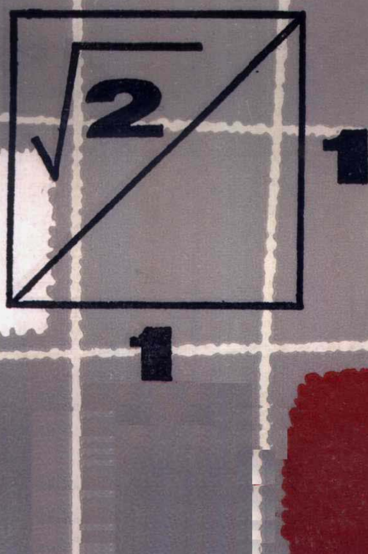
从$\sqrt{2}$谈起

ZONG $\sqrt{2}$ TANQI



海教育出版社

中学生文库

从 $\sqrt{2}$ 谈起

张景中

上海教育出版社

内容提要

本书从中学生所熟悉的无理数$\sqrt{2}$谈起，比较系统地介绍有理数、无理数以及实数系统的知识．通俗地回答了中学生会感兴趣而在课本上又找不到答案的一些问题，如，有理数多还是无理数多？无理数都是什么样的数？怎样证明一个数是无理数？如何计算无理数的值？此外还讲述了一些重要的无理数，如$\sqrt{2}$、黄金数、π和e的有趣的性质、重要的应用和有关的历史；浅近地阐述了有关实数的知识及极限理论初步；最后，以简单综述人类认识数的发展过程而结束。

全书分为十节，一至八节附有练习题。书末提供了练习题解答或提示。

中学生文库　从$\sqrt{2}$谈起

张景中　上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
江苏溧阳印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行
开本787×1092　1/32　印张 4　字数83,000
1985年8月第1版　1986年8月第2次印刷
印数 16,501—56,500本

统一书号：7150·3511　定价：0.49元

写在前面

这本书的名字叫《从 $\sqrt{2}$ 谈起》。

但是，读者更希望马上知道，在谈起之后，向哪里谈过去，谈到什么地方为止？

$\sqrt{2}$ 是人们最早认识的无理数之一．也是中学生最早知道的最简单的无理数．从 $\sqrt{2}$ 谈起，自然会谈到其它的无理数．比如：除了 $\sqrt{2}$，还有哪些常见的无理数？怎样证明一个数是无理数？无理数都可以用根式表示吗？是无理数多还是有理数多？

$\sqrt{2}=1.414\cdots$．它是无穷不循环小数．怎样把它算得更精确一些呢？会算 $\sqrt{2}$，会不会算 $\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[5]{2}$ 呢？$\sqrt{2}$ 是方程 $x^2-2=0$ 的根，那末，更高次代数方程的根怎么计算呢？能不能利用初中代数里学过的知识，计算高次方程的根呢？

除了 $\sqrt{2}$ 之外，还有哪些又古老又常用的无理数呢？我们将介绍一下和"黄金分割"有关的"无理数三兄弟"．关于它们，有着耐人寻味的故事和游戏．

最后，还将简单地谈谈你所熟悉的 π 和不大熟悉的 e，以及实数系的最基本的性质．书中用到的知识，大部分是初中里学过的．读者既可以从头看起，也可以直接看中间的几节．

目录 ZHONG XUE SHENG WENKU

一、从 $\sqrt{2}$ 谈起

（$\sqrt{2}$ 是人类最早发现的无理数之一．早在公元前500年左右，人们就会证明 $\sqrt{2}$ 是无理数了．）

边长为1的正方形，它的对角线的长度是多少？

如果你已经学过勾股定理，马上就能算出它的长度是 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$．（图1）

