现代应用数学丛书

网络拓扑学

〔日〕近藤一夫　小野寺力男　著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

网絡拓扑学

〔日〕近藤一夫
小野寺力男 著

張 設 譯

陆志剛 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。用网絡为中心讲述一維复形的拓扑理論的应用。全书共分5章，前两章介紹网絡接續理論，第3章叙述树和反树，4、5两章介紹网絡的拓扑分析及其变換。可供数学工作者，电子学工作者参考。

現代应用数学丛书

网 絡 拓 扑 学

原书名 回路のトポロジー

原著者 〔日〕近藤一夫 小野寺力男

原出版者 岩波书店，1958

譯 者 張 設

校 者 陆 志 剛

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印張2 18/32 字数57,000

1963年7月第1版 1963年7月第1次印刷

印数 1—5,300

統一书号：13119·518

定 价：（十四）0.46元

出 版 說 明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价値。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学*	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数論*	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·測度*	河田敬义	賴英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程*	福原滿洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程*	福田武雄	穆鴻基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用*	山内恭彥等	張质賢
結晶統計与代数*	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数値計算法*	森口繁一等	閻昌齡
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩

书名	原作者	譯者
非綫性振动論*	古屋茂	吕紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論* 变形几何学	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津文一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論*	喜安善市等	陆志刚
自动控制理論*	喜安善市等	翟立林
网絡拓扑学*	近藤一夫	張設
信息論*	喜安善市等	李文清
推断統計过程論	北川敏男	刘璋温
統計分析*	森口繁一	刘璋温
試驗設計法*	增山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論*	官澤光一	張毓桥
綫性規划*	森口繁一等	刘源張
經济理論中的数学方法*	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有*者已經出版

譯 者 序

近年来，1 維复形的代数拓扑学的理論在各种实用技术問題特別是在电网絡問題上的应用产生了显著的成效。

电网絡的拓扑分析的基本原理大体上有两个要点。首先是 Kirchhoff 定律的拓扑形式的概括。如果把点电源和电路的分枝各看做 0 維和 1 維的单形，把电位、电流等等当做这些单形所附带的系数，那末在一般系数的同調群的概念下，古典的 Kirchhoff 定律无非是一种同調关系。于是解一个电网絡时，可把原来网絡中的某些部分換成同調的或者反同調的假想的元素組合，使网絡的結构簡化，便于計算。其次是用同調和反同調的对偶性来說明不同規律間的邏輯关系。这使許多問題在对偶的考察下得到解决。

除电网絡以外，跟 1 維复形的概念有着明显联系的实际問題还很多，不过电网絡問題无疑是現代拓扑学理論能够全面深入地应用的一个典型的領域，别的問題有些所牽涉的仅仅是比較直观的拓扑学原理，而有些則还不能从現代拓扑学理論找到足够有效的工具。例如桁架的应力分析問題，这里由于单形的系数是向量，相应的代数結构大大地复杂化了。要拓扑学方法在这些問題上取得满意的成績还有待于拓扑学理論本身的充实和提高。

这本“网絡的拓扑学”就是用电网絡做中心来陈述 1 維复形的拓扑学理論的应用的。抽象的拓扑学理論的这种实际应用无疑将吸引許多人的兴趣。但是，現有的拓扑学理論还沒有充分地被利用，特别是关于高維复形的理論是如此。这当然不是說明这些理論本质上脫离实际。在电磁場和基本粒子場中頻繁出現的那些高維的对偶的代数結构显然不是跟代数拓扑学的概念无关的，在这

些領域中善于运用已有的知識无疑是科学家們应尽的責任。

本书的作者和他們在日本的同行們在所謂网絡拓扑学这个研究領域中形成了一个活跃的学派，他們的兴趣側重在同調和反同調的对偶性质的闡发上。本书的編排形式也鮮明地表現了他們的风格。由于反同調理論的重大意义，本书的这个特点是值得肯定的。不过叙述上的过分簡略是不能不叫人遺憾的。第1章关于同調理論的概述很难让一个未掌握拓扑学知識的讀者領会要点。这些基本知識，讀者可以参看江澤涵譯拓扑学(商务，1950)，至于反同調的概念的詳細說明，則可参看新近出版的 P. J. Hilton 和 S. Wylie 的 Homology theory (Cambridge, 1960。有中譯本，《同調論》江澤涵等譯，上海科学技术出版社即将出版)一书。以下各章无論对基本理論或例子的叙述都显得不够詳細，特別是对一些所用到的名詞的定义沒有应有的說明。譯者在一些地方加了注解，并且改正了一些錯字。

