北京大学、
中国人民大学等
高校名师联手推出

HZ BOOKS 华章教育

本科生数学题库

（基础篇）

微积分习题集

严守权 编著

数学

机械工业出版社
China Machine Press

本科生数学题库

（基础篇）

微积分习题集

严守权 编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题集(基础篇)/严守权编著. -北京:机械工业出版社，2003.1
(本科生数学题库)
ISBN 7-111-11475-2

Ⅰ.微… Ⅱ.严… Ⅲ.微积分—高等学校—习题 Ⅳ.0172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 108682 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
责任编辑：石会敏
北京第二外国语学院印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2003 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 18.5 印张
定 价：25.00 元

出版前言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研数学题库”、“考研历年真题详解与考点分析”、“本科生数学题库”、“考研复习指导与典型例题分析”等共16本将陆续面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

本套丛书体系明晰、内容精练

在“考研数学题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。

在“考研历年真题详解与考点分析”中，也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计四本。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析，使考生看后能紧密结合实战，安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序，而是分门别类娓娓道来。

“考研复习指导与典型例题分析”同样分为四本。该系列注重基本概念、基本技能，是考试大纲的教材而非教学大纲的教材，为考生节省了时间。

“本科生数学题库”包括《高等数学习题集(基础篇)》、《微积分习题集(基础篇)》、《线性代数习题集(基础篇)》、《概率论与数理统计习题集(基础篇)》。该系列紧密结合教材，是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习，掌握解题方法与精髓，本书所选的题目打破过去习题集的形式，将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要，也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士学位的考生开拓

思路,更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法,培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力,并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心,以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们,感谢他们付出的辛勤劳动。同时,欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2002年3月

目 录

第一章　函　　数

一、内 容 提 要

实数及其几何表示；实数的绝对值，绝对值的基本性质，绝对值不等式；区间与邻域的概念.

函数的概念与表示法，函数定义域的求法.

函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性.

反函数的定义及其图形，反三角函数及其主值，复合函数的定义，分段函数的概念及其图形特征.

基本初等函数的定义、定义域、值域及其图形. 初等函数的定义.

经济变量间的数量关系 —— 经济函数；总成本函数、总收入函数、总利润函数、需求函数、供给函数等.

二、习　　题

(一) 填空题

1. 数轴上与点 $x=1$ 的距离大于与点 $x=-5$ 的距离的点的集合是________.

2. $|1-x|^{2x^2-7x+3}<1$ 的解集是________.

3. 已知 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$，则 $f(x)=$ ________，其定义域为________.

4. 已知 $f(x^2-1)=\lg\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f(\varphi(x))=\lg x$，则 $\varphi(x)=$ ________.

5. 设 $f(x)$ 满足等式 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$，则 $f(x)=$ ________.

6. 设 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$，且 $f(f(x))=x$，则 $a=$ ________.

7. 设 $f(x)=(2|x+1|-|3-x|)x$，则 $f(x)$ 可化为分段函数________.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ 2x-1 & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-x^2 & x\leqslant 1\\ \log_2(1+x) & x>1\end{cases}$, 则 $f(g(x))=$ ________, $g(f(x))=$ ________, $f(x)\cdot g(x)=$ ________.

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且 $f(x+2)=f(x)$,若当 $-1\leqslant x<1$ 时, $f(x)=\begin{cases}x^2 & -1\leqslant x<0\\ 0 & 0\leqslant x<1\end{cases}$,则当 $2\leqslant x<4$ 时, $f(x)=$ ________.

10. 设 $f(x)$ 对一切正值 x,y, 恒有 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 则 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=$ ________.

11. 函数 $y=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ 与函数 $y=g(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称,则 $g(x)=$ ________.

12. 已知函数 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$ 在区间 $(0,1]$ 上恒正,则 a 的取值范围为 ________.

13. 设 $f^{-1}(x)=\begin{cases}\log_2(x+1) & -1<x<1\\ \sqrt{x} & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x & x>16\end{cases}$,则 $f(x)$ 的值域为________.

14. 函数 $y=\arcsin(x^2-2x-3)$ 的单调减区间为________.

(二) 选择题

1. 下列函数对中,两函数相等的是(   ).

