思路·方法·规律·技巧

高考数学客观性试题及解答

郭宽亮

陕西人民教育出版社

思路·方法·规律·技巧

高考数学客观性试题及解答

郭 宽 亮

陕西人民教育出版社

思路·方法·规律·技巧
高考数学客观性试题及解答
郭宽亮
陕西人民教育出版社出版发行
（西安长安路南段376号）
陕西省新华书店经销　　汉中地区印刷厂印刷
787×1092毫米　1/32开本　13.75印张　275千字
1990年11月第1版　1991年7月第2次印刷
印数：9 851—16 350
ISBN 7—5419—1978—0/G·1668
定价：4.05元

前言

近年来，随着高考标准化命题的逐步推广，客观性试题愈来愈引起了广大师生的重视。

高考数学中的客观性试题是指选择题、填空题（含简答题）。与主观性试题比较，客观性试题只要求写出结果，它具有知识覆盖面广、题型灵活多样、评分准确方便等特点。

通过对近几年高考数学试卷的分析，可以看出相当一部分考生对数学客观性试题认识不足，重视不够。由于受思维定势的消极影响，他们只局限于用单一的直接解法，既费时费力，又容易陷入“圈套”，导致错误。他们深感手头缺少一份专门指导如何解答数学客观性试题的参考资料。

为了适应命题标准化的需要，为了帮助中学师生正确解答数学客观性试题，笔者根据多年的教学实践经验，在研究探索高考数学客观性试题的特点及其解法规律的基础上，编写了这本辅导读物。

这本书着重论述了解答高考数学客观性试题的思路、方法、规律和技巧。全书有四个特点：其一是全，它汇集了近年来全国高考及粤、沪两省市高考数学客观性试题（极少数重复的及个别确属命题失误的试题除外），还适当补充了部分题目，使应考查的知识既全面系统，又重点突出；其二是专，它专门研究和探讨高考客观性试题的解法规律，具有指导意义，并且对目前出版的此类书只给出结果而无解答及思路过程是个很好的补充；其三是易学易懂，本书既介绍了解

题思路、谈及了理论依据，又十分注意技巧的运用、图形的直观、方法的概括归纳，因此，读者看起来易懂，用起来易学；其四是富于启迪性，书中许多题目是一题多解，有的多达五至十种。不少解法简捷明快、巧妙新颖、颇具特色，这无疑对开拓读者的眼界、启迪读者的思维会大有帮助。

本书可作为高中学生高考复习的参考书，也可作中学教师教学的参考资料。

在编写此书的过程中，曾参考过一些同行的著作、文章，在此，特向他们表示谢意。另外，在编写此书时，得到了魏庚人先生、霍振化老师、王建信同志的大力支持和帮助，在此，也向他们表示衷心地感谢。

由于水平所限，书中错漏难免，恳请读者批评指正。

郭 宽 亮

1990.7.20

目　　录

第一编　选择题

第二编　填空题

第一编　选择题

第一章　如何解答数学选择题

选择题是近三、四十年发展起来的一种新题型，它是适应命题的标准化的需要而产生的。选择题是标准化命题最基本的题型。

在我国，1983年高考命题中开始出现选择题，随之便有计划地在广东省高考、上海市高考和全国高考中进行标准化命题的试验工作，近几年来已积累了许多适合我国国情的成功的经验。据国家教委通知的精神：到1991年高考科目中大都要进行标准化命题，从1995年起将全面推行高考标准化命题。

选择题的特点是：构思巧妙、概念性强、灵活性大、知识覆盖面广、阅卷及成绩统计准确方便。它对考核应考者的分析判断能力、灵活掌握和运用知识的能力十分有效。

解答选择题只需填写选择的结果，看不到应考者的计算、推理过程，虽然也有一定的猜测性，但选择题的整体优点远远大于缺点，它远远优于传统的命题。所以，我国近几年来，在许多重大考试中，选择题越来越被重视，被广泛采

用。可见，研究选择题及其解法规律是十分必要的，它已成为当前中学数学教学，尤其是高考复习教学中的一个重要课题。

从选择题的构造来看，它由三部分组成。即指令性语言、题干、题支。题支对解题具有很大的迷惑性、干扰性。

从题目的性质来分，选择题一般可以分为三种类型，即定量型、定性型和混合型。

在多支选择题中，常用“结论中有且只有一个正确答案”（或叫单项选择）这种类型的题目从1983年到1990年高考数学选择题全部是这种类型，本书所列举的选择题也全部是这种类型。

