢迎，在全国各类成人高考考生的复习备考中发挥着重要作用。十几年来，随着我国成人高等教育事业的发展和广大读者学习需求的变化，特别是全国各类成人高等学校招生复习考试大纲的几次修订，相应地这套丛书也历经了8次全面的修订。几经修改完善，这套丛书的整体质量不断提高，结构更加科学、合理，成为具有广泛适用性的成人高考考生复习备考的主干教材，在全国享有良好声誉。

按照调整考试科目后的“成人高考复习考试大纲”的要求修订而成的全新第九版，具有如下特点：

1. 紧扣大纲、内容翔实、叙述准确、重点突出，注重基础知识复习和能力训练，题型与练习贴近考试实际，实用性、针对性强。

2. 内容的选择和编排更适合成人学习的特点；注重吸收新知识、新成果，丛书的时代感更加鲜明。

3. 题型设计以及叙述等各个方面，注重从知识立意向能力立意的转变；加强学科基本能力、学科综合能力和学科实验能力的训练，提高考生综合运用知识的能力和应试水平；适合成人学习特点的体系结构更加完善。

4. 在覆盖新大纲知识点的前提下，适当压缩字数，使丛书更简明、实用。

5. 为了更直观地突出书中的重点、难点，更有效地遏制盗版，本版书采取双色印刷，从形式上更加新颖。

修订后的本丛书（第九版）包括如下8本：

《语文　附解题指导》

《数学　附解题指导》（文史类）

《数学　附解题指导》（理工类）

《英语　附解题指导》

《物理化学综合科　物理分册　附解题指导》

《物理化学综合科　化学分册　附解题指导》

《历史地理综合科　历史分册　附解题指导》

《历史地理综合科　地理分册　附解题指导》

《数学》(理工农医类)本次修订主要内容为:1. 增加了线性回归的方法及其简单的应用、函数的极限、函数的连续性、导数及其应用。2. 删去了数、式、方程、方程组等内容。

本书主编为孙成基(《1986年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》起草人),参加编写的还有刘宗华、王燕生、烟学敏。本次修订工作由孙成基完成。

高等教育出版社
2002年6月

目　　录

代　数(Ⅰ)

三角函数

平面解析几何

代　数(Ⅱ)

立体几何

代数(Ⅰ)

第一章 集 合

【本章要求】

了解集合的意义及其表示法,了解空集、子集、交集、并集、全集、补集的概念及其表示法,了解符号$\subsetneqq$,$\subseteq$,$=$,$\in$,$\notin$的含义,并能运用这些符号表示集合与集合,元素与集合的关系.

【内容提要】

1. 集合的基本概念

集合的意义 把某些指定的对象集在一起,就成为一个**集合**(简称集).常用大写拉丁字母$A,B,C,\cdots$表示集合.

元素 集合中的每个对象叫做集合的**元素**.常用小写拉丁字母$a,b,c,\cdots$表示集合的元素.

有限集 含有有限个元素的集合叫做**有限集**.

无限集 含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

对于一个给定的集合A和确定的元素a,它们之间有且只有以下两种关系:

(1) 若a是A的元素,则称a属于A,记为$a\in A$.

(2) 若a不是A的元素,则称a不属于A,记为$a\notin A$.

空集 不含任何元素的集合叫做**空集**,记为$\varnothing$.

2. 集合的表示法

列举法 把集合的元素一一列举出来,并写在大括号$\{\ \}$内的方法,叫做**列举法**.

描述法 用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合,并将该条件写在大括号$\{\ \}$内的方法,叫做**描述法**.如不等式$x-5>2$的解集可表示为$\{x|x-5>2\}$或$\{x:x-5>2\}$.

常见的几种数集的表示符号:

$\mathbf{N}^*$(或$\mathbf{N}_+$)表示正整数集.

$\mathbf{N}$表示非负整数集,即自然数集.

$\mathbf{Z}$表示整数集.

