

中学数学凯旋门



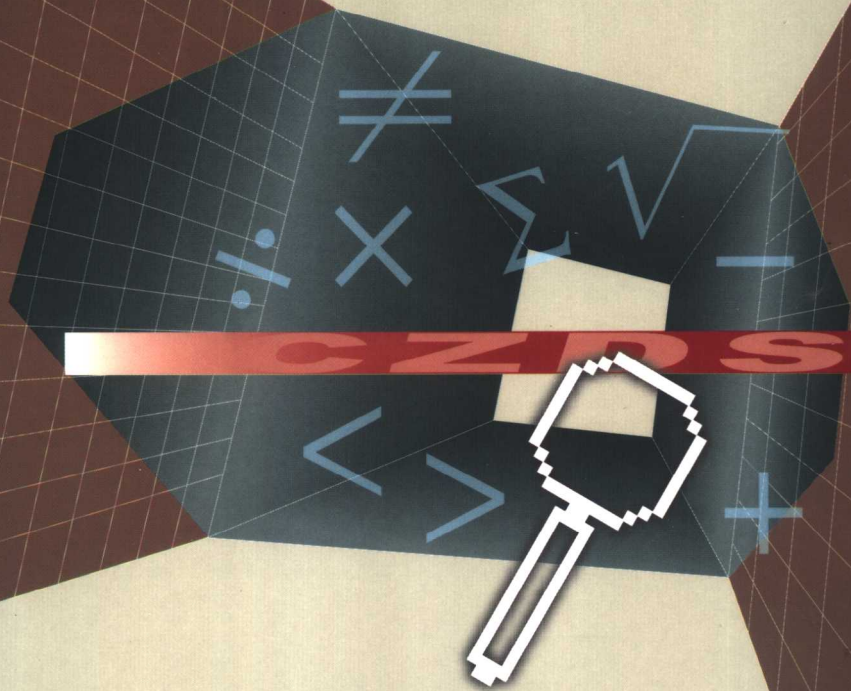
丛书顾问 张奠宙
丛书主编 何维安
邹一心

全国著名教育专家大力推荐
强调数学思想方法科学实用

初中代数

常用解题方法

孙兆桂 李世廷 袁行吾 编著



中国出版集团
东方出版中心

中学数学凯旋门

丛书顾问 张奠宙

初中代数常用解题方法

何维安 邹一心 主编

孙兆桂 袁行吾 李世廷 编著

中国出版集团

东方出版中心

图书在版编目 (CIP) 数据

初中代数常用解题方法. 何维安, 邹一心主编; 孙兆桂, 袁行吾, 李世廷编著. —上海: 东方出版中心, 2003. 8

(中学数学凯旋门)

ISBN 7-80186-077-2

I. 初… II. ①何…②邹…③孙…④袁…⑤李…

III. 代数课—初中—解题 IV. G 634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 033444 号

初中代数常用解题方法

出版发行: 东方出版中心

地 址: 上海市仙霞路 335 号

电 话: 62417400

邮政编码: 200336

经 销: 新华书店上海发行所

印 刷: 上海望新印刷厂

开 本: 850 × 1168 毫米 1/32

字 数: 160 千

印 张: 7.25

版 次: 2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 7-80186-077-2

全套定价: 72.00 元 (共 6 册)

版权所有, 侵权必究。

内 容 提 要

“中学数学凯旋门”丛书由中学数学特级教师等主持编写,本书是其中之一。本书根据现行全国主要中学数学课程标准和教材,系统、科学地介绍了初中代数中常用的解题技巧、解题途径、注意事项等,特别是根据我国教育改革和素质教育的要求,根据目前中考的需要,加强了其中的“应用问题”、“开放型问题”、“阅读理解型问题”等的编选,以培养读者的建模能力,收集、处理有关信息的能力和创新能力。本书可供全国广大中学师生阅读,作为教与学的参考。