解答选择题，就是把选择支中的真命题或正确答案找出来，因此必须做到取之有据，舍之有理，决不可随意猜测答案。

解答选择题应注意三点：其一，应正确掌握所学知识，保证选择的准确；其二，应有熟练的计算推理能力，保证选择的迅速；其三，应有灵活运用所学知识的综合能力，保证选择的完备。

选择题属于客观性试题，每次考试题目都较多，必须要在较短的时间内完成，而且只填写选择结果，不要求写出计算、推理的过程。针对这个特点，应考者反应必须敏捷，解法必须恰当。

选择题的题目不同，一般解法也就有所差异。要善于利用选择题的具体特点，即题干、题支所提供的全部信息，恰当选用方法，正确迅速地作出判断，不可当作常规题（传统的旧题型）去机械套用。否则，往往费时费力，甚至陷入

"圈套"，导致错误结果。

数学选择题的解法可归纳为三类：第一类是综合法，它是"由因求果"，即由题目的已知条件出发，通过合理的计算、分析、绘图等得到一个结果，再选择相应的正确答案。这种类型的解法细分有直接解法（含直接计算法、直接分析法、放缩法等）、图解法、特殊值法等；第二类是分析法，它是"执果寻因"，即由选择支提供的结果出发，寻找产生这种结果的原因，找到应符合的条件（如题干中的已知条件等）。这种类型的解法具体包括排除法、代入检验法、反例法、逆推法等；第三类是分析综合法，亦叫"两头凑"法，它是把第一、第二类解法结合起来使用的一种解法。

下边将具体分类谈如何来解答数学选择题。

1．直解法

直接从已知条件出发，运用定义、定理、公式、性质等进行计算或推理得到正确结论，再与所给的供选择的结论核对，选出相应的结果，这种判断方法叫做直接解法（或叫直解法），它是解答选择题最常用、最基本的一种方法。

利用直解法解答选择题，要力争解法巧妙、省时、省力，尽量避免繁杂的运算和推理。

例 1 设 $f(x)=\dfrac{2x+1}{4x+3}$ （$x\in R$ 且 $x\neq -\dfrac{3}{4}$），则 $f^{-1}(2)=$（ ）．

(A) $-\dfrac{5}{6}$；　(B) $\dfrac{5}{11}$；　(C) $\dfrac{2}{5}$；　(D) $-\dfrac{2}{5}$．

直解法1：（根据反函数定义解）设 $y=f(x)=\dfrac{2x+1}{4x+3}$，

$\therefore\ x=\dfrac{1-3y}{4y-2}$，即$f^{-1}(x)=\dfrac{1-3x}{4x-2}$（$x\in R$且$x\neq\dfrac{1}{2}$），则

$f^{-1}(2)=\dfrac{1-3\times2}{4\times2-2}=-\dfrac{5}{6}$，故选（$A$）。

直解法2：（根据反函数性质解）$\because f^{-1}(2)$就是$f(x)=2$成立的x值，$\therefore$令$\dfrac{2x+1}{4x+3}=2$，解得$x=-\dfrac{5}{6}$，即$f^{-1}(2)=-\dfrac{5}{6}$，故应选（A）。

〔注〕显然解法2较简捷它来源于对反函数的深刻理解。

例2 如果x、y是实数，那么“$x\neq y$”是“$\cos x\neq\cos y$”的（ ）。

（A）充分而且必要的条件；

（B）充分但不必要的条件；

（C）必要但不充分的条件；

（D）既不充分也不必要的条件。

【思路】直接判断$x\neq y$是$\cos x\neq\cos y$的什么条件不容易，可用其等价命题，即原命题的逆否命题$\cos x=\cos y$是$x=y$的什么条件来判断。

直解法：如果x、y是实数，若$x=y$，则显然$\cos x=\cos y$，但反之不真，如$\cos\dfrac{\pi}{4}=\cos\dfrac{7\pi}{4}$，但$\dfrac{\pi}{4}\neq\dfrac{7\pi}{4}$。可见$\cos x=\cos y$是$x=y$的必要但不充分条件，即$x\neq y$是$\cos x\neq\cos y$的必要但不充分条件，故应选（$C$）。