$\mathbf{Q}$表示有理数集.

$\mathbf{R}$表示实数集.

说明 根据国家标准,“0”是自然数,请不要继续沿用自然数集不包括“0”的说法.

3. 集合与集合的关系

子集 如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素,则称A是B的**子集**,记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$,读作“A包含于B”或“B包含A”.

相等的集合 若$A\subseteq B$,且$B\subseteq A$,则称$A=B$.

真子集 若$A\subseteq B$且$A\neq B$,则称A是B的**真子集**,记作$A\subsetneqq B$(或$B\supsetneqq A$).

说明 在国家标准中，用符号$\subsetneqq$（或$\supsetneqq$）表示集合间的真子集关系；用符号$\subseteq$（或$\supseteq$）表示集合间的子集关系，这个关系也可用符号$\subset$（或$\supset$）表示.

规定 空集是任何集合的子集. 可见，空集是任何非空集合的真子集.

注意：$A\subseteq A$.

交集 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$.

交集的性质：(1)$A\cap A=A$；(2)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

并集 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$.

并集的性质：(1)$A\cup A=A$；(2)$A\cup\varnothing=A$.

补集 设集合 S，若集合 $A\subseteq S$，那么由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的**补集**（或**余集**），记作$\complement_S A$，或简记作$\complement A$.

注意：$\complement_S A\cup A=S$；

$\complement_S A\cap A=\varnothing$.

全集 若一个集合含有所要研究的各个集合的全部元素，那么这个集合就可以看作一个全集，全集记作 U.

【例题与解题指导】

例 1 选择题：

(1) 已知集合 $A=\{0,3\}$，$B=\{0,3,4\}$，$C=\{1,2,3\}$，则$(B\cup C)\cap A=$

(A) $\{0,1,2,3,4\}$　(B) $\varnothing$　(C) $\{0,3\}$　(D) $\{0\}$

(2) 设集合 $M=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$N=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$，则 $M\cup N=$

(A) $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$　(B) $\{x\mid 2<x<3\}$

(C) $\{x\mid -1<x<4\}$　(D) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$

(3) 设集合 $M=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 10\}$，$N=\{x\mid x>7$ 或 $x<1\}$，则 $M\cap N=$

(A) $\{x\mid 7<x\leqslant 10\}$　(B) $\{x\mid -1\leqslant x<1$ 或 $7<x\leqslant 10\}$

(C) $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$　(D) $\{x\mid 1<x\leqslant 10\}$

(4) 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $M=\{1,3,5\}$，$N=\{2,4,6\}$，则$\complement_U M\cap N=$

(A) $\varnothing$　(B) U　(C) N　(D) M

(5) 下列关系中，正确的是

(A) $\{0\}=\varnothing$　(B) $\varnothing\in\{0\}$　(C) $\varnothing\subsetneqq\{0\}$　(D) $0\subsetneqq\varnothing$

(6) 设集合 $M=\{(x,y)\mid xy>0\}$，$N=\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y>0\}$，则

(A) $M\cup N=M$　(B) $M\cup N=N$　(C) $M\cap N=M$　(D) $M\cap N=\varnothing$

解 (1) $B\cup C=\{0,1,2,3,4\}$，$(B\cup C)\cap A=\{0,3\}$，选(C).

说明 求两个集合的并集，相同的元素只写一个，如 $B\cup C$ 中的元素 3.

在集合的运算中，如有小括号应先算小括号内的.

(2) $M\cup N=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$，选(D)

说明 由不等式指定的集合运算，可利用数轴直观地求解.

(3) $M\cap N=\{x\mid -1\leqslant x<1$ 或 $7<x\leqslant 10\}$，选(B).

(4) $\complement_U M=\{2,4,6\}$, $\complement_U M\cap N=\{2,4,6\}$，选(C)．

(5) $\{0\}$是只含有一个元素0的单元素集合，而$\varnothing$是空集，所以(A)不正确；符号"$\in$"用于元素与集合的关系，故(B)也不正确；因为空集是任何非空集合的真子集，所以(C)正确.