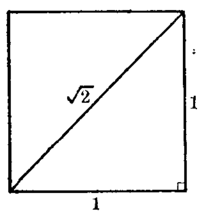


图 1

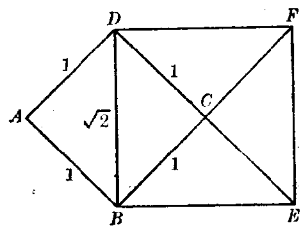


图 2

不用勾股定理，也能算出这个对角线的长．如图2所示，正方形 $ABCD$ 边长为1，面积为1．而正方形 $BEFD$ 的面积是 $ABCD$ 面积的两倍，也就是说，

$$\overline{BD}^2=2,$$

于是，

$$\overline{BD}=\sqrt{2}.$$

显然，若正方形边长为 a，则对角线长为 $\sqrt{2}a$．即对角线长是边长的 $\sqrt{2}$ 倍．

我们知道，记号 $\sqrt{2}$ 代表这样的一个正数 x，它的平方

等于2. 换句话说，$\sqrt{2}$ 是二次方程 $x^2-2=0$ 的正根，通常把它叫做2的算术平方根.

很明显，$\sqrt{2}$ 不是整数. 因为1的平方比2小，2的平方又比2大，所以 $\sqrt{2}$ 应当在1与2之间.

在1与2之间，分数多得很. 要多少，有多少，而且看来是密密麻麻地拥挤在一起. 那么，其中有没有那么一个分数，它自乘之后恰巧等于2呢？看来似乎应当有. 可是，你找几个试试看？你一定找不到. 不是太大，就是太小. 尽管能找到平方很接近2的分数，但要想恰巧等于2，却难了.

但是，在1和2之间的分数既然是无穷多个，那就不可能一个一个地都试一下. 既是不能都试一下，又怎能断定没有一个分数，它的平方等于2呢？

这个问题，早在两千多年前就解决了. 可以用逻辑推理的方法来证明这个

〔命题1〕 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

证法一 用反证法证明. 先假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，如果从这一假设出发推出矛盾，便说明这个假设错了，即 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

若 $\sqrt{2}$ 是有理数. 由于有理数只包含正、负整数、正、负分数和0，而 $\sqrt{2}>0$，故必然有两个正整数 n、m，使

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m},$$

而且 n 和 m 没有大于1的公约数，即互质.

根据 $\sqrt{2}$ 的定义，有

$$\frac{n^2}{m^2}=(\sqrt{2})^2=2, \tag{1}$$

也就是

$$n^2=2m^2. \tag{2}$$

这个式子右端是偶数，故左端的 n^2 也是偶数，因而 n 是偶数，$n=2k$，于是得 $4k^2=2m^2$，即 $2k^2=m^2$. 这推出 m 是偶数，这说明 n 和 m 有大于 1 的公约数，与假设相矛盾.

这个证明还可以说得更简单些：不必假定 n 和 m 没有大于 1 的公约数。直接观察(2)式，它的右端所含 2 的因数有奇数个，而左端含 2 的因数又为偶数个，这就有了矛盾.

证法二 仍用反证法证明. 设 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$，n 和 m 都是正整数，而且没有大于 1 的公约数. 由(2)式

$$n^2=2m^2,$$

在十进制下，整数的平方的个位数字只能是 0、1、4、5、6、9 中之一，二倍之后只能是 0、2、8 之一. 所以，(2)式左端的个位数字是 0、1、4、5、6、9 中之一，而右端末位数字是 0、2、8 中之一。即两端的个位都是 0，这说明 n 和 m 有公因子 5，于是推出了矛盾.

在数学中，反证法很有用. 尤其是要证明一个数是无理数——不是有理数时，更少不了用反证法. 上面介绍的第一个证法，曾出现在两千多年前希腊几何学家欧几里得(Euclid，公元前 300 年左右)所写的《几何原本》一书中. 这说明早在两千多年前，人们就知道 $\sqrt{2}$ 不是有理数，而且会用反证法来进行逻辑推理了.