此外，对名詞的譯法有一点声明。这里也学 Hilton-Wylie 书里的办法，采用 M. M. Постников 和 B. Г. Болтянский 的建議，把傳統的語头 “co” (共)一概改做 “contra” (反)。因此原书里的コホモロジー(cohomology)，双对鎖(cochain)，双对輪体(cocycle)，补木(cotree)等都譯为反同調，反鏈，反圈，反树等等。根据这些名詞的現有涵义，这样譯法也許是国内的拓扑学家們所許可的。

譯者对拓扑学和电工学都外行，譯得不妥当或者錯誤的地方还希望大家指正。

張設

序

拓扑学的誕生都說是因 Königsberg 的桥的問題引起的。原来,东普魯士的首府 Königsberg 市內，有七座桥架在那些夹着島屿的三汊河口附近。关于这七座桥的一笔画經过当时著名的大数学家 L. Euler(1707～1783)解說以后成了多面体理論。不过象今天这样的系統性的研究实际上还得认为起始于 G. Cantor (1879)和 H. Poincaré (1895)。最近，受拓扑学的洗礼几乎成了現代数学的特色，尤其是多才的 Poincaré 的組合拓扑学，因为是拓扑学的原动力，越发显得地位很高。現在跑到这个高峰上去穷目千里当然不是沒有意义的事。不过毕竟許多人是沒有必要完全严密地理解而且熟习拓扑学的，所以假如能够充当一座从应用数学通向实用方面的桥梁的話,本书的目的也就算达到一半了。

拓扑学是連續的几何学，是研究在一对一可逆連續变换下不变的图形性质和連續变换本身的学問。把所謂組合拓扑学的基本概念全面地总結起来的有 O. Veblen 的著作[1]，那书就是我們这些从事应用工作的人看起来也是明白易懂的。这里要談的专門是网絡拓扑学。网絡是所謂1維复形的一种組合对象，构成网絡的不仅有电工学中的电流网絡，电通网絡，磁通网絡，而且还有流速网絡，振动系統，通信网絡，继电器网絡，自动控制网絡，Markoff 过程，分子結构式等等不胜枚举。电流网絡尤其是拓扑学的好对象，依电气工程家說起来，所謂代数复形的拓扑学无非是把一向称为 Kirchhoff 定律的那个熟悉的概念加以組織推广而成的东西[2]。本书就用这方面的具体叙述当中心，其他的应用还得等以后的研究。

关于网絡的拓扑分析近年来岡田，小野寺，宮崎，Percival 等人从电工学的立場做了不少闡发，我們想稍許組織一下，在这里介紹一部分。

在工程技术上更重視的是所謂网絡构成問題。这是为了某种使用目的而設計具有相应的特定性能的电网絡等等的問題。把网絡的接續关系考慮在內的拓扑构成理論目前受到热烈注意，尤其是含有理想变压器的电流网絡的构成問題最有兴趣。此外在接点网絡，整流器网絡的构成方面考慮到拓扑性质的研究也屢見成效。不过这些都还是有待今后研究的領域，要在适宜于本丛书的程度上做簡洁的有系統的叙述还有困难。因此这里只强調一下它們的重要性。

按照邏輯順序，第 5 章的网絡变換問題介在构成問題和分析問題中間。关于变換問題最近 Kron 所提倡的分裂法 (diakoptics) 值得注意，本书記載了它的要点。