序

张奠宙

一份解题方法的丛书放在面前:《中学数学凯旋门》,很好听的名字。原以为数学解题书已经出得不少了,要有新意怕也难。打开一看,倒觉得确实与众不同。在目录上,满眼所及,是各式各样的方法。大的如归纳法、分析综合法、数形结合法、代数方程法;小的有待定系数法、旋转法、图形割补法、面积法、比例系数法等等。作者的原意是以数学方法为“经”,大量例题做“纬”,编织成一本中学数学的解题训练书。想法很新颖,付诸实践之后,当会看出它的效果来。

数学方法论一词,当是中国的特色。在著名的美国《数学评论》杂志的 500 多项分类目录中,并没有“数学方法”的条目。回想起来,徐利治先生于 1988 年出版《数学方法选讲》是这项研究的起源。自此之后的十余年间,数学方法在中国大陆迅速传播,尤其在“中学数学解题”领域中独树一帜。在中学数学教育界的声誉,可以说超过了波利亚的《怎样解题》。在实践上,一般的“解题技巧”纷纷向“解题方法”提升。这一热潮至今未退。本书的出现,则是一个新的例证。

这里,我愿从数学教育的角度提一个问题:学生是否能够理解“数学方法”?把数学题目的解法用方法论加以阐述,是教师的愿望。那么,学生是否能够掌握数学方法?学生会解题,就等于掌握了方法?在学生的认知过程中,数学方法论处于何种地位?似乎没有细究。最近,读到一份对高一学生的测试报告,说到学生对“归纳法”的掌握很差。如果问学生“什么是归纳法”,

2 初中代数常用解题方法

绝大多数学生只有模糊的印象,说不清楚。怕未必。因此,如何“教”数学方法,使得学生能够自觉运用数学方法,也许是未来一个重要的研究课题。本丛书从方法入手,将数学方法组织起来,希望能对回答“如何教数学方法”有点益处。

丛书共有六册,涵盖了初中和高中数学的主要内容。翻看之余,愿就几何内容说几句话。平面几何的内容,在新颁布的《九年义务教育数学课程标准》中已经做了大量的削减。公理化方法,以及圆的知识都所剩无几。增加的是几何直观内容,立体几何的若干内容也理所当然地进入了初中。不过,三角形、四边形、勾股定理,全等、相似、运动几何、坐标几何等等的基本概念仍然存在。几何教学的主要目的之一是培养学生的理性精神。因此,如何处理好演绎推理和直观操作的关系,将是今后一个时期研究的热点问题。几何解题方法是否也该做一些改变?此外,高中数学课程标准里有一门平面几何的选修课,奥林匹克数学竞赛中平面几何仍然居于核心地位。所以说,平面几何证题的学习和研究,并不会绝迹。

高中数学课程标准中,立体几何内容的安排,遵循直观认识——操作确认——逻辑论证——度量计算的原则。与此同时,向量计算方法将大量采用。这套丛书注意到了这些发展趋势,值得肯定。

“与时俱进”,打开数学方法的教学研究的新局面,该是未来努力的目标。上面的一些话,权作为序。

2003年春于华东师大

编 者 的 话

数学是中学的一门主要学科,要学好数学,必须掌握数学的基础知识、基本技能和基本思想方法。有的读者感到数学抽象、难学,虽然花了不少时间,但提高不快;面对稍难的题目,就不知从何下手。为此,我们一些长期在中学数学教学第一线的教师编写了这套中学数学凯旋门丛书,希望在切实掌握数学思想方法的基础上,能为读者解除困惑,指点迷津。

