有限群论基础

陈重穆编著

重庆出版社

有限群论基础

陈 重 穆 编 著

重 庆 出 版 社

一九八三年·重庆

封面设计：文　涛

有限群论基础　　陈重穆编著

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
四川省新华书店重庆发行所发行
重庆印制一厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张:4.625 插页:2 字数104千
1983年4月第一版　　1983年4月第一次印刷
科技新书目 49—257　　印数：1—8,500

书号：13114·5　　定价：0.65元

内 容 提 要

本书讲述了有限群论的基本知识，内容包括：基本概念，Abel群，置换群，可解群，幂零群，超可解群，Sylow定理，密化定理，群表示论等；篇幅短，少而精。

本书博采众家之长，并根据编者多年研究和讲授群论的心得，用较简明的方式阐述有限群论的基本理论，达到了一定的深度和广度；本书还包含了编者新近的某些研究成果，如结合律Light检查法的改进，超可解群Huppert定理的初等证明及Mclain定理的推广等；具有一定的特色。

本书可作高等院校群论课程的教材，也可供数、理工作者参考之用。

前　　言

本书是为高等院校群论课程而编写的。我们在学习和讲授M. Hall著《群论》的基础上，于1980年写出初稿，并在1981及1982年两次试用之后作了两次修改。

编写本书主要参考了下列书籍：

[1] M. Hall, The Theory of Groups, Macmillan Company, New York, 1959（有中译本，裘光明译，科学出版社，1981）.

[2] H. Kurzweil, Endliche Gruppen, Springer, Berlin, 1977（有中译本，李慧陵、林家寿译，兰州大学数学系油印本，1981）.

[3] 张远达，有限群的构造，科学出版社 1982.

[4] E. Schenkman, Group Theory, D. Van Nostrand Princeton, New Jersey, 1965.

根据我们学习的体会和讲授的经验，我们想用较短的篇幅，较简明的方式阐述有限群论的基本知识，并达到一定的深度和广度。限于我们的水平，本书离此要求还远。希阅过本书的同志不吝指正。

几点说明如下：

1.本书的前五章和第六章的前两节是有限群论最基本的知识，其余章节可根据具体情况予以增删。总的说来，本书的内

察，除了个别定理外，都是有限群论的基本知识，可说是相当精简的了。

2.书［1］关于群的各种定义，本书均予列入。因主要定义已在近世代数基础中学过，而其余定义又各具特色。这样，花很短的篇幅就可以开阔学生的眼界，活跃学生的思想。

3.结合律的检查方法是很多人感兴趣的问题，本书以 Light 于1949年提出的检查法（就是《数学认识与实践》1980年 1 期37—42页上所述的"筹检法"，而"Light 法"较之"筹检法"更完善，适用范围更广泛，可参考A. H. Clifford and G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semi-groups. Vol. I, p. 7）为基础，并推广了书［1］定理1.9.1，并结合二者给出了一个更好的方法。

4.有限 Abel 群的基的存在定理，本讲义提出了一个较书［2］更简明，更直观的证法。

5.本书关于Sylow第一定理的叙述较［1］有所改善。Sylow诸定理的证明在方法上也统一起来了。本书对 Sylow 定理的证明仍采用重陪集的方式，而在讲"作用"时，作为应用又重证一遍。我们认为对于有限群论的最核心的 Sylow 定理，重复一次对学生学习是很有好处的。

6.对于 Cauchy 定理（2.2.1），本书采用目前所知的最简明的方法（J. H. Mckay, *Another proof of Cauchy's group theorem*, Amer, Math, Monthly, 66:2 (1959) 119）。由于这个证明不需 Abel 群的知识，它不但可为阐述 Abel 群的理论服务，还提供了把Sylow定理置于 Abel群理论之前的可能性。不过，本书仍按难易程度置Abel群于Sylow定理之前。

7.本书对可解群的 Sylow 定理（6.2.1）的证明，分情况时异

于书[1]，从而使论证较为简明.

8.关于超可解群的Huppert定理(7.4.11)的证明，本书采用了一个新证.它所用的知识是最初等的，它不但不用表示论的知识和Gaschütz定理，甚至可解群的Sylow定理都不必用，而且比书[1]的证明简短.

参加本书编写的还有肖勇、袁振邦、周大术、姜国贵等.