(6) M与N都是点的集合.

由$xy>0$知，点(x,y)的横、纵坐标同号，集合$M=\{$第一或第三象限的点$\}$；

由$x>0$且$y>0$知，点(x,y)的横、纵坐标的值均为正，集合$N=\{$第一象限的点$\}$.

因此，$M\cup N=M$，选(A)．

例2 填空题：

(1) 若$A=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=k+3,k\in\mathbf{Z}\}$，则$A\cap B=$____，$A\cup B=$____.

(2) 若$A=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B=\{1,3,5\}$，$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，则$B=$______.

(3) 若$A\subseteq C$，化简$(A\cup B)\cup(B\cup C)=$____.

(4) 若$M=\{x|2x+a=0\}$，$P=\{x|1<x<4$，且$x\in\mathbf{N}_+\}$，且$M\cap P$为非空集合，则$a=$____.

解 (1) A为奇数集合，而B为整数集合，则$A\cap B=A$；$A\cup B=B$.

(2) 由A及$A\cap B$知，$1,3,5\in B$且$2,4\notin B$；由A及$A\cup B$知，$0,6\in B$. 故$B=\{1,3,5,0,6\}$.

(3) 由于$A\subseteq C$，所以$A\cup B\subseteq B\cup C$，则$(A\cup B)\cup(B\cup C)=B\cup C$.

(4) 由已知，$P=\{2,3\}$，把$x=2,3$分别代入$2x+a=0$中，得$a=-4$或$a=-6$.

例3 设$A=\{2,3\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，$U=\{0,1,2,3,4,5\}$，求集合$\complement_U A\cap\complement_U B$的所有的子集.

解 因为$\complement_U A=\{0,1,4,5\}$，$\complement_U B=\{0,1\}$.

所以 $\complement_U A\cap\complement_U B=\{0,1\}$.

因此 $\complement_U A\cap\complement_U B$的所有的子集为：$\{0\}$、$\{1\}$、$\{0,1\}$、$\varnothing$.

例4 设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|-5<x<5\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 7\}$. 求$\complement_U A$，$\complement_U B$，$\complement_U(A\cap B)$，$\complement_U A\cup\complement_U B$.

解 由已知，得$\complement_U A=\{x|x\leqslant -5$或$x\geqslant 5\}$ $\complement_U B=\{x|x<0$或$x>7\}$.

所以 $\complement_U A\cup\complement_U B=\{x|x<0$或$x\geqslant 5\}$，

因为 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<5\}$，所以$\complement_U(A\cap B)=\{x|x<0$或$x\geqslant 5\}$.

练 习 一

1. 选择题：

(1) 已知集合$S=\{0,-1,-2,-3,-4\}$，集合$M=\{0,-1,-2\}$，$N=\{0,-3,-4\}$，则$\complement_S M\cap N=$

(A) $\{0\}$ (B) $\{-3,-4\}$ (C) $\{-1,-2\}$ (D) $\varnothing$

(2) 设集合$M=\{x|x\geqslant -4\}$，$N=\{x|x<6\}$，则$M\cup N=$

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\{x|-4\leqslant x<6\}$ (C) $\varnothing$ (D) $\{x|-4<x<6\}$

(3) 设全集$U=\mathbf{R}$，$a,b\in\mathbf{R}$，$\complement_U P=\{x|x\geqslant a\}$，$\complement_U Q=\{x|x\geqslant b\}$，若$P\cap Q=P$，则

(A) $a\geqslant b$ (B) $b\geqslant a$ (C) $a>b$ (D) $b>a$

(4) 设$M=\{x|x\leqslant\sqrt{10}\}$，$a=3$，下列各式正确的是

(A) $a\subsetneqq M$ (B) $a\notin M$ (C) $\{a\}\in M$ (D) $\{a\}\subsetneqq M$

(5) 已知集合M满足条件：$\{1,2\}\subseteq M\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$，那么这样的集合$M$有