《几何原本》这部名著，是欧几里得总结、整理了当时他所

收集到的资料而写成的．并非都是他一人的研究成果．就拿“$\sqrt{2}$不是有理数”来说，这个事实是比欧几里得更早一些的毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前500年左右)学派的人们发现的．

毕达哥拉斯学派有一个基本观点，叫做“万物皆数”．在他们的心目中，数就只有正整数，而且正整数也就是组成物质的基本粒子——原子．因此他们认为，一切量都可以用整数或整数的比来表示．他们觉得，一条线段就好比一串珍珠，这珍珠就是一个一个的点，不过又小又多罢了．按这种看法，两条线段长度之比，就应当是它们各自包含的小“珍珠”的个数之比，当然应当是可以用整数之比来表示的了．

据说，毕达哥拉斯学派的一个青年人，名叫希勃索斯(Hippasus，公元前五世纪左右)的，第一个发现了正方形的边和对角线长度之比不能用整数之比来表示．用现在的话说，就是$\sqrt{2}$不是有理数．这个发现直接和毕达哥拉斯学派的错误信条“万物皆数”相抵触．使这个学派的许多人大为惶恐和恼怒．据传说，希勃索斯在海船上向学派的其它成员讲述这个发现时，受到了激烈的反对．由于他坚持自己所发现的真理，竟被抛入海中淹死了．

但是，真理是不会被永远淹没的．随着数学的向前发展，无理数终于在人们心目中取得了合法的地位，被广泛使用于科学研究、技术应用和人们的社会生活之中．

顺便提一下，用“$\sqrt{\ }$”来表示平方根，是在十六世纪由解析几何的创始人笛卡儿(Descartes，1596—1650)首先采用的．那时，离$\sqrt{2}$的被发现已有两千年，不少数学家已开始承认象$\sqrt{2}$这类不能用分数表示的数了．

至于把整数和分数叫做“有理”数，据有人考证，倒是由于一开始翻译时的讹误．原来，“有理数”中的“有理”一词，英文是Rational．这个词本来有两个含义，其一是“比”，其二是“合理”．照数学上的原义，分数可以表成两整数之比，把“有理数”叫做“比数”是很确切的．可是，日本学者在十九世纪翻译西方的数学书时，把这个词译成了“有理数”．①日本语言中是用了很多汉字的．后来，在中日文化交流中，中国又从日本引进了“有理数”和“无理数”这两个词，长期应用到现在，没法改，也不必改了．

练 习 题 一

1．若 a、b 是两个有理数，试证明一定有一个有理数 x，满足 $a<x<b$．

2．若 a 是有理数，b 是无理数，问 ab 什么时候是有理数，什么时候是无理数？

3．求证：$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$、$\sqrt[3]{2}$ 都不是有理数．

4．若 a、b是两个有理数，试证明一定有一个无理数 y，满足 $a<y<b$．

5．$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是不是有理数？为什么？

6．若 a、b 都是无理数，$a+b$ 是否一定是无理数？

7．若 $a+b$，$a-b$ 都是有理数，a 和 b 是否一定是有理数？

8．已知线段 AB 之长为 1，试利用直尺和圆规，画出长度为 $\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$、$\sqrt{11}$ 的线段．

① 这种说法流传颇广，例如项武义著《微积分大意》中就有这样的看法．但也有人认为“理”字是“ratio”之音译，意即指“比率”．而且考证出“有理数”、“无理数”最早出现于中国，并非由日文转译，可参看《初等数学论丛》(5) (53—55页)（上海教育出版社出版）。

二、庞大的无理数家族

（无理数也是无穷无尽的．它们比起有理数来要多得多.）

除了 $\sqrt{2}$，还有哪些无理数呢？

从 $\sqrt{2}$ 出发，就可以造出无穷多个无理数，如 $1+\sqrt{2}$、$2+\sqrt{2}$、$3+\sqrt{2}$，……，它们都是无理数.

$2\sqrt{2}$、$3\sqrt{2}$、$4\sqrt{2}$、……，也都是无理数.

$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$，$3-2\sqrt{2}$，$\frac{3}{5}-\frac{7}{4}\sqrt{2}$，……，仍是无理数.