正文里所用的指标記号本来是 n 維流形論里表示几何对象量的东西，这里沒有說明，讀者不妨当作矩陣表示法看待(参考附录 1)。

我們很遺憾，多年来关心这种問題而且做了許多貢献的岡田幸雄博士沒有参加本书的执笔。此外伊理正夫在許多地方做了重大的协助，我們要向他道謝。

近藤一夫
小野寺力男

1957 年 8 月

目　录

第 1 章　网絡接續的基本概念

§ 1　作为复形的网絡

网絡由**枝**和联接枝的节点（包括孤立端和孤立点）构成，在組合拓扑学中前者叫做 **1 維单形或胞**（**1 单形**或 **1 胞**），后者叫做 **0 維单形或胞**（**0 单形**或 **0 胞**）。在一般 n 維（$n \geqslant 2$）的情况下，把所謂**凸多面体**（作为有限个 n 維 Euclid 半空間[3]-59❶的共通部分的那种有界图形）叫做 ***n* 胞形**或 ***n* 胞**。在 0 維和 1 維的情况下，胞和单形一致。为了避免混淆，以后单形这个名称尽量避免。胞形和由胞形变形而成的曲綫图形沒有区别的必要。

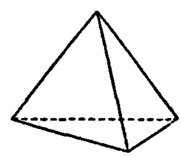

图　1.1

n 单形是 n 胞中最簡单的，它是用直綫联接 $n+1$ 个点所得到的 n 維凸多面体。例如图 1.1 中的四面体是 3 单形，构成它的边界的那四个三角形都是 2 单形，那六条棱都是 1 单形，四个頂点都是 0 单形。

若干个 n 維和較低維的胞形的集合要是有这样的性质：当一个胞形属于这个集合的时候，构成这个胞形的边界的所有的胞形也一定属于这个集合，那末称它为一个 ***n* 維几何复形或胞复形**。特别，当各胞形都是单形的时候叫做**单形复形**。例如正十二面体的表面就是由十二个 2 胞以及构成它們的边界的一共三十个 1 胞还有二十个 0 胞所組成的 2 維胞复形。正二十面体的表面是由二十个 2 单形和三十个 1 单形还有十二个 0 单形組成的 2 維单形复形。

---

❶ 右上角的号碼 [3]—59 表文献 [3] 的第 59 頁。下同。

§2　代数复形和边界(反边界)

把各个胞形形式地附上系数然后相加得到形式的和。这些和的全体形成一个綫性向量空間,各胞形是它的基底元素。特别,純粹由 p 胞組成的任意綫性組合叫 **p 維代数复形**。記做 C^p, 有时候記做 C_p, 各称为 p 維**鏈**,**反鏈**或**上代数复形**, **下代数复形**(也叫**代数复形**,**反代数复形**)。p 維代数复形全体形成一个 Abel 群(加群)。記做 $\boldsymbol{C^p}$ 或 $\boldsymbol{C_p}$, 称为 **p 鏈群**或 **p 反鏈群**(**上**或**下代数复形群**)。

特别, 如果一个上或下代数复形正好是一个 p 胞, 那末記做 x^p 或 x_p,

x_i^p 和 x_j^{p-1} 的联接状态用 $[x_i^p:x_j^{p-1}]$	x_{p+1}^k 和 x_p^l 的联接状态用 $[x_{p+1}^k:x_p^l]$

表示**联接系数**。x_i^p 和 x_j^{p-1} (x_{p+1}^k 和 x_p^l) 不联接时, 这系数是 0, 正方向联接时系数是 $+1$, 負方向联接时系数是 -1 (把各胞形取向的一种关联方式規定为正,和它相反的規定为負)。联接系数按号碼 i 和 j 或 k 和 l 記做

$$\eta_j^i(p);\quad [x_i^{p+1}:x_j^p],$$

把它們排成矩陣,叫做**第 p 个联接矩陣**。常有

$$\eta_j^i(p)\eta_k^j(p-1)\equiv\sum_j[x_i^{p+1}:x_j^p][x_j^p:x_k^{p-1}]=0 \tag{2.1}$$

这样的**基本关系**。

我們用

$\sum_j[x^p:x_j^{p-1}]x_j^{p-1}=\partial x^p \quad (+2.2)$	$\sum_k x_{p+1}^k[x_{p+1}^k:x_p]=\delta x_p \quad (-2.2)$
来定义上 p 胞 x^p 的**边界** ∂x^p.	来定义下 p 胞 x_p 的**反边界**。