例3 已知$\{a_n\}$是等比数列，如果$a_1+a_2+a_3=18$，$a_2+a_3+a_4=-9$，且$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$

( )。

(*A*) 8; (*B*) 16; (*C*) 32; (*D*) 48。

直解法1：据等比数列定义，其公比 $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}$，由等比定理得 $q=\frac{a_2+a_3+a_4}{a_1+a_2+a_3}=-\frac{9}{18}=-\frac{1}{2}$。又$a_1+a_2+a_3=a_1(1+q+q^2)=18$，$\therefore a_1=24$，$\because |q|=\frac{1}{2}<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{24}{1+\frac{1}{2}}=16$。故应选（*B*）。

直解法2：由题意和等比数列通项公式得：

$$\begin{cases} a_1(1+q+q^2)=18 & ① \\ a_1q(1+q+q^2)=-9 & ② \end{cases}$$

②÷①得，$q=-\frac{1}{2}$，代入①得 $a_1=24$，以下解法同直解法1。

例4 如果 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{2}{5}$，$\operatorname{tg}(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$，那么，$\operatorname{tg}(\alpha+\frac{\pi}{4})=$ ( )。

(*A*) $\frac{13}{18}$; (*B*) $\frac{13}{22}$; (*C*) $\frac{3}{22}$; (*D*) $\frac{3}{18}$。

直解法1：由正切公式可得，

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\beta-\frac{\pi}{4})=(\operatorname{tg}\beta-1)/(1+\operatorname{tg}\beta)=\frac{1}{4} \\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)/(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=\frac{2}{5} \end{cases}$$

解得：$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{19}{25}$，则$\operatorname{tg}(\alpha+\frac{\pi}{4})=(\operatorname{tg}\alpha+1)/(1-\operatorname{tg}\alpha)=$

$\frac{3}{22}$. 故应选（C）.

直解法2：运用变换技巧，由正切公式可简单解为：

$\operatorname{tg}(\alpha+\frac{\pi}{4})=\operatorname{tg}[(\alpha+\beta)-(\beta-\frac{\pi}{4})]=[\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}(\beta-\frac{\pi}{4})]$ $/[1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\beta-\frac{\pi}{4})]=\frac{3}{22}$，或者 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}[(\alpha+\frac{\pi}{4})+(\beta-\frac{\pi}{4})]=[\operatorname{tg}(\alpha+\frac{\pi}{4})+\operatorname{tg}(\beta-\frac{\pi}{4})]/[1-\operatorname{tg}(\alpha+\frac{\pi}{4})\operatorname{tg}(\beta-\frac{\pi}{4})]=[\operatorname{tg}(\alpha+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{4}]/[1-\operatorname{tg}(\alpha+\frac{\pi}{4})\times\frac{1}{4}]$ $=\frac{2}{5}$，解方程求得 $\operatorname{tg}(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{22}$. 故应选（$C$）.

例5 如果直线 l_1、l_2 的斜率分别为二次方程 $x^2-4x+1=0$ 的两根，那么 l_1、l_2 所成的角为（ ）.

（A）$\frac{\pi}{6}$；（B）$\frac{\pi}{4}$；（C）$\frac{\pi}{3}$；（D）$\frac{\pi}{8}$.

直解法1：解 $x^2-4x+1=0$ 得 $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=2-\sqrt{3}$，则由斜率定义可得两直线斜率分别为 $k_1=\operatorname{tg}\theta_1=2+\sqrt{3}$，$k_2=\operatorname{tg}\theta_2=2-\sqrt{3}$，可推出 $\theta_1=75°$，$\theta_2=15°$，则 $\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{3}$，故应选（$C$）.