我们不必一个一个地去证它们不是有理数，而采取一网打尽的方法来解决问题.

〔命题 2〕 如果 r 和 s 是有理数，$r\neq 0$，并且 a 是无理数，那么 $ra+s$ 是无理数.

证明 用反证法．若 $ra+s=q$，q 是有理数，则 $q-s$ 是有理数，$\frac{1}{r}(q-s)$ 也是有理数．由 $ra+s=q$ 解出

$$a=\frac{1}{r}(q-s),$$

于是推出 a 是有理数，这和假设相矛盾.

这一来，只要有一个无理数 a，便可以造出无穷无尽、密密麻麻的无理数来．当 $a=\sqrt{2}$ 时，由命题 2 可知，上面提到的 $1+\sqrt{2}$、$2+\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$、$3\sqrt{2}$、$\frac{3}{5}-\frac{7}{4}\sqrt{2}$、……都

是无理数.

无理数是不是都要带个$\sqrt{2}$呢？当然不是．就在人们发现$\sqrt{2}$不是有理数之后不久，希腊数学家塞阿多斯(Theodorus，公元前470年左右)就证明了$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$、…、$\sqrt{17}$都是无理数．于是，象$3-2\sqrt{5}$、$\frac{5}{4}+\frac{2}{7}\sqrt{7}$……这类的数，也都是无理数.

无理数开平方，象$\sqrt{3+\sqrt{2}}$是不是无理数呢？是的.

〔命题3〕 若a是无理数，k是正整数，则$\sqrt[k]{a}$不是有理数.

证明 用反证法．若$\sqrt[k]{a}=q$是有理数，则$a=q^k$是有理数，与假设相矛盾.

用类似于证明命题2和命题3的方法，很容易证明：若a是无理数，则$\frac{1}{a}$也是无理数．进一步可以证明，若a是无理数，α、β、γ、δ是有理数，则当$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$时，比值$(\alpha a+\beta)/(\gamma a+\delta)$也是无理数．我们把这些留给读者作为练习.

两个无理数相加，可不一定是无理数了．例如$3+\sqrt{2}$和$3-\sqrt{2}$，这两个无理数之和为6，是有理数．类似地，两无理数的差、积、商，可能是无理数，也可能是有理数．但是，象$\sqrt{2}+\sqrt{3}$这类数，却是无理数．请看

〔命题4〕 若a、b是正的有理数，$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$是无理数，则$\sqrt{a}+\sqrt{b}$也是无理数．如果$a\neq b$，则$\sqrt{a}-\sqrt{b}$也是无理数.

证明 用反证法．设$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=r$是有理数，而且设$r\neq 0$，则$\pm\sqrt{b}=r-\sqrt{a}$，两端平方得

$$b = r^2 + a - 2r\sqrt{a}$$

解出
$$\sqrt{a} = \frac{r^2 + a - b}{2r},$$

于是推出 $\sqrt{a}$ 是有理数，这和假设相矛盾。

现在我们已经知道了，从整数出发，反复进行有限次的 +、−、×、÷、开平方这五种运算，可以得到许多无理数。这样得到的无理数，可以说是最简单的无理数了。从长度为 1 的线段出发，使用圆规和直尺，可以画出长度等于这类无理数的线段来，这是因为：

(1) 有了长为 a、b 的两条线段，容易作出长为 $a+b$、$a-b$ 的线段来。（你会作吗？）

(2) 有了长为 a、b 的两条线段，又有了长为 1 的线段，可以作出长为 ab 的线段来。（提示：如图 3，$PQ \perp MN$，$\angle 1 = \angle 2$，$\overline{PO} = a$，$\overline{QO} = b$，$\overline{MO} = 1$，则 $\overline{NO} = ab$。）

(3) 在图 3 中，如果取 $\overline{PO} = 1$，$\overline{QO} = b$，$\overline{MO} = a$，那么易知 $\overline{NO} = \frac{b}{a}$。