A. $y=x$ 与 $y=2^{\log_2 x}$　　B. $y=x$ 与 $y=\arctan(\tan x)$

C. $y=\lg(3-x)-\lg(x-2)$ 与 $y=\lg\frac{3-x}{x-2}$　　D. $y=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$ 与 $y=\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$

2. 设 $f(x)=\frac{x^2+2kx}{kx^2+2kx+3}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,则 k 的取值范围是(   ).

A. $0<k<3$　　B. $0\leqslant k<3$

C. $k>3$　　D. $k<0$ 或 $k>3$

3. 设 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$,则有(   ).

A. $f(-2-x)=-2-f(x)$　　B. $f(-x)=f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

C. $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$　　D. $f(f(x))=-x$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ 2x & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -2x & x<0\end{cases}$,则 $x\leqslant 0$ 时, $f(g(x))=$ (   ).

A. $2x$　　B. x^2　　C. $4x^2$　　D. $-4x^2$

5. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在反函数 $x=\varphi(y)$，则(　　).

A. $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调

B. 曲线 $y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$ 关于直线 $y=x$ 对称

C. 对于给定的 $y_0\in z_f$，方程 $f(x)=y_0$ 有惟一解 x_0

D. 若 $y=f(x)$ 单调增，则 $y=\varphi(x)$ 单调减

6. 设 $f(x)=\log_a x$ 在 $(1,a)$ 上有定义，则(　　).

A. $f(f(x))<f(x^2)<[f(x)]^2$　　B. $f(f(x))<[f(x)]^2<f(x^2)$

C. $f(x^2)<f(f(x))<[f(x)]^2$　　D. $[f(x)]^2<f(x^2)<f(f(x))$

7. 设 $f(x),g(x)$ 均在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增，则(　　)也在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增.

A. $f(g(-x))$　　B. $f(x)g(x)$

C. $f^3(x)$　　D. $\dfrac{1}{f(x)}$

8. 函数 $y=2^{\sin x}\log_a(2x-1)(0<a<1)$ 在区间(　　)有界.

A. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D. $(1,2)$

9. 设 $f(x)=\log_3\dfrac{1-x}{1+x}$，$g(x)=x^3$，则(　　)为偶函数.

A. $f(g(x))$　　B. $f(x)\cdot g(x)$

C. $\begin{cases}f(x) & |x|<1\\ g(x) & |x|\geqslant 1\end{cases}$　　D. $g(f(x))$

10. 设 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x & -\pi\leqslant x<0\\ \cos x+x & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$，在定义域内 $f(x)$ 为(　　).

A. 无界函数　　B. 偶函数　　C. 单调函数　　D. 周期函数

12. 下列函数中，不为初等函数的是(　　).

A. $y=\arcsin(x^2-2x+3)$　　B. $y=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ |x|<1$

C. $y=\begin{cases}x+1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$　　D. $y=|x+1|^{\sin x}$

(三) 解答题

1. 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求函数 $\varphi(x)$，并给出 $\varphi(x+1)+\varphi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x+1 & x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 1-x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$，求函数 $f(g(x))$ 的解析式.

3. 设 $f(x)=\min\{1,x,x^2-x\}$,将 $f(x)$ 表为分段函数形式,并画出曲线 $y=f(x)$ 的图形.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足等式 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$,且 $f(x)=x$, $x\in[0,\pi)$,给出 $f(x)$ 在 $[\pi,3\pi)$ 上的表达式.

5. 求出函数 $y=\begin{cases}x & x<1\\ x^2 & 1\leqslant x<4\\ 2^x & x\geqslant 4\end{cases}$ 的反函数表达式.

6. 求函数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $|x|\geqslant 1$ 时的反函数.

7. 求函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

8. 已知 $f(x)$ 是以 2 为周期函数,在 $[0,2)$ 内, $f(x)=x^3$,求 $f(x)$ 在 $[0,6]$ 内的表达式.

9. 求下列函数的值域,并说明它们是否为有界函数.

(1) $y=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+15$

(2) $y=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{x-3}$

10. 设 $y=x-[x]$,其中 $y=[x]$ 为取整函数,讨论该函数的对称性、有界性、单调性和周期性,并利用线段相加法,画出函数曲线图.