(A) 6 个　　(B) 7 个　　(C) 8 个　　(D) 9 个

(6) 若 M、P 为非空集合，且 $M \subsetneqq P$，$P \subsetneqq U$，U 为全集，则下列集合中空集是

(A) $M \cap P$　　(B) $\complement_U M \cap \complement_U P$　　(C) $\complement_U M \cap P$　　(D) $M \cap \complement_U P$

2. 填空题：

(1) 若 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6\}$，则 $A \cap B=$ ______，$A \cup B=$ ______.

(2) 若 $A=\{$正数$\}$，$B=\{$非负数$\}$，则 $A \cap B=$ ______，$A \cup B=$ ______.

(3) 若 $A=\{x \mid x>-1\}$，$B=\{x \mid x>-3\}$，则 $A \cap B=$ ______，$A \cup B=$ ______.

(4) 若 $A=\{x \mid x \geqslant -2\}$，$B=\{x \mid -1<x \leqslant 4\}$，则 $A \cap B=$ ______，$A \cup B=$ ______.

(5) 若 $A=\{x \mid 1<x \leqslant 5\}$，$B=\{$小于 10 的自然数$\}$，则 $A \cap B=$ ____.

(6) 若 $A=\{$等边三角形$\}$，$B=\{$等腰三角形$\}$，则 $A \cap B=$ ____，$A \cup B=$ ____.

(7) 若 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x>-1\}$，则 $\complement_U A=$ ____.

(8) 若 $U=\{$三角形$\}$，$A=\{$直角三角形$\}$，则 $\complement_U A=$ ____.

(9) 若 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{3,4,5\}$，则 $(A \cap B) \cup C=$ ____，$(A \cup B) \cap C=$ ____，$(A \cap B) \cap C=$ ____，$A \cap (B \cup C)=$ ____，$B \cap (A \cup C)=$ ____.

(10) 若 $A=\{x \mid x=2k, k \in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$，则 $A \cap B=$ ______，$A \cup B=$ ______.

3. 在下列各题横线上填写适当的符号（$\in$，$\notin$，$=$，$\supsetneqq$，$\subsetneqq$）：

(1) $\varnothing$ ____ $\{a\}$；　(2) a ____ $\{a\}$；　(3) $\{a\}$ ____ $\{a\}$；　(4) $\{a\}$ ____ $\{a,b\}$；

(5) 6 ____ $\{0,1,2\}$；　(6) 0.5 ____ $\mathbf{Q}$；　(7) $\mathbf{R}$ ____ $\mathbf{Q}$；　(8) $\mathbf{N}$ ____ $\mathbf{Z}$.

4. 写出集合 $A=\{0,1,2\}$ 的所有子集，并指出其中哪个集合不是集合 A 的真子集.

5. 设集合 $A=\{x \mid x=2n+1, n \in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x=4m \pm 1, m \in \mathbf{Z}\}$，试确定 A 与 B 的关系.

练习一解题指导

1. 解　(1) $\complement_S M=\{-3,-4\}$，$\complement_S M \cap N=\{-3,-4\}$，选(B).

(2) $M \cup N=\mathbf{R}$，选(A).

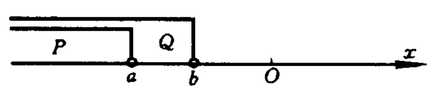
(3) $P=\{x \mid x<a\}$，$Q=\{x \mid x<b\}$.

由 $P \cap Q=P$ 知，$P \subsetneqq Q$ 或 $P=Q$.

当 $P \subsetneqq Q$ 时，由图知 $b>a$；

当 $P=Q$ 时，$a=b$.

从而 $b \geqslant a$，选(B).