为了让读者能尽快提高数学素质,领悟并能运用常用的数学思想方法,本书在编写过程中,既注意与现行教材同步,又对每一节内容按常用的数学思想方法进行分类阐述,以突出数学思想方法的训练;不仅精选典型例题,而且对每一例题都作了深入的剖析。特别是,“解题思路”栏目帮助读者解决“你是怎么想到的”同时,培养读者的探究能力;在解题的基础上又引导读者反思:解这类题易犯什么错误,如何防止,有什么规律,能否类比、引申?从中帮助读者深入领悟数学思想方法。本书面向全体学生,其中既有很多基本的例题和习题,通过自学和自习,可使目前学习数学暂时有困难的读者,摆脱困境;同时又有不少综合性较强、灵活运用例题和习题,让水平较高的读者也能得到进一步的提高。本书中还特别加强了“应用问题”、“开放型问题”、“阅读理解型”问题等的编选,以培养读者的建模能力,收集、处理信息的能力和创新能力。

本书中如有不妥或疏漏之处,敬请读者批评指正。



一、实数	1
(一) 实数的性质与运算	1
相关知识要点	1
解题思路方法	2
1. 应用定义解题	2
2. 建立数学模型	4
3. 巧用运算律	5
4. 善用运算工具	8
5. 分类讨论法	9
6. 反证法	11
典型习题训练	11
(二) 实数大小的比较	13
相关知识要点	13
解题思路方法	13
1. 化归法	13
2. 比较法	14
3. 逐步逼近法	17
4. 数形结合法	18
典型习题训练	21
二、代数式	24
(一) 整式	24
相关知识要点	24
解题思路方法	25
1. 换元法	25
2. 配方法	28
3. 待定系数法	30
4. 分离系数法	33
5. 余数定理的运用	34



典型习题训练	37
(二) 分式	38
相关知识要点	38
解题思路方法	39
1. 分类讨论法	39
2. 巧用运算律	41
3. 裂项法	43
4. 设参数法	44
5. 换元法	47
典型习题训练	49
(三) 根式	50
相关知识要点	50
解题思路方法	52
1. 分类讨论法	52
2. 逆用运算法则	55
3. 换元法	59
典型习题训练	63
(四) 代数式的综合应用	65
解题思路方法	65
1. 换元法	65
2. 配方法	67
3. 待定系数法	69
4. 拆项法	70
5. “归纳、猜想、证明”的方法	72
6. 阅读理解题	74
典型习题训练	77
三、方程与方程组	80
(一) 一元一次方程与二元一次方程组 ...	80



相关知识要点	80
解题思路方法	80
1. 辨析法	81
2. 化归法	81
3. 消元法	82
4. 分类讨论法	83
5. 运用定义求解	85
6. 枚举法	86
7. 设参数法	87
典型习题训练	88
(二) 一元二次方程	89
相关知识要点	89
解题思路方法	90
1. 基本解法	90
2. 综合法	91
3. 恒等变形法	93
4. 分类讨论法	95
5. 利用根的定义求解	96
典型习题训练	98
(三) 可化为一元二次方程的方程	99
相关知识要点	99
解题思路方法	100
1. 观察法	100
2. 基本解法	101
3. 换元法	105
4. 运用余数定理求解	108
5. 构造法	109
6. 分类讨论法	110



典型习题训练	110
(四) 列方程(组)解应用题	112
相关知识要点	112
解题思路方法	112
1. 直接设元法	112
2. 间接设元法	115
3. 设辅助元法	117
4. 利用分类讨论解不定方程(组) ...	119
典型习题训练	121
(五) 方程(组)的综合运用	122
1. 消元法	122
2. 综合法	123
3. 分类讨论法	124
4. 换元与分类讨论	125
5. 构造法	127
典型习题训练	128
四、一元一次不等式(组)	130
相关知识要点	130
解题思路方法	131
1. 基本解法	131
2. 数形结合法	133
3. 分类讨论法	134
4. 综合法	136
典型习题训练	138
五、函数	140
(一) 函数的有关概念	140
相关知识要点	140
解题思路方法	140