11. 某学生宿舍与教室位置分布简图如图 1-1 所示,现有一同学计划用 10 分钟从宿舍沿马路步行到教室上课,当行至 5 分钟时,发现未带课本,又折返小跑回宿舍取书,再在计划时间内赶到教室,并假设所有行走均为匀速的. 试给出该生在这个过程中与宿舍距离和时间 t 的函数关系.

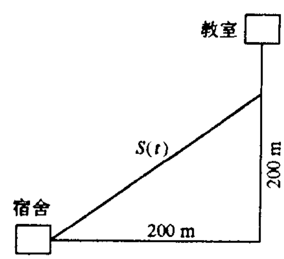

图 1-1

12. 某商品需求函数为 $X_d=7000-50P$,当所生产的商品数 x 超过 1000 时,总成本函数为 $C(x)=20000+25x$,试确定刚刚够保本的价格.

13. 按现生产安排,某产品的可变成本是每单位 2 元,生产的固定成本为 100 元,技术人员又提出两种生产方案,有关成本数据如下:

方案 Ⅰ: 固定成本 400 元,可变成本每单位 1 元;

方案 Ⅱ: 固定成本 225 元,可变成本每单位 1.5 元.

为使总成本最小,试确定三个方案分别在什么条件为最佳.

14. 设某商店以每件 a 元的价格出售某种商品,可销售 1000 件,若在此基础上降价 10%,最多可再售出 300 件,又知该商品每件进价为 b 元,写出销售该商品的利润与进货数 x 的函数关系.

15. 设某商品的需求函数为 $5P+2X_d=200$,供给函数为 $P=\dfrac{4}{5}X_s+10$(价格单位: 元,

商品单位：万件）

(1) 求均衡价格和均衡需求量；

(2) 如每件商品征税 6 元，求均衡价格和均衡需求量.

(3) 如无税情况下需求量增加 2 万件，政府对每单位商品应给生产者多少津贴？

16．某网络公司上网计时收费规定为，若每天上网不超过 2 个小时，每小时收费 2 元，若每天上网在 2 至 4 小时（不含 2 小时），每小时收费 1.5 元，若每天上网超过 4 小时，每小时收费 1 元，全月最高收费 300 元封顶，设小王每天上网时间相同，试给出小王每天上网费用与上网时间的函数关系.（每月按 30 天计算）

三、习题解答与分析

(一) 填空题

1．答案是：$(-\infty, -2)$

分析　即解不等式 $|x-1|>|x+5|$，$x=-5$ 和 $x=1$ 在数轴等距离点为 $x=-2$，显然在 $x=-2$ 左端各点均满足条件，故本题答案为 $(-\infty, -2)$.

2．答案是：$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 或 $(2,3)$

分析　即解不等式 $(2x^2-7x+3)\lg|1-x|<0$，即有

$$\begin{cases}|x-1|>1\\2x^2-7x+3<0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}0<|x-1|<1\\2x^2-7x+3>0\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x<0\text{ 或 }x>2\\\frac{1}{2}<x<3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<2\text{ 且 }x\neq 1\\x>3\text{ 或 }x<\frac{1}{2}\end{cases}$，从而解得 $2<x<3$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$.

3．答案是：$\frac{1}{x^2+2}$

分析　对原式整理，有

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

从而知 $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$.

4．答案是：$\frac{x+1}{x-1}$

分析　由 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2-1+1}{x^2-1-1}$，知 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$，从而

$$f(\varphi(x)) = \ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$$

解得 $\varphi(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

5. 答案是: $\dfrac{x}{x+1}$

分析 由 x 与 $\dfrac{1}{x}$ 为互为倒数关系, 于是将式中 x 与 $\dfrac{1}{x}$ 替换有 $f(x) + 2x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2x^2+x}{x+1}$, 与原方程联立方程组, 从而解得 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

6. 答案是: -3

分析 由 $f(f(x)) = \dfrac{a\left(\dfrac{ax}{2x+3}\right)}{2\left(\dfrac{ax}{2x+3}\right)+3} = \dfrac{a^2x}{(2a+6)x+9} = x$, 解得 $a = -3$.