这些 ∂x^p 和 δx_p 各是特殊的 $p-1$ 維鏈和 $p+1$ 維反鏈。当边界运算和反边界运算不需要区别时,写做

$Fx^p(=\partial x^p)$.　(+2.2.1)　｜　$Fx_p(=\delta x_p)$.　(−2.2.1)

对一个 C^p (或 C_p) 中的各基底元素施行运算 ∂(或 δ)，保持原来的系数，得到一个 $p-1$ 維(或 $p+1$ 維)的代数复形。这叫做 C^p (或 C_p) 的**代数的边界**(或**代数的反边界**)❶，記做

$$\partial C^p,\ FC^p \text{ 或 } \delta C_p,\ FC_p.$$

由(2.1)，关于运算 F，

$$FF=0:$$

$\partial\partial C^p=0$　(+2.3)　｜　$\delta\delta C_p=0$　(−2.3)

常成立。也就是边界(反边界)的边界(反边界)是 0 (不存在)。

边界(反边界)等于 0 的 p 維代数复形一概称做**代数的 p 圈**(**代数的 p 反圈**)❷。p 边界 ∂C^{p+1} (p 反边界 δC_{p-1}) 是它的特例。它們全体都构成 $\boldsymbol{C}^p$ ($\boldsymbol{C}_p$) 的子群，各称为 **p 圈群**(**p 反圈群**)，**p 边界群**(**p 反边界群**)。如果各記做

$\boldsymbol{Z}^p,\ \boldsymbol{F}^p,$　｜　$\boldsymbol{Z}_p,\ \boldsymbol{F}_p,$

那末显然有

$\boldsymbol{F}^p\subseteq\boldsymbol{Z}^p\subseteq\boldsymbol{C}^p$.　(+2.4)　｜　$\boldsymbol{F}_p\subseteq\boldsymbol{Z}_p\subseteq\boldsymbol{C}_p$.　(−2.4)

代数复形的系数如果取 mod 2 的整数，那末討論的是“不考虑方向的网絡接續”，如果取普通的正負整数，那末是“考虑方向的网絡接續”，如果取电流电压的数值，那末是“电流电压网絡的接續”。

§3 整同調和整反同調

系数限于正負整数和零的时候，上述的各个群記做

$\boldsymbol{C}^p_J,\ \boldsymbol{Z}^p_J,\ \boldsymbol{F}^p_J$.　｜　$\boldsymbol{C}^J_p,\ \boldsymbol{Z}^J_p,\ \boldsymbol{F}^J_p$.

商群❸

❶ 以下不一定都注明“代数的”。
❷ 以下不一定注明“代数的”。
❸ 参考本丛书弥永，杉浦：«代数学»。

$$H_J^p = Z_J^p / F_J^p \quad (+3.1) \qquad\qquad H_p^J = Z_p^J / F_p^J \quad (-3.1)$$

各称为**第 p 个整同調群**和**第 p 个整反同調群**。它們不仅是拓扑学而且也是网絡接續分析的中心概念。因此有必要熟悉它們的构造。

証明从略，上下整代数复形群 C_J^p, C_p^J 各由五种独立元素所构成的基底

$$(a_i^p,\ b_i^p,\ c_i^p,\ d_i^p,\ e_i^p) \qquad\qquad (e_p^i,\ d_p^i,\ c_p^i,\ b_p^i,\ a_p^i)$$