1. 应用定义解题	140
2. 方程的思想方法	141
3. 数形结合法	143
4. 化归法	146
5. 解析法	146
典型习题训练	148
(二) 正比例函数与反比例函数	149
相关知识要点	149
解题思路方法	149
1. 应用定义解题	149
2. 数形结合法	152
3. 化归法	154
4. 待定系数法	155
典型习题训练	158
(三) 一次函数	159
相关知识要点	159
解题思路方法	160
1. 待定系数法	160
2. 数形结合法	160
3. 综合法	162
4. 代换法	164
5. 构造法	164
6. 分类讨论法	165
典型习题训练	168
(四) 二次函数	170
相关知识要点	170
解题思路方法	171
1. 应用定义解题	171



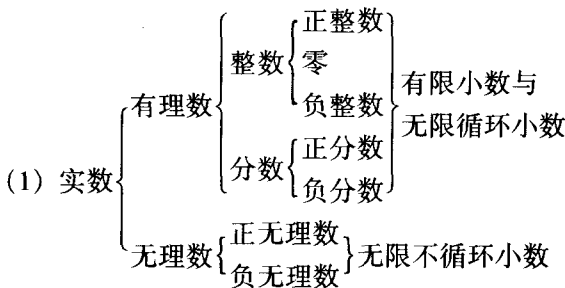
2. 数形结合法	172
3. 化归法	175
典型习题训练	179
(五) 函数方法的综合应用	180
解题思路方法	180
1. 数形结合法	180
2. 构造法	181
3. 化归法	181
4. 函数与方程的思想方法	182
5. 分类讨论法	185
6. 建立数学模型	187
7. 分析与综合	188
8. 等价转换	189
典型习题训练	190
六、统计初步	193
相关知识要点	193
解题思路方法	193
1. 应用定义解题	193
2. 数形结合法	196
3. 化归法	197
4. 分类讨论法	197
5. 建立数学模型	198
典型习题训练	199
参考答案与提示	202

一、实数

(一) 实数的性质与运算

[相关知识要点]

1. 实数的概念



(2) 数轴: 规定了原点、正方向和长度单位的直线叫数轴。

(3) 相反数: 像 a 和 $-a$ 只有符号不同的两个数, 就说其中一个数是另一个数的相反数。规定零的相反数是零。

(4) 绝对值: 数 a 的绝对值用符号 $|a|$ 表示, 规定

$$|a| = \begin{cases} a (a > 0), \\ 0 (a = 0), \\ -a (a < 0). \end{cases}$$

(5) 倒数: 1 除以一个不为零的数的商, 叫这个数的倒数 (零没有倒数), a 的倒数是 $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$)。

(6) 方根:一个数的 n 次方是 a , 这个数就是 a 的 n 次方根。当 $n=2$, 就叫 a 的平方根(也叫二次方根); 当 $n=3$, 就叫做 a 的立方根(也叫三次方根)。

2. 实数的运算

(1) 在实数集内可进行加、减、乘、除、乘方、开方六种基本运算。

(2) 运算律

交换律: $a+b=b+a, a \cdot b=b \cdot a$;

结合律: $(a+b)+c=a+(b+c), (ab) \cdot c=a \cdot (bc)$;

分配律: $a(b+c)=ab+ac$ 。

(3) 近似数的有效数字:从左边第一个不是零的数字起,到右边最后一位四舍五入所得到的数字为止,一共有 n 个数字,就说这个近似数有 n 个有效数字。

(4) 科学记数法:把一个数写成 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10, n$ 为整数)的形式。

[解题思路方法]

1. 应用定义解题

例1 已知 a, b 互为相反数, c, d 互为倒数, m 的绝对值是 5, 求代数式 $(a+b)^2 - cd + m^2$ 的值。

解题思路 根据定义可知,互为相反数的两数之和为零,互为倒数的两数之积为 1,在实数范围内 $|m|^2 = m^2$,故本题易解。

解 $(a+b)^2 - cd + m^2 = 0^2 - 1 + |m|^2 = -1 + 25 = 24$ 。

说明 相反数、倒数、绝对值的这些性质是由定义得出,对知识的来龙去脉必须清楚。

例2 已知 $(a-2)^2 + |b+3| = 0$, 求 $3a+2b$ 的值。

解题思路 根据定义,一个实数的绝对值是非负的数,任何实数的平方也是一非负的数。又“若干个非负数的和为零,则其

中每一个数都必须是零”。

解 $\because (a-2)^2 \geq 0, |b+3| \geq 0$, 已知 $(a-2)^2 + |b+3| = 0$,

$$\therefore \begin{cases} (a-2)^2 = 0, \\ |b+3| = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a-2 = 0, \\ b+3 = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} a = 2, \\ b = -3, \end{cases}$$

