算學小叢書

實用圖算法

陳廷驤
范克昌 編譯

商務印書館發行

算學小叢書

實用圖算法

陳廷驤
范克昌 編譯

商務印書館發行

(53767)

算學小叢書 實用圖算法

編譯者 陳廷驥 范克昌

發行者 商務印書館
上海河南中路二一一號

印刷者 商務印書館

發行所 商務印書館
上海及各地

1941年3月初版
1950年12月再版
基價5元

序

實用科學數字公式之計算，極爲繁複，往往勞心費時，一再複驗，仍難免於錯誤，偶一不慎，則毫厘之差，足使全功盡棄，何憾如之。故爲免除此弊，乃有以機械代計算者，例如算尺，算機，此種機械，苟能運用得法，固屬便利；惜其構造繁複，或刻度精微，製造殊非易易，且其應用，又僅限於單純之算式，故亦未能認爲盡美盡善。此外更有以幾何圖形，代替計算者，謂之圖解。圖解之種類頗多，例如：力學上所用之靜力圖解，及本書所論之算圖。算圖乃標有數字之幾何圖形，最初僅用於火車之行駛時間表、其後迭經兜侃(D'Ocagne)及叟柔(Soreau)兩君，以及諸學者，潛心研究，卒使算圖之應用，在學術上，獲得重要地位。此種學術，在歐美各國，均已普遍應用，而我國則尚少專著。本書大部取材於法國工商業百科全書，鳳維樂(M. Fonville)氏所著之算圖繪製法，此外更參考其他英法文之專著，互相考證，着手編著；詞句以簡明爲主，不求典雅；書中解釋，在可能範圍內，竭力避免繁複費解之高深數學，故極適用於：普通高級職業學校，及高中以上之工商業學校。本書爲供讀者需要，忽促出版，內容或有未能詳盡之處，尚期海內明達，有以正之。

一九三九年十一月編者識

目　次

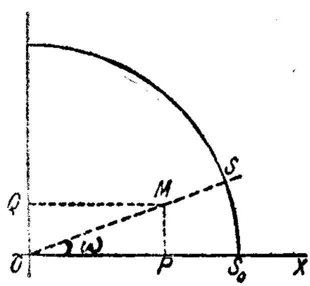
實用圖算法

第一章　輻射算圖

(Abaque rayonnant; network chart)

§1. 幾何性質：　今有正交兩軸：OX; OY, 及任意點 M。過 M 點及 O 點，作直線 OS 與 OX 軸成角度 ω（或弧度 S_0S）。則此 M 點之位置，可以此角度 ω，及縱橫之任一座標：OP 或 OQ 定之。而此三者有下列之關係：

$$\tan\omega = \frac{OQ}{OP} \cdots\cdots (1)\text{（圖 1）}$$



（圖 1）

如三者中已知其二，則第三者，可由計算得之。故此三者之關係，可表下列之方程式：

$$az = \frac{y}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

今以 e_x，為 x 每單位之長度（或作 x 之倍率 echelle, scale）；e_y，為 y 每單位之長度，

則：
$$x\cdot e_x=OP \qquad \tan\omega=\frac{OQ}{OP}=\frac{y\cdot e_y}{x\cdot e_x}=\frac{y}{x}\cdot\frac{e_y}{e_x}$$
$$y\cdot e_y=OQ$$

但就原方程式(2) $\qquad az=\dfrac{y}{x} \qquad az\cdot\dfrac{e_y}{e_x}=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{e_y}{e_x}$

$$\therefore\quad \tan\omega=az\cdot\frac{e_y}{e_x}=\left(a\cdot\frac{e_y}{e_x}\right)\cdot z$$

$$\omega=\text{arc}\tan\left(a\cdot\frac{e_y}{e_x}\right)\cdot z \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

a, e_x 及 e_y 均爲常數，如已知 z，可求 ω。今設 x 之常用值 (Valeurs utiles; useful value)，(因實用之數值不必包含自 $-\infty$至$+\infty$所有各值)係自 $x_{\min}$ 至 $x_{\max}$ (簡單作：x_n 至 x_m)；y 之常用值，係自 $y_{\min}$ 至 $y_{\max}$ (簡單作：y_n 至 y_m)。