生成的。这基底叫做**正准基底**(或正子基)。其中

a_i^p, b_i^p, c_i^p 是 p 圈，

d_i^p, e_i^p 是非圈的 p 鏈，共 ω^p 个，

a_i^p, $t_i^p b_i^p$ (t_i^p 是整数 >1) 是 p 边界，共 ρ^p 个，

c_i^p 是非边界的 p 圈，共 R^p 个。

d_i^p 和 e_i^p 的区别在于

$$a_i^{p-1} = \partial e_i^p,\ t_i^{p-1} b_i^{p-1} = \partial d_i^p. \qquad (+3.2)$$

e_p^i, d_p^i, c_p^i 是 p 反圈，

b_p^i, a_p^i 是非反圈的 p 反鏈，共 ω_p 个，

e_p^i, $t_p^i d_p^i$ (t_p^i 是整数 >1) 是 p 反边界，共 ρ_p 个，

c_p^i 是非反边界的反圈，共 R_p 个。

b_p^i 和 a_p^i 的区别在于

$$t_{p+1}^i d_{p+1}^i = \delta b_p^i,\ e_{p+1}^i = \delta a_p^i. \qquad (-3.2)$$

上面的分类可以由第 p 个联接矩陣 $\eta_j^i(p)$ 或第 $p+1$ 个联接矩陣 $\eta_j^i(p+1)$ 的**基本变換**❶得到❷。t_p^i 或 t_i^p 各变成它們的大于1的**不变因子**。等于1的不变因子对应于自由度 a_i^p 或 e_p^i, $\eta_j^i(p)$ 中无关的独立圈个数是 $R^p(R_p)$.

显然，

❶ i) 任意两行(或列)的交換，ii) 一行(或列)的变号，iii) 任意行(或列)乘以共同的(整)数以后加到任意的另外一行(或列)去(参考普通的代数学教科书)。

❷ 詳細証明可以参考沙爱福施雷发著，江澤涵譯，拓扑学，下册，第十二章，商务印书館，1950 再版。——譯者注

$$\partial a_i^p=\partial b_i^p=\partial c_i^p=0, \quad \omega^p=\rho^{p-1}. \qquad (+3.3)$$

$$\delta e_p^i=\delta d_p^i=\delta c_p^i=0, \quad \rho_{p+1}=\omega_p. \qquad (-3.3)$$

特别，

$$\omega^0(=\rho^{-1})=0,\ \rho^n(=\omega^{n+1})=0. \qquad (+3.4)$$

$$\omega_n(=\rho_{n+1})=0,\ \rho_0(=\omega_{-1})=0. \qquad (-3.4)$$

因此 p 胞(p 反胞)的总数 $\alpha^p=\alpha_p$ 是

$$\alpha^p=\rho^p+R^p+\omega^p =\rho^p+\rho^{p-1}+R^p. \qquad (+3.5)$$

$$\alpha_p=\rho_p+R_p+\omega_p =\rho_p+\rho_{p+1}+R_p. \qquad (-3.5)$$

把 (+3.5) 的 $n+1$ 个关系式各乘上 $(-1)^p$ 以后相加，再考虑到 (+3.4)，就得出

$$\chi(K)\equiv\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\alpha^p=\sum_{p=0}^{n}(-1)^pR^p. \qquad (+3.6)$$

这是有名的 **Euler-Poincaré 公式**[3],[4]，K 表示所設的复形，$\chi(K)$ 叫做它的 **Euler-Poincaré 特征数**。

p 胞和 $p+1$ 胞，$p+1$ 反胞和 p 反胞的联接矩陣相等，所以如果考虑到边界运算使維数减少 1，反边界运算使維数增加 1，那末拿它們的阶数和不变因子来看就得到

$$\rho_{p+1}=\rho^p,\ t_{p+1}^i=t_i^p. \qquad (3.7)$$

因此由(±3.5)又得到

$$R^p=R_p. \qquad (3.8)$$

$R^p(R_p)$叫**第 p 个整 Betti 数**(**第 p 个整反 Betti 数**)，$t_i^p(t_p^i)$ 叫**第 p 个撓率数**(**第 p 个反撓率数**)。由不变因子理論，$t_i^p(t_{p+1}^i)$ 是 $t_{i+1}^p(t_{p+1}^{i+1})$ 的因子[4]-102。这些 R^p, t_i^p 是下列各个群的阶数(独立元素的个数)：