直解法2：设已知方程的二实根为 x_1、x_2，且 $x_1>x_2$，则由韦达定理得 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=1$，

$\therefore$ $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=12$，则 $x_1-x_2=2\sqrt{3}$，设 $x_1=k_1=\operatorname{tg}\theta_1$，$x_2=k_2=\operatorname{tg}\theta_2$，则 $\operatorname{tg}(\theta_1-\theta_2)=(\operatorname{tg}\theta_1-\operatorname{tg}\theta_2)/(1+\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2)=2\sqrt{3}/2=\sqrt{3}$. $\therefore$ $\theta_1-\theta_2=$

$\frac{\pi}{3}$ ($\because 0<\theta_1-\theta_2<\pi$)。故应选 (C)。

直解法3：设l_1、l_2所成角为θ，由题意得：$k_1+k_2=4$，$k_1k_2=1$，$\therefore |k_1-k_2|=\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}=2\sqrt{2}$（或用公式$|k_1-k_2|=\sqrt{b^2-4ac}/|a|=2\sqrt{2}$），由 $\mathrm{tg}\theta=|(k_1-k_2)/(1+k_1k_2)|=|2\sqrt{3}/2|=\sqrt{3}$。$\therefore$ $\theta=\frac{\pi}{3}$。故应选 (C)。

例6 函数$y=(2+\cos x)/(2-\cos x)$ $(x\in R)$ 的最大值是（ ）。

(A) $\frac{5}{3}$； (B) $\frac{5}{2}$； (C) 3； (D) 5。

直解法1：$y=(2+\cos x)/(2-\cos x)=1+2\cos x/(2-\cos x)$，若$\cos x\neq 0$时，$y=1+\dfrac{2}{\dfrac{2}{\cos x}-1}$，当 $\cos x=1$ 时，$y_{max}=3$。故应选 (C)。

〔注〕$\cos x=0$时，y取不到最大值。

直解法2：由原函数得：$\cos x=\dfrac{2y-2}{y+1}$，则$-1\leqslant\dfrac{2y-2}{y+1}\leqslant 1$，解得$\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$，$\therefore$ $y_{max}=3$。故应选 (C)。

直解法3：$\because 2+\cos x>0$，$2-\cos x>0$，$\therefore y$当其分子最大且分母最小时有最大值。则当$\cos x=1$时，有$y_{max}=3$，故应选 (C)。

例7 $\arcsin(\frac{1}{3})$、$\mathrm{arctg}(-\sqrt{2})$、$\arccos(-\frac{2}{3})$的大

小关系是（ ）。

(A) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)<\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})<\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$;

(B) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)<\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)<\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})$;

(C) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})<\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)<\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$;

(D) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})<\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)<\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$;

(E) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)<\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)<\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})$.

直解法：（实际是放缩法）$\because$ $0=\arcsin 0>\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)>\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$， $\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})<\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$，$\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)>\arccos 0=\frac{\pi}{2}$，则 $\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})<\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)<\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$。故应选（$C$）。

2.排除法

从选择支入手，结合题干所给条件，通过逐步排除选择支，从而获得正确的结论。这种判断方法叫排除法，亦叫筛选法或淘汰法或去伪存真法。这是解答选择题的一种常用的基本方法。

排除法仅适用于可供选择的答案中有且只有一个正确的多支单项选择题。对于某些直接计算或推理比较困难的多支

单项选择题，往往用排除法可以迅速地作出正确的判断。

例8 下列关系中正确的是（ ）。

(A) $(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}<(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}<(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$；

(B) $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}<(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}<(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}$；

(C) $(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}<(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}<(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$；

(D) $(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}<(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}<(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$。

排除法： 指数函数$y=a^x$，当$0<a<1$时，为减函数，$\therefore(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}<(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$，则（$B$）、（$C$）应排除；又$\because$函数$y=x^{\frac{2}{3}}$，在第一象限内为增函数，$\therefore(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}>(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}$；则（$A$）应排除，故应选（$D$）。

例9 设S、T是两个非空集合，且$S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，设$X=S\cap T$，那么$S\cup X$是（ ）。

(A) S； (B) T； (C) ϕ； (D) X。

排除法： $\because S$、T是非空集合，$\therefore S\cup X\neq\phi$，则（$C$）应排除；又$\because S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，$\therefore S\neq T$，$X=S\cap T\neq T$，$\therefore S\cup X\neq T$，则（$B$）应排除；同理$X=S\cap T\neq S$，$\therefore$ $S\cup X\neq X$，则（D）应排除。故应选（A）。

例10 函数$y=f(x)$是这个函数：$y=1-\sqrt{1-x^2}$（$-1\leqslant x\leqslant 0$）的反函数，则$y=f(x)$的图象大致形状是（ ）。

排除法： $\because$原函数$y=1-\sqrt{1-x^2}$的定义域为$-1\leqslant x$