高等学校教学用書

彈性理論

M. M. 費洛宁軻-鮑罗第契著

高等教育出版社

高等学校教学用書

彈性理論

M. M. 費洛宁輌-鮑罗第契著
朱广才　馬士修譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立科学技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的費洛宁輌-鮑罗第契(М. М. Филоненко-Бородич)所著“彈性理論”(Теория упругости）一書1947年第三版增訂版譯出。原書經苏联高等教育部审定为高等工業学校教科書。

本書由北京工業学院朱广才、馬士修譯。

本書中譯本第一版將書名譯为“弹性力学”，这次由譯者按原版重新修訂，并將書名改为“彈性理論”。

本書原由商务印書館出版，自1958年11月起改由本社出版。

彈 性 理 論

M. M. 費洛宁輌-鮑罗第契著

朱广才　馬士修譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

商务印书館上海厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·291　开本 850×1168 1/32　印張 10 11/16

字数 257,000　印数 1—3,200　定价(8) ¥ 1.20

1953年11月商務初版（共印 10,000）

1958年11月新1版（修訂本）　1958年11月上海第1次印刷

第三版序

本書于1932年首次出版，名为"彈性理論的基础"；繼于193[illegible]年重版，并沒有重大的修改。

那时由于許多高等專門学校講授的彈性理論，沒有合用的書籍，迫切需要有一本适用于高等專門学校学生和工程师的簡略的彈性理論教程出版。1914—1916年間出版的狄摩盛科所著惟一的彈性理論俄文教本，当时已成为一种罕見的書籍，在上述的專門学校的圖書館里多半是找不到的。

在編撰这个教本的时候，著者对于許多困难的，但是基本的問題的叙述尽量設法使其簡化和易于了解；長篇的推論易使讀者望而却步，他們对于应用，比对于証明和理論的建立，感兴趣得多。当然，要达到这样簡化的目的，只有对于理論上最复杂的章节牺牲一些徹底的、严格的和有辯証依据的解释；并要牺牲可以插入本書的一些問題，虽說这种問題对于技术方面很关重要，但它的解答需要一些繁复的数学資料。

著者对于第三版認为有將書名略为改变的需要，以使其与本書的目的和内容更相符合。

虽說本書的内容大有变更，但用途仍和原先一样，可以作为按照高等專門学校正規課程打好数学基础的人們初次学習彈性力学之用。在重編此書的时候著者曾顧到兩种事实：

一方面，自本書前一版發行以后，在苏联即有一系列的很好的彈性理論教程出現，闡明彈性理論的建立，及对于專門技术很重要的許多补充資料；只須举出 А. Ляв[1]，С. П. Тимошенко，П. Ф.

[1] 譯者注：拉甫(A. E. H. Love)。

Папкович, Л. С. Лейбензон, А. 和 Л. Фёппль, С. В. Серенсен 所編的教程和 Н И. Мусхелишвили 的一部出色現已普遍馳名的著作"彈性理論的一些問題",再加上一些叙述虽簡但很切实的單行書籍,如 Треффц 的"数学彈性理論"和 Геккелер 的"彈性物体的靜力学",可見一斑。

另一方面,最近 10—12 年以来,在彈性理論領域內工程师們的兴趣大大地增进了,不仅在專門技术所需要的問題的数目上,而且还在了解問題的深入程度上,工程师必須在这些問題上下一番工夫才能閱讀更切实的教程和專門書籍。

在此种情形下,著者势在必須解决如次的問題:將再版的这本書在以上所举相当丰富的書籍中的地位切实地加以审定,并且同时顧到务使此書对于以其原来的形式能够得到它的帮助的一些讀者,仍然能够有所帮助。

著者認为在本書內不插入許多新的特殊問題是合理的;这样的問題,虽說在計算方面对于工程师很关重要,但在以上所举的書籍中和在許多特別著作中是可以大量找得到的。在此版內本書的补充資料系宗着以上所指出的另一目标而采用的:就是尽可能以更有系統、更相連貫的叙述帮助讀者,使之对于彈性理論的基本問題,至少是初步的問題,能够获得更容易的了解,并且不費力地能轉到更完备的教程和專門著作上去。

为了达到这个目的,头兩章(关于应力和形变的理論)大加扩充;第八章关于直杆的扭轉与弯曲几乎全部是重新写的;討論平面問題的第六章和第七章亦曾加以补充;并添加了第九章,專論布希涅斯克法,特别是他的关于球形界面受載荷作用的古典問題;这个問題在現在对于建筑物下地基坚固性的計算有很重要的应用。在同一章里并提出关于应用复变数函数以解平面問題的初步說明,并对于第四章里已經簡略和淺近談过的彈性振波的問題,亦加以