由(+3.1)，(+3.2)，对整同調群 $\dot{H}_J^p$ | 由(−3.1)，(−3.2)，对整反同調群 H_p^J

成立直和分解

$$H^p_J = B^p_J \oplus T^p_J,$$

其中 B^p_J 叫**第 p 个整 Betti 群**，T^p_J 叫**第 p 个整撓率群**，各由同构关系

$$B^p_J \cong \{c^p_i\},\ T^p_J \cong \{b^p_i\}$$

定义。前者是 R^p 阶的自由群(由 R^p 个独立自由元素生成的加群)，后者是 t^p_i 阶的循环群[3]-224, [4]-101的直和。

$$H^J_p = B^J_p \oplus T^J_p,$$

其中 B^J_p 叫**第 p 个整反 Betti 群**，T^J_p 叫**第 p 个整反撓率群**，各由同构关系

$$B^J_p \cong \{c^i_p\},\ T^J_p \cong \{d^i_p\}$$

定义。前者是 R_p 阶的自由群，后者是 t^i_p 阶的循环群[3],[4]的直和。

因为网絡本质上是1維的，如果把它当做1維复形来看，那末1維(最高維)的鏈不会是边界圈，0維(最低維)的鏈不会是反边界圈，所以

$$t^1_i = 0,\ \ t^i_0 = 0,$$

而且因为0維边界圈只有那些相連的枝的两端，所以

$$t^0_i = t^i_1 = 0,$$

也就是撓率数和反撓率数都等于0。因此只要考虑 Betti 群和反 Betti 群就行了(参考下一节)。

由于不相連的两点不能組成0边界，我們知道絕緣的部分(拓扑学中的所謂成分)的个数等于 c^0_i。也就是第0个整 Betti 数 R^0 至多等于絕緣的部分的个数。同时 R^1 也就在上面的意义下定义了所謂**独立閉路**的个数。

§1中提到的2单形或正十二面体、正二十面体等的表面是联接的2維复形，所以 $R^0=1$，而且 c^2_i 只有一个，即它們的整个表面，所以 $R^2=1$，又閉路是2胞的集合的边界，所以 $R^1=0$，因此撓率群是空的。所以 Euler-Poincaré 特征数是

$$\chi(K) \equiv R^2 - R^1 + R^0 = R_2 - R_1 + R_0 = 2. \qquad (\pm 3.9)$$

如果写成 $\alpha^0 = V$，$\alpha^1 = E$，$\alpha^2 = F$，那末

$$V-E+F=2. \qquad (+3.9.1)$$

这就是所謂**Euler的多面体公式**,滿足这公式的多面体叫**Euler多面体**,跟球面**同胚**[3]。

§4 独立接續❶,节点,枝,閉路(面),閉面(室)

在电工学里,所謂閉路意思是明白的,不过这里我們定义如下。

如果$z^1=\sum\limits_i x_i^1$是1維圈,z^1的任何眞子集都不是1維圈,那末說z^1是**閉路**。同样,如果$z^2=\sum\limits_i x_i^2$是2維圈,z^2的任何眞子集都不是2維圈,那末叫z^2做**閉面**。同样可定义一般的**p閉路**。

如果把一个网絡中的一个閉路用面張滿,那末就产生一个以这閉路当边界的2維胞。如果一些这样的2維胞构成一个閉面,那末又可以造一个用这閉面当边界的3維胞。一般,**当$p\geqslant 1$的时候,p維閉路总可以用一个拿它当边界的$p+1$維胞来張滿**[5]-179。从一个复形出发,用这样方式增加維数,造成一个其中所有的p維閉路($p\geqslant 1$)从而所有的p維圈都成为边界的复形时,这个所得到的复形中最高維的边界圈不存在(假如有的話,还可以再提高一維)。至于0維,仅仅一点就是一个圈,要考虑以它为边界的1維胞是不可能的。

在网絡物理中,把1維当做中心而对比0維和2維的这样一种对偶敍述方式是方便的,所以我們先不把2圈(閉面)边界化,而把我們的对象看做2維复形,把它的各种要素用表4.1所列的名字来称呼❷。

---

❶ 独立接續就是絕緣的部分,也就是成分。作者用到这名詞的时候都沒有下定义。这里先代注明。——譯者注

❷ 这里为了方便只在1維的情形下称星形。