則： $\qquad z_m=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{y_m}{x_n}; \qquad z_n=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{y_n}{x_m}$。

$$\tan\omega_m=\frac{e_y}{e_x}\cdot\frac{y_m}{x_n};\quad \tan\omega_n=\frac{e_y}{e_x}\cdot\frac{y_n}{x_m}。$$

又，與 z 之常用值相當之角度，共含有$(\omega_m-\omega_n)$度。

今設 $\qquad \omega_m-\omega_n=\theta$

則：
$$\tan\theta=\frac{\tan\omega_m-\tan\omega_n}{1+\tan\omega_m\cdot\tan\omega_n}=\frac{\dfrac{e_y}{e_x}\left(\dfrac{y_m}{x_m}-\dfrac{y_n}{x_m}\right)}{1+\left(\dfrac{e_y}{e_x}\right)^2\cdot\dfrac{y_m\cdot y_n}{x_m\cdot x_n}}$$

由是觀之，θ 因 $\dfrac{e_y}{e_x}$ 而變，有如 e_y/e_x 之函數。爲便於使用計，應使 θ 角盡量加大。今就 θ 角，與 e_y/e_x 之增變情形，列表於後：

e_y/e_x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{x_m\cdot x_n}{y_m\cdot y_n}}$		0		$+\sqrt{\dfrac{x_m\cdot x_n}{y_m\cdot y_n}}$		$+\infty$
$\tan\theta$	0	$\searrow$	$-\dfrac{y_m\cdot y_n}{2x_m\cdot x_n}\left(\dfrac{y_m}{x_n}-\dfrac{y_n}{x_m}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\dfrac{y_m\cdot y_n}{2x_m\cdot x_n}\left(\dfrac{y_m}{x_n}-\dfrac{y_n}{x_m}\right)$	$\searrow$	0

故知：當 $e_y/e_x=+\sqrt{\dfrac{x_m\cdot x_n}{y_m\cdot y_n}}$ 時，$\tan\theta$ 有最大值，同時

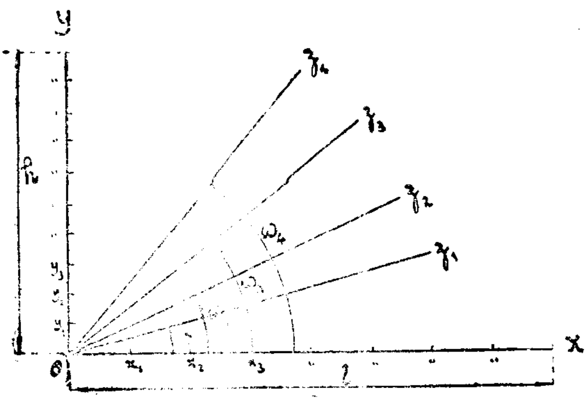
θ 角適佔滿 90°，因：$\tan\omega_m=\dfrac{e_y}{e_x}\cdot\dfrac{y_m}{y_n}=\infty$；

$$\tan\omega_n=\frac{e_y}{e_x}\cdot\frac{y_n}{x_m}=0。$$

$\omega_m=90^\circ$；　　$\omega_n=0^\circ$。　　$\theta=90^\circ-0^\circ=90^\circ$。

§ 2.　作圖：

$$az=\frac{y}{x}$$



（圖 2）

1) $\begin{cases} e_y/e_x=\sqrt{\dfrac{x_{max}\cdot x_{min}}{y_{max}\cdot y_{max}}} \\ e_x(x_{max}-x_{min})\leqq l \\ e_y(y_{max}-y_{min})\leqq h \end{cases}$ 當 x_{min} 及 $y_{min}\neq 0$ 時，則可根據左列三式，任選 e_x, e_y 兩值。如 $x_{min}=y_{min}=0$ 時，則第一式可不必顧及。

2) 在 ox 及 oy 軸上，各書 $x_1, x_2,$……及 $y_1, y_2,$……等常用值；且令 $\overline{ox}, \overline{ox_2}$ 等線分$=x_1\cdot e_x,\ x_2\cdot e_x,$……

3) 根據：$\omega=\arc\tan\left(a\dfrac{e_y}{e_x}\cdot z\right)$ 式，以 z 之常用值：$z_1\ z_2$；……求 ω, ω_2……相當角度，過 o 點作 oz, oz_2 等線，並註 z_1, z_2 諸值於各線端；則圖告成。