补充。

在一系列的問題里我們曾应用了欧拉和泊松分开变数的古典方法，求一次偏微分方程式的积分；有些地方这样会引起更繁复、更冗長的計算；不过据著者的看法，这样可以給与一系列的特殊問題以一个一般性的基础（菲倫和李别尔法对于矩形的平面問題，平面問題的普遍解答在極坐标內的建立，矩形截面杆的扭轉，用定波法解答振动方程式）。另外，在用極坐标解答平面問題的时候，著者按此法仔細地施以运算，竟成功地找出了四个新的特解，这种以極点为异点的解答并未列在米歇尔給出的解答里面［公式(7.75)和(7.76)，見第42节和后面］。

在此版中，同前版一样，能量的近似法的运用均行略去，这些方法虽很有效用，但自从 Л. С. Лейбензон 的旣深刻又詳細的著作“应用变分法解答彈性理論問題”發表了以后，还把它們插入書中，未免多余。

此外，著者修改此書所采取方針是否正确，尙望讀者加以批評；一些讀者对于前版的种种缺点曾提出了很宝貴的意見，以此对于本版的改善頗有帮助，著者非常感激。

著者对于 Л. И. Мальгинов 和 М. И. Нейман 誠恳地表示感謝，兩君审閱稿件指正了若干叙述上的缺点，給了我以很大的友誼的协助。

莫斯科 1946 年 7 月 25 日

費洛宁輌-鮑罗第契

目　录

引　言

弹性理論是数学物理中的很重要的一部分。所研究的是力对弹性物体的作用，以物体在平衡狀态，或在运动狀态其內部所發生的应力和形变为对象。我們知道，这样的問題也是材料力学要研究的。

但在材料力学教程里面，借助于把問題的提法和解法加以簡化，我們設法求出尽可能簡單的、对实际計算便于应用的結果。彈性理論則是应用一种更普遍，更精确的方法去寻求問題的解答。它的目标首先是考察所得到的簡化解答是否正确，其次是对發生的差数大小加以确定；并且有許多問題用材料力学的普通方法去寻求解答根本是不可能的；这主要的是这样的一些問題，在这一些問題里面彈性物体的形狀并非材料力学中的一个典型杆或梁；彈性物体在受到載荷处所發生的局部应力問題也应划归此类。这类的問題用彈性理論得出的解答，具有能以直接应用的性質。

有許多問題，其解答的精确程度虽同材料力学一样，但需用較复杂的数学解析法，这类問題亦划入彈性理論（双曲率杆，薄板，壳体，彈性物体的振动理論，彈性平衡形狀的稳定性）。一般講来，彈性理論与材料力学的区别，在于所考察的問題在数学方面比較复杂。在这兩門学科之間并不能划出清楚的界限，因而有許多問題已被列在彼处，又列在此处的。

但是用彈性理論的方法去解答問題是这样的复杂，直到現在尚有許多在应用方面甚关重要的問題未能获得解答，虽說彈性理論在目前已經發展成了一个有能力的学科，广范地运用数学解析，而且具有屬于它的丰富的文献。

第一章 应力理論

§1 物体的应力狀态

应力① 的概念和在最簡單情形下处理应力的方法已見于材料力学②。这里，我們应該首先規定出一些表示应力的記号；这种記号在立体問題内要应用方便并且使我們很容易地辨別經过物体内同一点的各个微分平面上的应力。

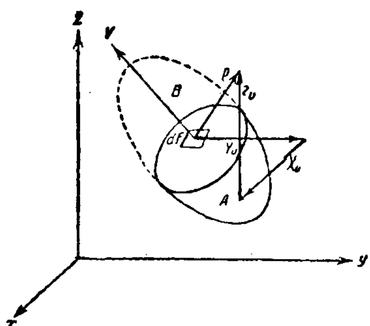

圖 1

应力有数种表示法；我們在此書中拟沿用許多彈性理論教程所常用的記号。

設想有一固体(圖 1)被一平面截斷成兩部分 A 与 B。物体截斷后，放弃其 B 部分；并在

---

① 譯者注：应力和应变兩个名詞是从英文名詞 Stress 和 Strain 譯过来的。中英名詞虽然表面上有些相似，但含义則迥然不同。Stress 和 Strain 都是由拉丁文 Stringere 或希臘文 στραγγιζω (收紧，压挤) 变来的，并没含有"应"字的意思。其他西文名詞如