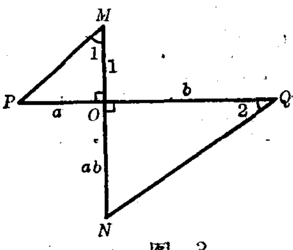


图 3

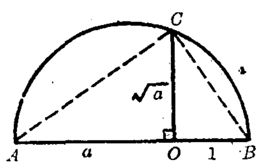


图 4

(4) 有了长为 a 的线段和长为 1 的线段，可以作出长为 $\sqrt{a}$ 的线段来 方法是，先作出长为 $a+1$ 的线段 AB，在 AB 上取 O 使 $\overline{AO} = a$，$\overline{BO} = 1$。以 AB 为直径作半圆，再过 O 作

AB 的垂线与半圆交于 C，因半圆的圆周角 $\angle ACB$ 是直角，故知 $\triangle AOC \backsim \triangle COB$，从而推出 $\overline{CO}=\sqrt{a}$.

这样，从有理数出发，经过多次开平方、四则运算而得到的无理数，不妨叫做尺规可作的无理数.

有没有尺规不可作的无理数呢？有. 事实上，尺规可作的无理数，不过是庞大的无理数家族中小小的一支而已.

在人们比较熟悉的尺规不可作的无理数当中，最古老的大概要算 $\sqrt[3]{2}$ 了. 它和有名的古代三大几何难题中的二倍立方体问题紧密联系在一起. ①

所谓二倍立方体问题，早在公元前 300 年左右就提出来了. 传说那时某个地方的人遭到瘟疫之灾，去找巫神想办法. 巫神说，要把正方体的祭坛的体积加倍，才能使瘟疫不再流行. 所谓祭坛体积加倍，就是要做一个新的正方体的祭坛，使它的体积是原来正方体祭坛的二倍. 那么，新祭坛的棱长，就应当是原祭坛棱长的 $\sqrt[3]{2}$ 倍.

于是，问题归结为：有了长为 1 的线段，能不能用直尺、圆规画出长为 $\sqrt[3]{2}$ 的线段？

人们经过两千多年的研究，证明了这是不可能的. 也就是说，$\sqrt[3]{2}$ 不但是无理数，而且是尺规不可作的无理数.

一般说来，整数的高次方根，如果不是整数，就一定是无理数. 证明并不难. 我们把它写作命题 5 的推论.

这样，象 $\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[5]{7}$，$2-\frac{3}{4}\sqrt[6]{8}$，……，又是一大批无

① 另两个是三等分任意角问题和化圆为方的问题. 这三个问题到十九世纪才被彻底解决——数学家证明了，用直尺、圆规是不能完成这三个作图的.

理数. 这些带有高次方根号的无理数, 中间有不少是尺规不可作的无理数.

从有理数出发, 经过有限次的四则运算和开方运算所得的无理数, 我们把它叫做可用根式表示的无理数. 这是更大一些的无理数家族, 它包含了尺规可作的无理数小家族.

有没有不能用根式表示的无理数呢? 有.

我们学过二次方程的求根公式. 若 x 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根, 则

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \quad (a\neq 0,\ b^2-4ac\geqslant 0)$$

当 a、b、c 是整数时 x 或者是有理数(当 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是整数时), 或者是可用根式表示的无理数(而且是尺规可作的!).

类似地, 三次和四次方程也有用根式表示的求根公式. 如果系数是整数, 它们的实根或者是有理数, 或者是可用根式表示的无理数.

五次和五次以上的代数方程, 就没有一般的求根公式了. 整系数 $n(n\geqslant 5)$ 次代数方程的无理实根, 只有一部分是可用根式表示的无理数. 如 $\sqrt[5]{7}$, 它是五次方程 $x^5-7=0$ 的根. 哪些代数方程的根是无理数呢? 我们有①

〔命题 5〕 若 a_1、a_2、…、a_n 都是整数, 则 n 次代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0=1) \quad (1)$$

的实根, 不是整数, 就是无理数.