§3. 應用： 查爾斯(Charles)定律公式。

在一指定之壓力下，氣體之體積，恆依溫度而變，今設 V_0 爲 $0°$ 時原有體積；V_t 爲 $t°$ 時體積；$t°$ 爲溫度；

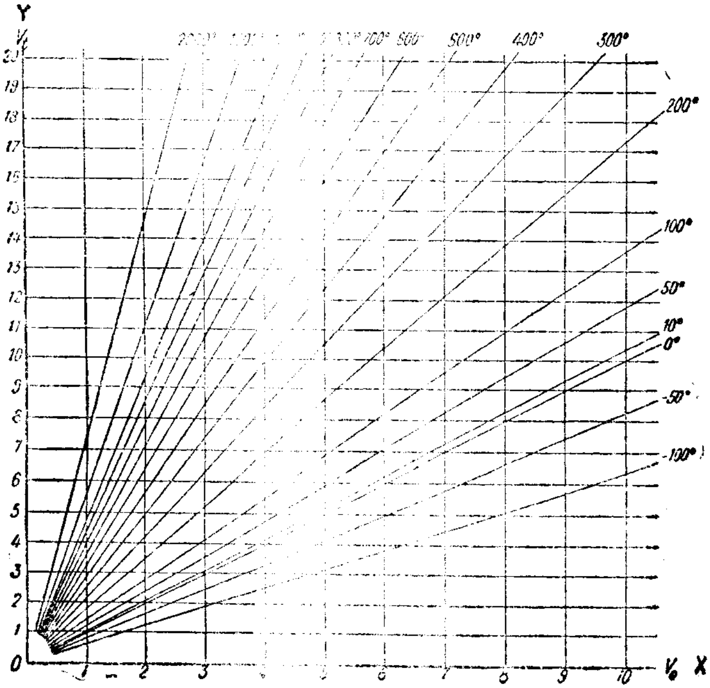
則：$V_t=V_0(1+at)$。$a=1/273$。此式可寫作 $\dfrac{V_t}{V_0}=(1+at)$

令：V_t 爲 y, V_0 爲 x；$(1+at)$ 爲 z, $a=1$。

在普通情形之下，t 多較 $0°$ 爲高；即：$(1+\alpha t)>1$，今如取：$e_x=e_y$，則：$e_y/e_x=1$。故當：$z=1$ 時(即 $t=0°$ 時)。

$\tan\omega=a\dfrac{e_y}{e_x}\cdot z=1\times1\times1=1$；$\omega=45°$。故自 $0°$ 至 $45°$ 間 z 皆<1，t 皆<0(即負數)。因之 t 之負值，竟佔全圖之半。今設法使其負值地位縮小，乃更設：$e_y/e_x=\dfrac{1}{2}$。當 $t=0$ 時($z=1$ 時)，$\tan\omega$ 減爲 $\dfrac{1}{2}$。今設圖紙之長，寬，各爲：200 mm.(即 $l=200$, $h=200$)(圖 3)。若 V_0 之常用值自 0 至 10(共

十個等分),每等分應佔 20 mm./unit; 即 $e_x=20$ mm./unit, $e_y/e_x=1/2$, $e_y=10$ mm./unit, $\omega=\arctan\left[\frac{1}{2}(1+\alpha t)\right]$。



(圖 3)

§ 4. 用法: 例如 0° 之原有體積爲: 5 m³, 求 600° 時之體積。今取通過 $V_0=5$ 之線,與 600° 之輻射線,求得交點 A; 在 V_t 軸上,檢得 A 之縱坐標爲 16; 則 $V_t=16$ m³。

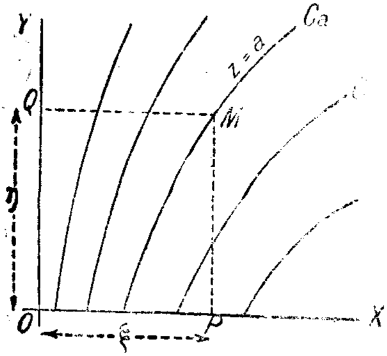
第二章　笛卡氏算圖

(Abaque cartésien. Descartes chart)