俄文	Напряжение	Деформация
法文	Tension	Déformation
德文	Spannung	Deformazion

也是这样。"应"字有些不同的講法，加在"力"字和"变"字前面不但不能予以恰当的补充，反而可以使人誤解。其实 "Напряжение, Stress, Tension, Spannung" 均含有"紧張"之义，所以在 1953 年初版中譯为"張力"；另一方面 Деформация, Déformation, Deformazion 明明是指形狀(Forma)的变化，所以譯为"形变"。現在按 (1956 年) 中国科学院編訂名詞沿用"应力"。

② 同一著者的材料力学。

截面上划分出一个微分面 dF；我們用此微分面的向外法綫（对所保留的部分 A 而言）来确定該微分面的方向。

利用向外法綫不但可以簡單而又显明地指出微分面的方向，同时表明了物体被截断后所放弃的是那一部分（B 或 A），这一部分在放弃以后，它的作用我們是用力来代替。

設 p 为所指的微分面上的总应力 $p=\frac{dP}{dF}$，式內 dP 乃是加于微分面 dF 上的諸力的合力。

我們在空間任一个地方規定出一任意的直角坐标系 $Oxyz$，以它为标准来确定物体上各点的位置。諸应力也用它們在此坐标系各軸上的投影来确定；以后在研究形变的时候，我們仍將采用此同一坐标系。

我們用 X_v, Y_v, Z_v 表示微分面 dF 上总应力 p 在各坐标軸上的投影。在这种表示法內大写字母 X，或 Y，或 Z 表明是向那个軸作的投影；傍边的小写字母 v，則以外法綫方向来表明是那个微分面上的应力；因此，像記号 X_v 就应該这样讀："作用于外法綫为 v 的微分面上的总应力在軸 Ox 上的投影"。

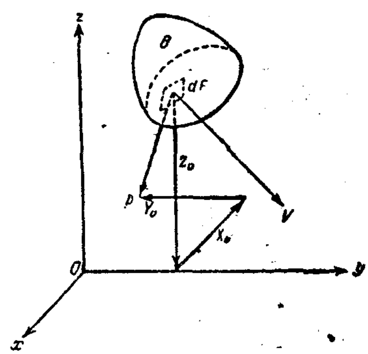

圖 2

如果截断以后所放弃的是 A 部分，則同一微分面 dF 的外法綫方向变为相反的。所以按照圖 2 微分面 dF 上的总应力的投影应該表示如次：X_{-v}, Y_{-v}, Z_{-v}；此处显然有

$$X_{-v}=-X_v;\quad Y_{-v}=-Y_v;\quad Z_{-v}=-Z_v,$$

因为应力 X_v, Y_v, Z_v 表示 B 部分加于 A 部分的作用，而应力 X_{-v}，Y_{-v}, Z_{-v} 則系表示 A 部分加于 B 部分的作用；这二作用大小相等