---

① 判断代数方程的根是不是无理数的命题是很多的. 例如: 若 a_0, a_1 及 $a_0+a_1+\cdots+a_n$ 均为奇数, 则方程无有理根. 又如, 若 $a_0=1$, $a_n=p_1p_2\cdots p_k$, p_1, …, p_k 为不同的质数, 则方程也无有理根, 还有著名的爱森斯坦法: 若质数 p 不能整除 a_n, p 能整除其它 a_i, p^2 不能整除 a_0, 则无有理根.

证明 假设方程有一个有理根 x, 我们来证明 x 一定是整数.

如果 $x=0$, 就不用证了. 若 $x\neq 0$, 可把 x 写成 $\frac{b}{a}$, 这里 $a\geqslant 1$, a 和 b 都是整数, 而且 a 与 b 没有大于 1 的公约数. 把 $x=\frac{b}{a}$ 代入原方程(1), 得到

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n+a_1\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)+a_n=0, \qquad (2)$$

两边同乘以 a^{n-1}, 再移项, 得到

$$\frac{b^n}{a}=-[a_1b^{n-1}+a_2ab^{n-2}+a_3a^2b^{n-3}+\cdots$$
$$+a_{n-1}a^{n-2}b+a_na^{n-1}].$$

这个等式右端是整数, 左端的 $\frac{b^n}{a}$ 显然也是整数. 这说明 a 能够整除 b^n, 所以 a 的每个素因子(就是能整除 a 的素数)都能整除 b. 但已设 a 和 b 没有大于 1 的公约数, 故只有 $a=1$. 这证明了 $x=b$, 即方程(1)的有理根都是整数, 因而非整数的实根就是无理数.

方程 $x^n-m=0$ 是(1)的特例. 当 m 是正整数时, 它至少有一个实根 $\sqrt[n]{m}$. 根据命题 5, $\sqrt[n]{m}$ 如果不是整数, 就一定是无理数. 这证明了前面提到的 $\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[5]{7}$、$2-\frac{3}{4}\sqrt[6]{8}$ 这类数都是无理数.

应用命题 5, 对有些代数方程, 不用求出它的根, 就可以断定它的根是无理数.

〔例〕 代数方程 $x^5+x+1=0$ 的实根是无理数吗?

解 当 x 为 0 或正整数时, $x^5+x+1>0$. 当 x 为负整数

时，$x^5+x+1<0$. 因此，方程没有整数根. 由命题 5，可知它的实根是无理数.

所有整系数代数方程的根，都叫做“代数数”. 对代数数进行四则运算、开各次方，得到的仍是代数数. 以代数数为系数的代数方程，它的根仍是代数数.

有理数是一次整系数方程的根. 所以有理数也叫做一次代数数.

从二次整系数方程的根中，去掉那些一次代数数，剩下来的叫做二次代数数.

用类似的办法，你可以定义三次、四次……的代数数. 从 n 次整系数方程的根中，去掉那些低于 n 次的代数数，剩下的叫做 n 次代数数.

各次实代数数，除了一次的之外，都是无理数. 各次实代数数，都是无穷多的，都是密密麻麻的. 在任意两个不同的有理数之间，都有各次的实代数数.

尺规可作的无理数都是代数数.①

可用根式表示的无理数也都是代数数.

它们不过是全体实代数数中的一小部分. 二次以及二次以上的实代数数，组成更大的无理数家族!

除了高于一次的实代数数，还有别的无理数吗?

有! 无理数家族庞大得很，代数数在其中只占极小极小的一部分. 全体实数中，除掉代数数(包括有理数!)剩下的都叫做“超越数”. 超越数当然是无理数，它们是无理数家族中最大的一族.

说也奇怪，超越数这么多，人们对它的认识却非常晚. 第

① 它们包括全体二次代数数和部分 2^k 次代数数.