§5. 幾何性質：　笛卡算圖，係根據笛卡(Descartes)氏坐標而成者。此種算圖，可表含有三變數之公式。

例如：　　　　$f(x, y, z)=0$

今試與 z 以任意值 a：$z=a$。則有無數組之$\begin{cases}x\\y,\end{cases}$適合於 $f(x; y \cdot a)=0$；而適合此式之諸組$\begin{cases}x\\y,\end{cases}$可於坐標圖上以一曲線表之。今若依次令：$z=a$, $z=b$, ……則：z 之每一值，均相對一曲線 C_a, C_b, C_c, ……（圖4）。故若已知 x, y, z 中之任何二值，例如：$z=a$, $x=\xi$；則第三值 $y=\eta$, 不難求得。如能在圖上畫縱橫線方格，則此圖之應用，尤爲便利。



（圖4）

此種算圖，僅用於：當 C_a, C_b…… 爲規則曲線，或直線之時；通常多用於一次方程式。

一次方程式：

設：　　　$f(x \cdot y \cdot z)=0$ 爲一次方程式

則：　　　$f(x \cdot y \cdot a)=0$ 亦必爲一次方程式。

今設有方程式：

$ax+by+c\cdot f(\omega)+d=0$。此方程式，可視爲一次式。

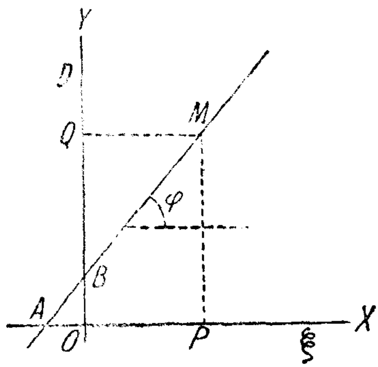
今：　$f(\omega)=z$。則原式變爲：

$$ax+by+cz+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

作縱橫兩軸（圖5），則任意點 M 之坐標，各爲：$\begin{cases}\overline{OP}\\\overline{OQ}\end{cases}$。

今設：$\begin{cases}\overline{OP}=\xi=e_x\cdot x, & e_x\text{ 爲 } x\text{ 每單位之長度，}\\ \overline{OQ}=\eta=e_y\cdot y. & e_y\text{ 爲 } y\text{ 每單位之長度。}\end{cases}$

則：　$x=\dfrac{\xi}{e_x}$，　$y=\dfrac{\eta}{e_y}$。



（圖5）

代入(1)式，卽成：

$$\frac{a}{e_x}\,\xi+\frac{b}{e_y}\cdot\eta+cz+d=0$$（此式之三變數爲 ξ,η,z）

當$(cz+d)$＝常數（卽 z＝某一指定値）時，此式卽成直線方程式。

$$\left(\frac{a}{e_x}\right)\xi+\left(\frac{b}{e_y}\right)\eta+(cz+d)=0\cdots\cdots(2)$$而此直線之線坡爲：

$$\tan\varphi = -\frac{a}{b}\cdot\frac{e_y}{e_x}。$$

e_x 及 e_y, 均爲常數。若 a/b 爲常數,則此線坡 $\tan\varphi$, 亦爲常數。故不論 z 爲何值, 其所對諸直線, 均互相平行(線坡爲正數,則 φ 角$<90°$;線坡爲負數,則 φ 角$>90°$)。

令以 0 分別代(2)式之 ξ 及 η, 卽得此直線與兩軸之交點(A, B):

$$OA = -\frac{cz+d}{a}\cdot e_x, \qquad OB = -\frac{cz+d}{b}\cdot e_y$$

令 $z=$ 任意一値,則得 OA 及 OB 兩値;連接 AB, 卽得與此 z 値相當之直線。

§6. 作圖: 設此算圖之長爲 l, 高爲 h,

令: $$e_x = \frac{l}{x_{max}-x_{min}}, \qquad e_y = \frac{h}{y_{max}-y_{min}}$$

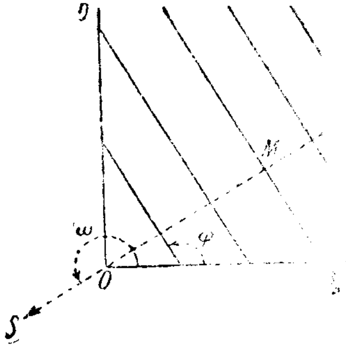
如依上述法則,求得 A, B 兩交點,固可連成直線;而適常多從直線與原點之距離着手。依解析幾何公式: $\left(D=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ 得求該直線與原點之距離:

$$\overline{OM} = D = \frac{(cz+d)}{\sqrt{\left(\frac{a}{e_x}\right)^2+\left(\frac{b}{e_y}\right)^2}} = \frac{e_xe_y(cz+d)}{\sqrt{(a^2e_y{}^2+b^2e_x{}^2)}}$$