而方向相反。

在材料力学里总应力常被分解为法向分力与切向分力；我們所导入的应力在任意选取的坐标系各軸 Ox, Oy, Oz 上的投影

$$X_v, Y_v, Z_v$$

一般說来，旣非法向分力，亦非切向分力。

以后我們將时常作垂直于一个坐标軸的截面，譬如說垂直于軸 Oy 的截面；这样就得到总应力的投影（圖 3）如次：

$$X_y;\ Y_y;\ Z_y。$$

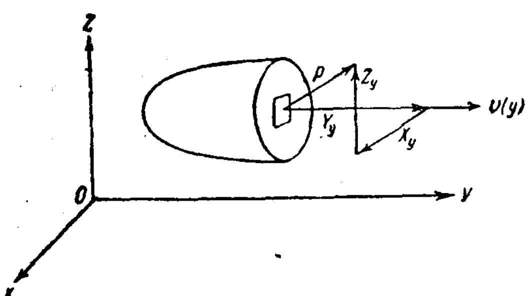

圖 3

在此情形下 Y_y 就是法向应力；而 X_y, Z_y 則是切向应力。

圖 4a 和圖 4б 表明垂直于其他二坐标軸的微分面上的应力的記号。綜合以上的結果，我們就得到平行于各坐标面的微分面上的一系应力如次：

$$X_x, Y_x, Z_x; X_y, Y_y, Z_y; X_z, Y_z, Z_z。$$

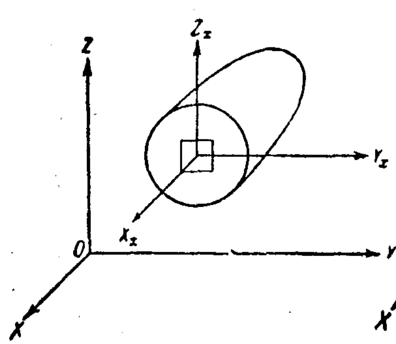

圖 4a

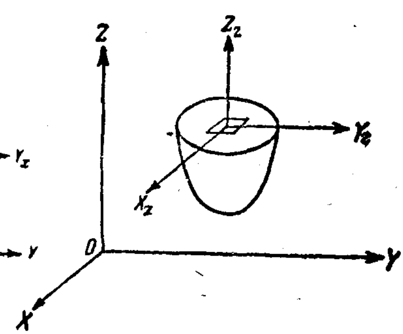

圖 4б

很容易看出应力如

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,$$

記号大小字母相同，即是法向应力。至于其他六个分力，則都是切向应力。

为了熟習这些新的記号，讀者可以試作以下的習題。

習　題

(1)圖5表示一个壩的截面 YOA，其 OY 面受到水的压力，而在 OA 面上則沒有載荷。

試表明在 OY 面上的法向应力和切向应力，并写出它們各与何数量相等(要注意到压力的方向，軸 Ox 的方向和投影的符号)。同时表出在斜面 OA (其外法綫为 ν)上的应力的分力。就此写出 OA 面上無有載荷的条件。如果作截面 aa 和 bb 后，去掉水壩的一部分(左部或右部；上部或下部)，試表明此二截面上的应力。

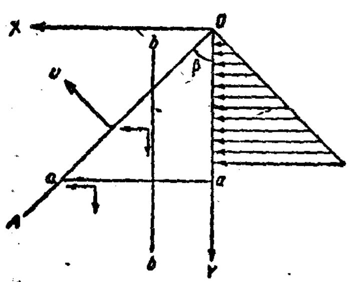

圖　5

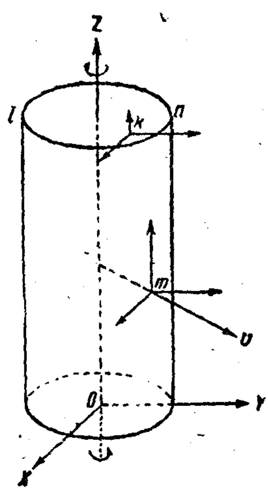

圖　6

(2)設一圓柱体受到加于其兩端面上的力的作用使之扭轉。試表出横截面 ln 內任一点 K 的应力，并写出沒有法向应力的条件。又試表出側面上任一点 m 的应力并写出側面不受任何載荷的条件。