$$\therefore 3a + 2b = 3 \times 2 + 2 \times (-3) = 0.$$

例3 已知 $2x + 5 > 0$, 化简 $|x + 5|$ 。

解题思路 根据定义化去绝对值符号时,要判定绝对值号内的数是正数、负数还是零。

解 已知 $2x + 5 > 0$, $\therefore x > -\frac{5}{2}$, $x + 5 > -\frac{5}{2} + 5 = \frac{5}{2} > 0$,

$$\therefore |x + 5| = x + 5.$$

例4 天文学上以“光年”作为计算星球间距离的单位,一光年是光在一年(365天)内所走的距离,光速是 3×10^5 千米/秒。求:

(1) 一年内光走的距离是多少? (2) 把这个距离用科学记数法表示成含四个有效数字的近似数 L 。(3) 近似数 L 表示的准确数 A 是在什么范围内?

解题思路 有效数字是由四舍五入法截得的,由此可得第(2)、(3)题的解答。

$$\text{解} \quad (1) 3 \times 10^5 \times (365 \times 24 \times 60 \times 60) = 9.4608 \times 10^{12};$$

$$(2) L = 9.461 \times 10^{12} (\text{千米});$$

$$(3) (9.461 - 0.0005) \times 10^{12} \leq A < (9.461 + 0.0005) \times 10^{12},$$

$$\text{即 } 9.4605 \times 10^{12} \leq A < 9.4615 \times 10^{12} (\text{千米}).$$

说明 为截取到指定精确度的近似数,运算结果要比要求的精确度多保留一位。(3)中准确数 A 的范围,左端可取等号,右端不能取等号,这是根据四舍五入法截取而得的。

2. 建立数学模型

例5 地球上陆地的最高峰珠穆朗玛峰高出海平面8848.13米,太平洋最深处低于海平面11022米,则地球上最高点对最低点的相对高度为多少?

解题思路 数学中的正负数是表示相反意义的量,规定海平面的高度为零,就可分别用正、负数表示这两个量,通过减法运算可求解。

解 规定海平面的高度为“零”,且向上为“正”,向下为“负”,那么珠穆朗玛峰高度为+8848.13米,太平洋最深处为-11022米。

$$+8848.13 - (-11022) = 8848.13 + 11022 = 19870.13(\text{米}).$$

$\therefore$ 地球上最高点对最低点相对高度为19870.13米。

说明 减法法则是“减去一个数,就是加上它的相反数”。数学概念往往是从客观世界中抽象而得,如正负数代表相反意义的量,绝对值表示两点间距离,因此实际问题可以通过建立数学模型,转化为数学问题来解。

例6 一笔直公路沿线有10个蔬菜供应点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$,相邻两供应点之间距离都是1千米。现准备在某个供应点处建造一蔬菜种植基地,每天向每个供应点送一车蔬菜。设卡车每天送菜总路程 S (包括回程)。(1)若基地选在 A_5 处,求 S 的值。(2)若基地选在 A_4 处,求 S 的值。(3)选在何处,可使总路程 s 最小? 最小路程是多少?

解题思路 本题是求在一直线上各点之间的距离,可把笔直的公路看作数轴,则每一个供应点就可用一个数表示,通过实数的绝对值的加法,可求得 S 的值。

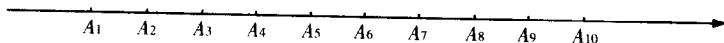


图 1-1