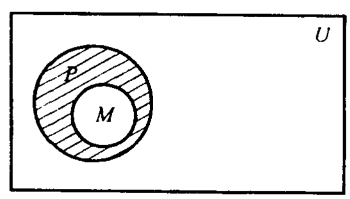


(第1(3)题)

(4) 符号"$\subsetneqq$"用于表示集合与集合的关系，而 a 是元素，可排除(A)；因为 $3<\sqrt{10}$，故可排除(B)；符号"$\in$"用于表示元素与集合的关系，而 $\{a\}$、M 都是集合，可排除(C)，故(D)正确.

(5) 有集合 $\{1,2\}$ 及它分别与下列集合：$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$ $\{3,4\}$，$\{3,5\}$，$\{4,5\}$ 的并集，共七个. 故选(B).

(6) 由 $M \cap P=M$ 可排除(A)；由 $\complement_U M \cap \complement_U P=\complement_U P$ 可排除(B)；由 $M \subsetneqq P$ 知 $\complement_U M \cap P$ 是由集合 P 中除去 M 中所有元素组成的非空集合(图中斜线部分)，所以可排除(C)，故(D)正确.



(第1(6)题)

2. 解　(1) $A \cap B=\{2,4\}$；$A \cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

(2) $A \cap B=A$；$A \cup B=B$.

(3) $A \cap B=A$；$A \cup B=B$.

(4) $A\cap B=B$;$A\cup B=A$.

(5) $A\cap B=\{2,3,4,5\}$.

(6) $A\cap B=A$,$A\cup B=B$.

(7) $\complement_U A=\{x\mid x\leqslant -1\}$.

(8) $\complement_U A=\{$斜三角形$\}$.

(9) $(A\cap B)\cup C=\{2,3,4,5\}$,$(A\cup B)\cap C=\{3\}$,$(A\cap B)\cap C=\varnothing$,$A\cap(B\cup C)=\{2\}$,$B\cap(A\cup C)=B$.

(10) $A=\{$偶数$\}$,$B=\{$奇数$\}$,则$A\cap B=\varnothing$;$A\cup B=\mathbf{Z}$.

3. 解 (1) $\subsetneqq$ (2) $\in$ (3) $=$ (4) $\subsetneqq$ (5) $\notin$ (6) $\in$ (7) $\supsetneqq$ (8) $\subsetneqq$.

4. 解 集合A的所有子集为:$\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{0,1\}$,$\{0,2\}$,$\{1,2\}$,$\{0,1,2\}$及$\varnothing$. 其中$\{0,1,2\}$不是集合A的真子集.

5. 解 由于$A=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$,$B=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$.

所以 $A=B$.

第二章　不等式和不等式组

【本章要求】

1. 理解不等式的性质，会用不等式的性质和基本不等式 $a^2\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$，$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})$，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\ (a,b\geqslant 0)$ 解决一些简单问题.

2. 会解一元一次不等式、一元一次不等式组和可化为一元一次不等式组的不等式，会解一元二次不等式，了解区间的概念，会在数轴上表示不等式或不等式组的解集.

3. 了解绝对值不等式的性质，会解形如 $|ax+b|\geqslant c$ 和 $|ax+b|\leqslant c$ 的绝对值不等式.

【内容提要】

1. 不等式的意义和性质

(1) 若 $a,b\in\mathbf{R}$，有

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b;$$
$$a-b=0\Leftrightarrow a=b;$$
$$a-b<0\Leftrightarrow a<b.$$

(2) 不等式的性质

1) $a>b\Leftrightarrow b<a$;

2) $a>b,b>c\Rightarrow a>c$;

3) $a>b\Rightarrow a+c>b+c$;

4) $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$;

5) $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;

6) $a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$;

7) $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$;

8) $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n>1)$;

9) $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n>1)$.

2. 解不等式

(1) 不等式的解集和解不等式

在含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数的所有可取值的集合，叫做这个不等式的**解的集合**. 求不等式的解集的过程，叫做**解不等式**.

(2) 一元一次不等式及其解法

1) 一元一次不等式的一般形式为 $ax>b$.