(3)設一圓柱杆(圖7)，由作用于其右端面 pg 上的力使之弯曲。試写

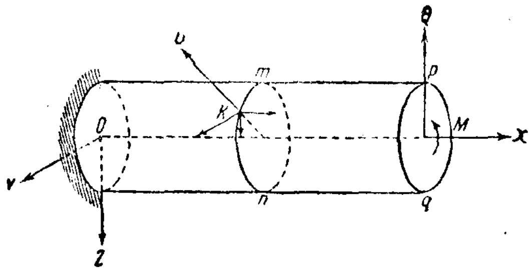

圖 7

出側面不受任何載荷的条件(参考以上的習題),并指出由材料力学所确定的横截面 mn 上的应力(法向力和切向力)。

現在有一些著者采用以下的記号,这种記号也見于專門技术文献里,垂直于 OX,OY,OZ 各軸的微分面上的法向应力分別用

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z$$

表示;而在同上的微分面上的切向应力,則用

$$\tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{xz}$$

表示,于是 $X_y=\tau_{xy};\quad Y_z=\tau_{yz};\quad X_z=\tau_{xz}$。

§2 平衡的微分方程式

我們从固体內划分出一个平行六面体形的微分体,使其側面与各坐标面平行。如設 dx,dy,dz 为此平行六面体的側棱 (圖 8),

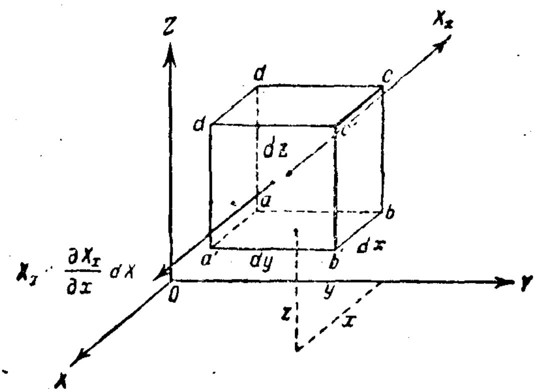

圖 8

则其体积等于 $d\tau = dx\,dy\,dz$。分出六面体之后，以力代替所放弃那部分的作用，并把每个侧面上的力各分为三个分力。总起来作用于六个侧面上的应力的分力共有 $6\times3=18$ 个。这些力就是作用于我們的平行六面体的外力。此外我們倘假設在物体上存在有所謂体积力，并認为这种力是分布在物体的質量上；例如以后要談到的重力就是一种体积力。

假設有某一种体积力存在，并把作用于單位質量上的体积力也分解为三个分力：X, Y, Z，則作用于平行六面体内質量 $\rho d\tau$（ρ 为物体上所考察的 T 点的密度，它代表單位体积内的質量，对于基本單位的因次是 $\frac{\text{公斤}\cdot\text{秒}^2}{\text{厘米}^4}$）的体积力为

$$X\rho\, d\tau = X\rho\, dx\,dy\,dz;$$

$$Y\rho\, d\tau = Y\rho\, dx\,dy\,dz;$$

$$Z\rho\, d\tau = Z\rho\, dx\,dy\,dz。$$

在一固体内，由外力所产生的应力，在各点并不相同；因此，一般講来，应力应当用点的坐标函数表示：

$$\left.\begin{array}{l} X_x = F_1(x, y, z); \\ Y_y = F_2(x, y, z); \\ Z_z = F_3(x, y, z); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

如果作用在微分体的 $abcd$ 面上(圖 8)的应力为 $X_{-x} = -X_x$，則作用在 $a'b'c'd'$ 面上的应力当为 $X_x + \frac{\partial x_x}{\partial x}dx$，因为从 $abcd$ 面移到 $a'b'c'd'$ 面时，在方程式(1.1)的第一式中只有一个坐标 x 改变。这样我們很容易地就能写出平行六面体各侧面上的应力。

假設所考察的固体处在平衡狀态，則每个微分体均应滿足静力平衡的六个方程式：

$$\left.\begin{array}{ll}\sum X=0, & \sum M_x=0,\\ \sum Y=0, & \sum M_y=0,\\ \sum Z=0, & \sum M_z=0。\end{array}\right\} \tag{1.2}$$

我們先看第一組平衡条件，特別是此組內的第一个方程式：

$$\sum X=0。 \tag{1.3}$$

在此式內只应列入在軸 Ox 上的投影不等于零的力：就是說作用于二側面 $abcd$ 和 $a'b'c'd'$ 上的法向应力(圖 9)和作用于其他面上与軸 Ox 平行的切向应力。

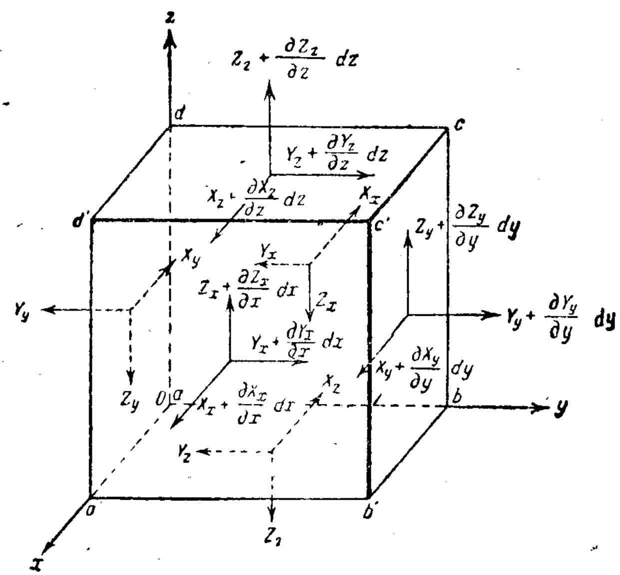

圖 9

如果把平衡条件(1.3)展开，就有：

$$\left(X_x+\frac{\partial X_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz-X_x\,dy\,dz+$$

$$+\left(X_y+\frac{\partial X_y}{\partial y}dy\right)dx\,dz-X_y\,dx\,dz+$$