编 者

1982年6月

目　录

第一章　引　论

第二章　Abel 群

第三章 Sylow定 理

第四章 置 换 群

第五章 算子 合成列

第六章 可解群 Burnside 定理

第七章　幂零群与超可解群

第八章　群　表　示

第一章　引　论

§1.1　群的定义

每门学科都有其特定的研究对象，即都有一个确定的研究范围。这个研究范围的最一般的抽象便是集合。我们研究的目的是研究这些对象的性质和相互间的联系。对象的性质不可能孤立地加以理解，只有在联系中才能加以认识。因此对象间的相互联系便成为我们主要关心的问题。对象间相互联系的一般抽象便是映射。由此我们不难理解，为什么集合与映射成为数学最基本的两个概念。数学更关心的是这些联系规律，即映射的共同性质，因此某种映射的集合常成为数学的研究对象。

设已给一个集合$S=\{a,b,c,\cdots\}$。那么S到S内的所有映射，即集合S的所有变换又成为一个集合$\Gamma=\{\alpha,\beta,\cdots\}$。映射的乘法是$\Gamma$的一个代数运算，即$\Gamma\times\Gamma$到$\Gamma$内的一个映射。群的概念正是从$\Gamma$所满足的性质中抽象出来的。本章将论述群的定义及一些基本性质，凡在《近世代数基础》(张禾瑞著 1978 修订本，人民教育出版社) 中已讲过的，这里只略加提及，未讲过的就详细一点。

Γ对变换的乘法满足下列性质

1. 闭合律：对任意$\alpha,\beta\in\Gamma$，存在唯一的$\gamma\in\Gamma$使得

$$\alpha\beta=\gamma.$$

2. 结合律：对任意α，β，$\gamma\in\Gamma$ 均有

$$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma).$$

3. 存在单位元即 Γ 的恒等变换 1，它有性质，对任意

$$\alpha\in\Gamma$$

$$1\cdot\alpha=\alpha\cdot 1=\alpha.$$

4. α有逆元存在，即存在β使$\alpha\beta=\beta\alpha=1$的充要条件是$\alpha$是1-1变换.

1.1.1 定义（半群的定义）. 半群S是一个非空的元素集合，具有一个叫"乘法"的代数运算，满足

S_0，闭合律：对任$a,b\in S$，存在唯一的$c\in S$ 使得

$$ab=c.$$

S_1，结合律：对任$a,b,c\in S$ 均有

$$(ab)c=c(bc).$$

只满足闭合律，即只有一个乘法运算而不一定满足结合律的体系叫群胚

具有单位元的半群叫幺群. 集合S上的所有变换所成集Γ对变换乘法成功一个幺群。S 上所有 1-1 变换的集合便是群，我们叙述群的定义于下：

群是具有一个二元运算的代数系，它的定义最常见的有如下几种.

1.1.2 定义（群的第一定义） 群G是一个非空的元素集，具有一个叫"乘法"的二元运算，满足

G_0. 闭合律，对任意的a，$b\in G$，存在唯一的$c\in G$使得

$$ab=c.$$

G_1. 结合律，$(ab)c=a(bc)$，对任意的 $a,b,c\in G$.

G_2. 存在左单位元. 即存在元素$e\in G$，对任意的$a\in G$，有

$$e\cdot a=a.$$

G_3. 存在左逆元，即对任意的 $a\in G$，存在元素 $a^{-1}\in G$ 使得

$$a^{-1}a=e.$$

众所周知，群G的左单位元也是右单位元，因而是 G 的单位元，并且是唯一的。G 中元素a的左逆元也是a的右逆元，因而是a的逆元，并且是唯一的。

1.1.3 定义（群的第二定义） 群G是一个非空元素集，具有一个叫乘法的二元运算，满足

G_0. 闭合律.

G_1. 结合律.

G_4. 对任意的方程$ax=b$和 $ya=b$在G中有解，$a, b\in G$.

我们知道解的第一，第二定义是等价的，并且G_4中方程在 G 中的解唯一.

1.1.4 定义（群的第三定义） 群 G是一个非空的元素集，具有一个叫乘法的二元运算，满足

G_0. 闭合律.

G_1. 结合律.

G_5. 具有一元逆运算：对任意的 $a\in G$，存在 $a^{-1}\in G$，并且满足逆律：

$$a^{-1}(ab)=b=(ba)a^{-1}.$$

1.1.5 定理 群的第一、三定义是等价的.

证：显然适合第一定义的诸公理的任何集，必然适合第三定义的诸公理，现证其逆，设G适合第三定义，则对任意的$a, b\in G$都有

$$a^{-1}a=a^{-1}[(ab)b^{-1}]=[a^{-1}(ab)]b^{-1}=bb^{-1}.$$

在上式中，取$b=a$，得$a^{-1}a=aa^{-1}$，故对任意 $a\in G$，$a^{-1}a$ 有同一值，记$a^{-1}a=aa^{-1}=e$，$eb=(a^{-1}a)b=a^{-1}(ab)=b$. 所以$G_2$，

G_3成立。

1.1.6 定义（群的第四定义） 群G是一个非空的元素集，具有一个叫除法的二元运算，满足

L_0，对G的每一有序元素对a，b，有G的唯一确定的元素c与之对应，叫c为a除以b的商，记为 $c=a/b$。

L_1. $a/a=b/b$.

L_2. $a/(a/a)=a$.

L_3. $(a/c)/(b/c)=a/b$.