2) 解的讨论：

(i) 当 $a\neq 0$ 时

如果 $a>0$，那么解集是 $\left\{x \mid x>\dfrac{b}{a}\right\}$，也可写成 $x>\dfrac{b}{a}$，下面也有类似写法.

如果 $a<0$,那么解集 $x<\frac{b}{a}$.

(ii) 当 $a=0$ 时

如果 $b\geqslant 0$,那么 $ax>b$ 无解,即解的集合是空集$\varnothing$.如果 $b<0$,那么 $ax>b$ 的解为全体实数,即解的集合是 $\mathbf{R}$.

(3) 一元二次不等式及其解法

1) 一般形式为 $ax^2+bx+c>0$,这里 $a\neq 0$.

2) 解的讨论:

设 $\Delta=b^2-4ac$,x_1,x_2(为讨论方便,不妨设 $x_1<x_2$)是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

(i) 当 $\Delta<0$ 时

如果 $a>0$,不等式的解集是 $\mathbf{R}$;

如果 $a<0$,不等式的解集是$\varnothing$.

(ii) 当 $\Delta=0$ 时

如果 $a>0$,不等式的解集是 $x\neq-\frac{b}{2a}$;

如果 $a<0$,不等式无解.

(iii) 当 $\Delta>0$ 时

如果 $a>0$,不等式的解集是 $x<x_1$ 或 $x>x_2$;

如果 $a<0$,不等式的解集是 $x_1<x<x_2$.

注意: 一元二次不等式的解法,应结合二次函数的图象来理解.

(4) 含有绝对值的不等式的解法

1) 若 $a>0$,$|x|<a$ 的解集是 $-a<x<a$;

2) 若 $a>0$,$|x|>a$ 的解集是 $x>a$ 或 $x<-a$.

(5) 不等式组的解

不等式组的解,即不等式组中每一个不等式解集的交集.

3. 基本不等式

(1) 如果 $a,b\in\mathbf{R}$,那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(等式仅当 $a=b$ 时才成立).

(2) 如果 $a,b\geqslant 0$,那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(等式仅当 $a=b$ 时才成立).

4. 关于区间的概念

设 a 与 b 是两个实数,且 $a<b$.

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的集合叫做**开区间**,记做(a,b);

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的集合叫做**闭区间**,记做$[a,b]$;

(3) 满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的一切实数 x 的集合叫做**半开半闭区间**,分别记做$[a,b)$,$(a,b]$.

特别地,$\mathbf{R}$ 可记为$(-\infty,+\infty)$,符号"$+\infty$"读作"正无穷大","$-\infty$"读作"负无穷大",它们不是数,只是记号.$[a,+\infty)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(-\infty,b)$分别表示 $x\geqslant a$,$x>a$,$x\leqslant b$,$x<b$ 的一切实数 x 的集合.

【例题与解题指导】

例 1 解不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}>-1, & ① \\ 2(x-3)-3(x-2)<0. & ② \end{cases}$$

并用数轴表示其解集.

解 由①,得 $x>-6$,

由②,得 $x>0$,

所以,原不等式组化成

$$\begin{cases} x>-6, \\ x>0. \end{cases}$$

即原不等式组的解集为

$$x>0.$$

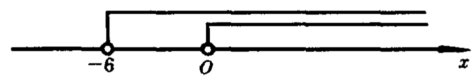


图 2－1

在数轴上表示,如图 2－1 中 x 轴上粗线部分.

例 2 解不等式 $-8<\dfrac{-3x-2}{4}-5<-5$.

解 不等式各方同乘以 4,得

$$-32<-3x-2-20<-20, \text{即} -32<-3x-22<-20.$$

不等式各方同时加 22,得 $-10<-3x<2$,

不等式各方同时除以 -3,得

$$\frac{10}{3}>x>-\frac{2}{3}.$$

所以原不等式的解集为 $-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{10}{3}$.