7. 答案是: $f(x) = \begin{cases} -x^2-5x & x<-1 \\ 3x^2-x & -1\leqslant x<3 \\ x^2+5x & x\geqslant 3 \end{cases}$

分析 当 $x<-1$ 时, $f(x) = -x(2x+2-x+3) = -x^2-5x$.
当 $-1\leqslant x<3$ 时, $f(x) = x(2x+2-3+x) = 3x^2-x$;
当 $x\geqslant 3$ 时, $f(x) = x(2x+2-x+3) = x^2+5x$, 因此

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-5x & x<-1 \\ 3x^2-x & -1\leqslant x<3 \\ x^2+5x & x\geqslant 3 \end{cases}$$

8. 答案是: $\begin{cases} \log_2^2(1+x) & x>1 \text{ 或 } x=0 \\ -2x^2-1 & x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_2(1+x^2) & x>1 \\ -x^4 & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ -(2x-1)^2 & x<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2\log_2(1+x) & x>1 \\ -x^4 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -2x^3+x^2 & x<0 \end{cases}$

分析 分段函数分段处理. 当 $x>1$ 时, $g(x)>0$, 有 $f(g(x)) = \log_2^2(1+x)$; 当 $x\leqslant 1$ 时, 且 $x\neq 0$ 时, $g(x)<0$, 有 $f(g(x)) = -2x^2-1$; 当 $x=0$ 时, $g(0)=0$, $f(g(0))=0$. 从而有

$$f(g(x)) = \begin{cases} \log_2^2(1+x) & x>1 \text{ 或 } x=0 \\ -2x^2-1 & x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq 0 \end{cases}$$

又当 $x>1$ 时，$f(x)=x^2>1$，有 $g(f(x))=\log_2(1+x^2)$；当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant 1$，有 $g(f(x))=-x^4$；当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，有 $g(f(x))=-(2x-1)^2$，从而有

$$g(f(x))=\begin{cases}\log_2(1+x^2) & x>1\\ -x^4 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -(2x-1)^2 & x<0\end{cases}$$

分段函数对应段相乘，有 $f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}x^2\log_2(1+x) & x>1\\ -x^4 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2x^3+x^2 & x<0\end{cases}$

9. 答案是：$\begin{cases}0 & 2\leqslant x<3\\ x^2 & 3\leqslant x<4\end{cases}$

分析 由题意，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，于是，当 $2\leqslant x<3$，即 $0\leqslant x-2<1$ 时，有

$$f(x)=f(x-2)=0$$

当 $3\leqslant x<4$，即 $-1\leqslant x-4\leqslant 0$ 时，有 $f(x)=f(x-4)=x^2$，从而有

$$f(x)=\begin{cases}0 & 2\leqslant x<3\\ x^2 & 3\leqslant x<4\end{cases}$$

10. 答案是：0

分析 令 $x=y=1$，有 $f(1)=0$，再令 $y=\dfrac{1}{x}$ 代入等式，有

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)=0$$

11. 答案是：$y=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$，$D_f=(-1,1)$

分析 依题意，即求已知函数的反函数，求解原曲线方程得 $x=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{1+y}{1-y}$，从而知，所求曲线方程为 $y=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$，且定义域为 $(-1,1)$.

12. 答案是：$-8<a\leqslant 4$

分析 $a=0$ 时，$y=4x>0$ 满足条件．当 $a\neq 0$ 时，可借助直观求解，如图 1-2．当 $a>0$ 时，要使 $f(x)>0$，只要曲线与 x 轴交点 $x^*=\dfrac{2(a-4)}{3a}\leqslant 0$；当 $a<0$ 时，要使 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上为正，必须 $x^*=\dfrac{2(a-4)}{3a}>1$，求解不等式可得 $-8<a\leqslant 4$.

13. 答案是：$(-1,+\infty)$

分析 $f(x)$ 的值域即为 $f^{-1}(x)$ 的定义域．由 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，故有答案 $(-1,+\infty)$.