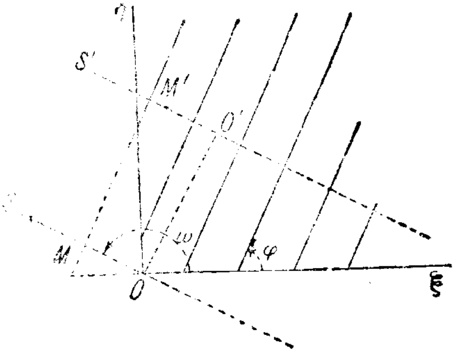
(圖 6 A), 示$\frac{-a}{b}<0$ 時 φ 角$>90°$;

(圖 6 B), 示$\frac{-a}{b}>0$ 時 φ 角$<90°$。作 OS 軸與 $O\xi$ 軸成角度 ω。

$$\omega = \varphi + 90°。$$



（圖 6 A）



（圖 6 B）

以 z 之諸值代入：

$$D=\overline{OM}=\frac{e_x e_y(cz+d)}{\sqrt{a^2e_y^2+b^2e_x^2}}$$ 則得 D 之諸值。

如 D 值爲正，則 $\overline{OM}$ 依 $\overrightarrow{OS}$ 軸之向而進；如 D 值爲負，則 $\overline{OM}$ 與 $\overrightarrow{OS}$ 軸方向相反。

由是得諸點。M. 通過 M 點，作諸直線 $\perp OS$，而於各線上註明其相對 z 之值，則此圖告成。

§7. 應用：摩尼曼(D. Monnier)氏。圓柱形導氣管公式

$$Q=\sqrt{\frac{D^5 J}{840}}$$

Q：爲氣體流量，以每小時之方公尺數計($m^3./h.$)。
D：爲導氣管直徑，以公分 cm. 計。
J：爲氣壓降(Perte de charge; pressure drop.)之值；即每公里所降壓力，以每公里，一公厘之水柱高計(mm. 水柱/km.)。

如化爲對數(log)式，

則成： $5\log D+\log J-2\log Q-\log 840=0$

令： $\log D=x$; $\log J=y$; $\log Q=z$。

則成： $5x+y-2z-2.92428=0$ 此式爲三元一次式。

故可以 x 附於 ox 軸；以 y 附於 oy 軸。

D 之常用值，自 1 cm. 至 100 cm.；故 x (即 $\log D$)自 0 至 2；

J 之常用值，自 1 mm. 至 100 mm.；故 y (即 $\log J$)自 0 至 2。

設圖面之長寬各爲： $l=140$ mm.， $h=200$ mm.

$$\therefore \quad e_x=\frac{140}{2}=70 \text{ mm.}; \qquad e_y=\frac{200}{2}=100 \text{ mm.}$$

故，代表"D"值之長度爲： $e_x \cdot x=e_x \log D=70\log D$ mm.，

代表"J"值之長度爲： $e_y \cdot y=e_y \log J=100\log J$ mm.

設 D 之諸常用值爲：

$D=$	5;	10;	20;	30;	40;	50;	75;	100 cm.
則 $70\log D=$	48.9;	70;	91.1;	103.4;	112.1;	119;	131.2;	140 mm.