说明 本例中的不等式,也可化为不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{-3x-2}{4}-5>-8, \\ \dfrac{-3x-2}{4}-5<-5. \end{cases}$$

来解.

例 3 解不等式 $12x^2-5x-3>0$.

解 因为方程 $12x^2-5x-3=0$ 的根是 $x_1=-\dfrac{1}{3}, x_2=\dfrac{3}{4}$.

又因为 x^2 的系数是 $12>0$,所以原不等式的解集是 $x<-\dfrac{1}{3}$ 或 $x>\dfrac{3}{4}$.

例 4 解不等式 $-2x^2\geqslant 3x-4$.

解 原不等式可化成 $2x^2+3x-4\leqslant 0$.

因为方程 $2x^2+3x-4=0$ 的根是 $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}, x_2=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{4}$,又 x^2 的系数是 $2>0$,所以,原不等式的解集是 $\dfrac{-3-\sqrt{41}}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}$.

例 5 解不等式$\frac{3x+6}{5x-15}<0$.

分析 只须分式的分子、分母异号即可. 而$(3x+6)\cdot(5x-15)<0$即转化为解一元二次不等式.

解 原不等式同解于

$$(3x+6)(5x-15)<0.$$

所以原不等式的解为$-2<x<3$.

说明 原不等式两边不能直接同乘以$5x-15$. 因为$5x-15$的值正、负未定.

想一想,不等式$\frac{3x+6}{5x-15}\leqslant 0$的解是什么?

例 6 解不等式$\frac{3x+2}{x-3}>1$.

解 移项,得

$$\frac{3x+2}{x-3}-1>0.$$

整理化简,得

$$\frac{2x+5}{x-3}>0.$$

其同解不等式为

$$(2x+5)(x-3)>0.$$

方程$(2x+5)(x-3)=0$的根是$x_1=-\frac{5}{2}$,$x_2=3$,又$(2x+5)(x-3)$中含x^2项的系数是$2>0$,

因此,原不等式的解集为$x>3$或$x<-\frac{5}{2}$.

说明 解此类型不等式可先移项后通分化成例 5 的类型再解.

以上两例介绍了分式不等式的解法,请留意.

例 7 解不等式$|3-2x|-5>0$.

分析 经过移项,原不等式化为$|3-2x|>5$,它属于绝对值不等式中的类型(2),进而去掉绝对值解之.

如果注意到$|3-2x|=|2x-3|$,解之较方便.

解 原不等式化为$|2x-3|>5$,则

$$2x-3>5 \quad 或 \quad 2x-3<-5,$$

所以 $x>4$ 或 $x<-1$ 为所求.

例 8 解不等式 $8-|3x+5|\geqslant 0$.

分析 经移项,原不等式化为$|3x+5|\leqslant 8$,它属于绝对值不等式中的类型(1),进而去掉绝对值解之.

解 原不等式化为$|3x+5|\leqslant 8$,则

$$-8\leqslant 3x+5\leqslant 8,\ -13\leqslant 3x\leqslant 3,$$

所以 $-\frac{13}{3}\leqslant x\leqslant 1$ 为所求.

说明 解含绝对值的不等式,应先判断它是两种类型中的哪一种,再去掉绝对值解之.

例 9 若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解为 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$，求 a,b 的值.

分析 从解一元二次不等式的过程考虑.

解 由已知，$-\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$是方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两根，则

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{a}, \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{b}{a}. \end{cases}$$

解之，得 $a=-12, b=-2$.

例 10 解不等式$2<|3x-2|<3$.

解 原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases} |3x-2|>2, & ① \\ |3x-2|<3. & ② \end{cases}$$

由①，得 $3x-2>2$ 或 $3x-2<-2$，则

$$x>\frac{4}{3}\text{或 } x<0. \qquad ③$$

由②，得 $-3<3x-2<3$，

$$-\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}. \qquad ④$$

使③，④同时成立，得 $-\frac{1}{3}<x<0$ 或$\frac{4}{3}<x<\frac{5}{3}$，此为原不等式的解.