群的第四定义是将M. Hall, *The Theory of Groups*, 1959(有中译本，裘光明译，科学出版社）一书中第三定义修改而得，该书中的公理系统不独立，这里的公理系统是独立的。(参看《关于群的一个定义》，西南师范学院学报，自然科学版，1979年，1期)

令 $1=a/a$，由L_1，1与a无关，且由 L_2，有 $a/1=a$。

1.1.7 引理 令 $b^{-1}=1/b$，则有

$$1^{-1}=1; \tag{1.1.1}$$

$$1/(b/c)=c/b; \tag{1.1.2}$$

$$(b^{-1})^{-1}=b. \tag{1.1.3}$$

证 $1^{-1}=1/1=1$;

$$1/(b/c)=(c/c)/(b/c)\overset{L.3}{=}c/b;$$

$$(b^{-1})^{-1}=1/b^{-1}=1/(1/b)=b/1=b.$$

设G满足第四定义，利用法则

$$ab=a/b^{-1} \tag{1.1.4}$$

定义G的乘法运算。我们来证明

1.1.8 定理 群的第一、四定义是等价的。

证　由(1.1.4)式及L_0，G_0是成立的．记$1=a/a=b/b$，对任意的a有

$$1=a^{-1}/a^{-1}=a^{-1}(a^{-1})^{-1}=a^{-1}a,$$

$$1\cdot a=1/a^{-1}=(a^{-1})^{-1}=a,$$

于是G_2,G_3成立，并且(1.1.2)式变为

$$(1.1.5)\qquad 1(bc^{-1})^{-1}=cb^{-1} \text{ 即 } (bc^{-1})^{-1}=cb^{-1}.$$

L_2 变为

$$a/1=a1^{-1}=a.$$

L_3 变为

$$(ac^{-1})(bc^{-1})^{-1}=ab^{-1}.$$

再由(1.1.5)式得

$$(1.1.6)\qquad (ac^{-1})(cb^{-1})=ab^{-1}.$$

取$b=1$得

$$(1.1.7)\qquad (ac^{-1})c=a.$$

现对任意的x，y，z，令$a=xy$，$b=z^{-1}$，$c=y$，代入(1.1.6)得

$$[(xy)y^{-1}][y(z^{-1})^{-1}]=(xy)(z^{-1})^{-1}.$$

由(1.1.3)及(1.1.7)式便得

$$x(yz)=(xy)z,$$

即G_1成立．

反过来，设G满足第一定义，只要定义$a/b=ab^{-1}$，则易知L_0至L_3诸公理成立．定理证毕．

下面是一些关于群的最基本的概念和简单性质．

有限群与无限群　假如一个群的元素的个数是有限整数，则称此群为有限群；否则称此群为无限群．

有限群的阶　假如G是一个有限群，则称G的元的个数为G

的**阶**，记为 $|G|$.

Abel群 （交换群）．假如对于群G的任意二元a，b都有

$$ab=ba,$$

则称G为Abel群（或交换群）．

指数定律 由于群G对乘法满足结合律G_1，则G中n个元的积$a_1a_2\cdots a_n$是G的某一确定的元。特别地，对于G中n个相同的元a的积可记为

$$a^n=\overbrace{aa\cdots a}^{n\text{个}}\cdot\ n\text{是正整数}.$$

于是有指数定律．

(1.1.8) $\qquad a^na^m=a^{n+m}\cdot\ (a^n)^m=a^{nm}$

其中 n，m 为任意正整数。若令

$$a^0=1,\ a^{-n}=(a^{-1})^n,$$

则(1.1.8)式对任意整数 n，m都成立．

如果G为$Abel$ 群，则对 G中元 a，b 还有

(1.1.9) $\qquad (ab)^n=a^nb^n$.

消去律。在群G中。

若 $ab=ac$，则 $b=c$;

若 $ba=ca$，则 $b=c$.

元的阶，设 a 是群G的一个元，1 是G的单位元，能使

$$a^m=1$$

的最小正整数m称为 a 的**阶**，记为 $|a|=m$; 若这样的m 不存在，则称 a 是**无限阶**的，记为 $|a|=\infty$.

周期群 所有元素都是有限阶的群叫周期群。有限群必是周期群．

习　题

1. 验证下列的集对所指运算是否成群：

1) 整数集Z对二元运算 $a\circ b=a+b-2$；

2) 下列矩阵所成的集K对矩阵乘法：

$$a=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

2. 设群G的每一元的逆是其自身，证明G是 Abel 群.

3. 证明：在非 Abel 群中，存在元 $a,b,a\neq b$，a 与 b 均非单位元，能使 $ab=ba$。

4. 在集 S 上的两个变换 α，β 有 $\alpha\beta=\beta\alpha=1$（恒等映射）证明：$\alpha$ 是 1—1 变换．试举例说明，若仅假设 $\alpha\beta=1$，此时α不一定是 1—1 变换。

§1.2　结合律的检查法

设有限集 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，S 有一个代数运算叫乘法．其运算规则由乘法表给出，如何检查它是否满足结合律是一件较为复杂的工作．一般说来要检查 n^3 个等式．

我们来研讨如何减少检查的工作量．

1.2.1.定义　$a\in S$ 叫做S的**结合元**，如果对任意的 x，$y\in S$，均有$(xa)y=x(ay)$。