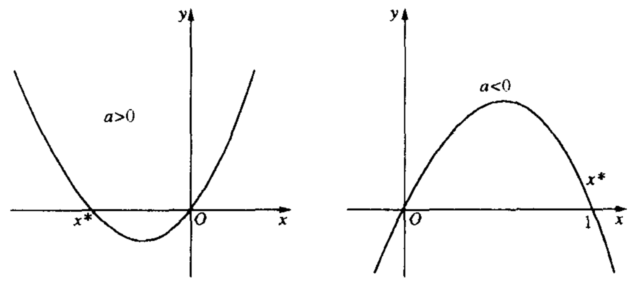

图 1-2

14. 答案是:$[1-\sqrt{5},1-\sqrt{3}]$

分析 因 $y=\arcsin u$ 单调增,要找 $y=\arcsin(x^2-2x-3)$ 单调减区间只要找 x^2-2x-3 单调减区间,设为$[x_1,x_2]$,其中 x_1,x_2 分别由方程 $x^2-2x-3=1$ 和 $x^2-2x-3=-1$ 解得,即 $x_1=1-\sqrt{5},x_2=1-\sqrt{3}$.

(二) 选择题

1. 答案是:C

分析 两函数定义域相同且对应法则相同则相等,经验证,仅 C 中两函数定义域均为 $(2,3)$,且对应法则相同,故选 C.

2. 答案是:B

分析 依题意,即求得 $kx^2+2kx+3\neq 0$ 的 k 的取值范围,即有

$$\begin{cases}k>0\\kx^2+2kx+3>0\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}k<0\\kx^2+2kx+3<0\end{cases}\quad 或 \quad k=0$$

解得 $0\leqslant k<3$.

3. 答案是:A

分析 令 $u=\dfrac{1-x}{1+x}$,得 $x=\dfrac{1-u}{1+u}$,于是 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,从而有

$$f(-2-x)=-\frac{3+x}{1+x}=-2-\frac{1-x}{1+x}=-2-f(x)$$

因此选 A.

4. 答案是:C

分析 当 $x\leqslant 0$ 时,$g(x)=-2x\geqslant 0$,所以 $f(g(x))=(-2x)^2=4x^2$,故取 C.

5. 答案是:C

分析 $y=f(x)$ 存在反函数的充要条件是函数的定义域与值域之间存在一一对应关系. $f(x)$ 单调仅为充分条件而非必要条件. $y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$ 在直观上表示同一条曲线,变量替换后方有 $y=f(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称,且由几何直观知,$y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 有相同的单调性. 因此仅 C 符合题意,选之.

6. 答案是：B

分析　依题意 $a>1$，$f(x)$ 在 $(1,a)$ 上单调增，有

$$0=f(1)<f(x)=\log_a x<f(a)=1<x^2$$

进而有
$$f(f(x))<f(1)=0<[f(x)]^2<2f(x)=f(x^2)$$

故取 B.

7. 答案是：C

分析　由单调函数复合后的性质知 $g(-x)$ 为单调减函数，从而 $f(g(-x))$ 仍为单调减；两函数单调增但乘积未必单调增. 见反例，$y=x$ 单调增，但 $y=x^2$ 非单调；$\dfrac{1}{f(-x)}$ 仅在 $f(x)\neq 0$ 的条件下单调增. 因此仅 C 符合题意，选之.

8. 答案是：D

分析　曲线 $y=2^{\sin x}\log_a(2x-1)$ 的定义域边点 $x=\dfrac{1}{2}$ 为无界点，又

$$\lim_{x\to+\infty}2^{\sin x}\log_a(2x-1)=+\infty$$

由于 A, B, C 选项都与上述有关，故仅 D 正确，选之.

9. 答案是：B

分析　函数 $f(x)$，$g(x)$ 均为奇函数，则两函数复合 $f(g(x))$ 或 $g(f(x))$ 仍为奇函数，C 的各分段区间均为奇函数，故 C 也为奇函数，因此取 $f(x)g(x)$ 为偶函数.

10. 答案是：B

分析　至少 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是函数的无界点，知 $f(x)$ 无界，故取 B. 本题也可用排除法，由于 x 非周期函数，因此 $f(x)$ 也非周期函数，又 $\tan x$，$\sin x$ 非单调，$f(x)\neq f(-x)$ 知 $f(x)$ 非单调也非偶函数，从而知仅 B 正确.