例 11 解不等式 $\sqrt{4x^2+4x+1}<3$.

解法一 原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases} 4x^2+4x+1\geqslant 0, & ① \\ 4x^2+4x+1<9. & ② \end{cases}$$

由①，得$(2x+1)^2\geqslant 0$，故该不等式的解为全体实数.

由②，得 $(x+2)(x-1)<0$，即 $-2<x<1$.

故原不等式的解为 $-2<x<1$.

解法二 原不等式可化为 $\sqrt{(2x+1)^2}<3$，则

$$|2x+1|<3,$$

所以 $-3<2x+1<3$，

故原不等式的解为 $-2<x<1$.

例 12 已知 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x-a<0\}$.

（1）若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围；（2）若 $A\subsetneqq B$，求 a 的取值范围.

解 由 $x^2-2x-8<0$. 解得 $-2<x<4$.

所以 $A=\{x|-2<x<4\}$.

由已知，$B=\{x|x<a\}$.

（1）由 $A\cap B=\varnothing$得 $a\leqslant -2$.

（2）由 $A\subsetneqq B$ 得 $a\geqslant 4$.

例 13 已知 $x>0,y>0,2x+y=3$,求 xy 的最大值,并求相应的 x,y 的值.

分析 注意到 $2x+y$ 是一个常数,可考虑用基本不等式求之.

解 由已知,$2x>0,y>0$,则

$$2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}.$$

又 $2x+y=3$,于是

$$2\sqrt{2xy}\leqslant 3,$$

$$xy\leqslant\frac{9}{8}.$$

因此,当 $2x=y$,即 $x=\frac{3}{4},y=\frac{3}{2}$时,$xy$ 取得最大值$\frac{9}{8}$.

例 14 已知 $x\neq 0$,求 $1-x^2-\frac{16}{x^2}$的最大值,并求相应的 x 的值.

分析 原式可化为 $1-\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)$,故只需求 $x^2+\frac{16}{x^2}$,即 $x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2$ 的最小值.注意到 x 与$\frac{4}{x}$的积是一个常数,可用基本不等式求之.

解 原式$=1-\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)$.

因为 $$x^2+\frac{16}{x^2}\geqslant 2x\cdot\frac{4}{x}=8.$$

所以 当 $x=\frac{4}{x}$,即 $x=\pm 2$ 时,$\left[x^2+\frac{16}{x^2}\right]_{\min}=8$.

故原式的最大值为 $1-8=-7$.

说明 应用 $a^2+b^2\geqslant 2ab(x,y\in R)$ 或其推论求某一式子的最值,需满足 $a+b$ 或 ab 是一个常数.

练 习 二

1. 选择题:

(1) 不等式 $ax^2+bx+24<0$ 的解集为 $x>2$ 或 $x<-4$,则

(A) $a=-3,\ b=-6$ (B) $a=3,\ b=-6$ (C) $a=-3,\ b=6$ (D) $a=3,\ b=6$

(2) 不等式 $x^2+bx+\frac{1}{4}\leqslant 0$ 的解集为$\varnothing$,则

(A) $b<1$ (B) $b>-1$ 或 $b<1$ (C) $-1<b<1$ (D) $b>1$ 或 $b<-1$

(3) 不等式组$\begin{cases}|x-1|-3<0,\\ a-2x>0\end{cases}$的解集为 $-2<x<4$,则 a 的取值范围是

(A) $a\leqslant -4$ (B) $a\geqslant -4$ (C) $a\geqslant 8$ (D) $a\leqslant 8$

(4) 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$,且 $ab>0,-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$,则

(A) $bc<ad$ (B) $bc>ad$ (C) $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ (D) $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

(5) 设 $P=\{x|x^2-4x+3<0\}$,$Q=\{x|x(x-1)>2\}$,则 $P\cap Q$ 等于