設 J 之諸常值爲：

$J=$	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100mm
則 $100\log J=$	69.9	100	130	147	160	169	177.8	184.5	190.3	195.4	200mm.

$$\tan\varphi=\frac{-a}{b}\cdot\frac{e_y}{e_x}=\frac{-5}{1}\cdot\frac{100}{70}=-7.143$$

此時 $\tan\varphi<0$，故 $\varphi>90°$。今作任一直線，與 ox 軸成 φ 角以備作諸平行線之用。各線與原點之距離：

$$\overline{OM}=\frac{e_xe_y(cz+d)}{\sqrt{a^2e_y^2+b^2e_x^2}}$$

各以其實值代之：

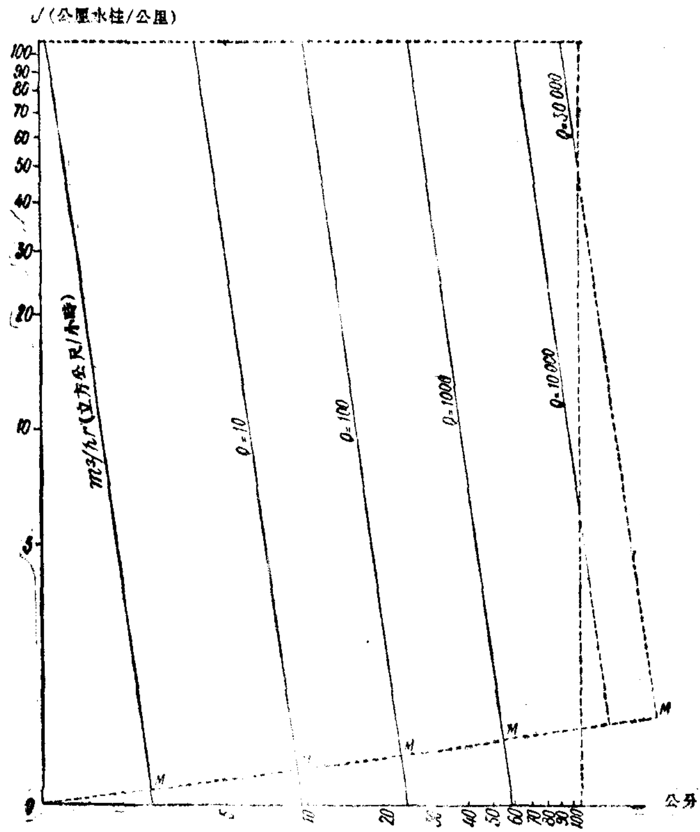
$$OM=-13.86(2\log Q+2.92428)\text{ mm.}$$

如 $Q=$ 1　10　100　1000　10000　30000

則：$\overline{OM}=-40.5$　-68.2　-96　-123.7　-151.4　-164.7mm.

OM 之值皆為負數，故當自 0 點取其負方向。

摩尼愛公式　$Q=\sqrt{\dfrac{D^5J}{840}}$



（圖 7）

§8. 應用: 一元三次方程式

由前證明: $ax+by+(cz+d)=0$ 直線式之線坡爲:

$$\tan\varphi=-\frac{a}{b}\cdot\frac{e_y}{e_x}。\quad e_y/e_x \text{ 爲常數。}$$

若 $\frac{a}{b}$ 爲常數,則諸線互爲平行;若 a/b 爲變數。

例如 $a/b=f(z)$, 則諸線之傾斜度,各不相同;

例如 方程式: $x^3+px+q=0$; 本式含有三變數, 可用此類算圖解之。

作: $o\xi$, $o\eta$ 兩坐標軸: $\xi=e_p\cdot p$, $\eta=e_q\cdot q$。e_p, e_q 爲 p, q 每單位之長度。

以 p,q 之值代入原式:

$$x^3+\frac{\xi}{e_p}x+\frac{\eta}{e_q}=0$$

則成: 含有變數 ξ 及 η 之一次式。

其線坡: $\tan\varphi=\frac{e_q}{e_p}\cdot x$; 爲 x 之函數。

且當 x 爲正數時, $\angle\varphi>90°$; x 爲負數時, $\angle\varphi<90°$。製圖之前,應先決定 p, q 之常用值。e_p 及 e_q 當選擇適當之值,俾各直線保持適當之斜度。

今設: $e_p=8$ mm., $e_q=2$ mm。

則: $x^3+\frac{\xi}{8}x+\frac{\eta}{2}=0$; 或作 $\xi+\frac{4}{x}\eta+\frac{8}{x^2}=0$

x 之每一值,相當一直線; 如此畫成下列算圖(圖 8): 其 p 之值,界乎 -14 與 $+14$ 之間; q 之值, 界乎 -72 與 $+72$ 之間。