11. 答案是：B

分析　函数定义域是对称有限区间，有界，内含非单调函数 $\cos x$ 和非周期函数 x，所以 $f(x)$ 非单调也非周期函数. 由排除法，仅 B 正确，故取 B. 本题也可由：当 $x\in[-\pi,0)$ 时，$f(x)=\cos x-x$ 也同时有 $-x\in(0,\pi]$，$f(-x)=\cos(-x)+(-x)=\cos x-x$，$f(x)=f(-x)$，类似地当 $x\in(0,\pi]$ 时，也可推出 $f(x)=f(-x)$，直接判定 B.

12. 答案是：A

分析　由于 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geqslant 2$，知 $\arcsin(x^2-2x+3)$ 不能构成函数关系，故 A 非初等函数. 而在 $|x|<1$ 时，$x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 与 $\dfrac{x}{1-x}$ 等价，为初等函数；

$$y=\begin{cases}x+1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

和 $|x+1|^{\sin x}$ 分别等价于函数 $y=2-|x-1|=2-\sqrt{(x-1)^2}$，$y=2^{\frac{1}{2}\sin x\log_2(x+1)^2}$，因此也

都是初等函数.

(三) 解答题

1. **分析** 由已知, $f(\varphi(x)) = \sin\varphi(x) = 1 - x^2$, 解得

$$\varphi(x) = 2k\pi + \arcsin(1 - x^2) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

且 $D_\varphi = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 可进一步给出 $\varphi(x+1) + \varphi\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 的定义域.

解 由已知, $f(\varphi(x)) = \sin\varphi(x) = 1 - x^2$, 反解得

$$\varphi(x) = 2k\pi + \arcsin(1 - x^2) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

且定义域为 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

进而由 $\begin{cases} |x+1| \leqslant \sqrt{2} \\ \left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \sqrt{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{1}{2} - \sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2} - 1$, 即 $\varphi(x+1) + \varphi\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2} - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1\right]$.

2. **分析** 分段函数分段处理, 应分 $x < 0, 0 \leqslant x < 1, 1 \leqslant x$ 三种情况讨论复合.

解 当 $x < 0$ 时, $g(x) = 1 > 0$, 于是有 $f(g(x)) = 2$;

当 $0 \leqslant x < 1$ 时, $g(x) \geqslant 0$, 有 $f(g(x)) = 1 + (1 - x^2) = 2 - x^2$;

当 $1 \leqslant x$ 时, $g(x) < 0$, 有 $f(g(x)) = 1$.

综上讨论, 有

$$f(g(x)) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2 - x^2 & 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & 1 \leqslant x \end{cases}$$

3. **分析** 本题用图解法最为简便. 如图 1-3, 三条曲线最下方段构成 $f(x)$.

解 如图 1-3 示, 曲线 $y = 1, y = x, y = x^2 - x$ 的三个交点为 $x = 0, x = 2$, 且当 $x < 0$ 时, $y = x$ 在最下方; 当 $0 \leqslant x < 2$ 时, $y = x^2 - x$ 在最下方; 当 $2 \leqslant x$ 时, $y = 1$ 在最下方, 因此

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 - x & 0 \leqslant x < 2 \\ 1 & 2 \leqslant x \end{cases}$$

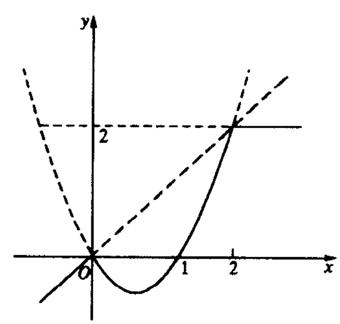

图 1-3

4. **分析** 通过变量平移变换求解问题.

解 由 $f(x) = x, 0 \leqslant x < \pi$, 于是, 当 $\pi \leqslant x < 2\pi$, 即 $0 \leqslant x - \pi < \pi$ 时, 有 $f(x - \pi) = x - \pi$, 从而

$$f(x) = f(x - \pi) + \sin x = x - \pi + \sin x$$