机械工业出版社高水平著作出版基金资助项目

圆弧齿轮啮合原理

卢贤缵　尚俊开　著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

机械工业出版社高水平著作出版基金资助项目

圆弧齿轮啮合原理

卢贤瓒 尚俊升 著

机械工业出版社

本书首先简要地介绍了齿轮传动的一般啮合原理，并由此对圆弧齿轮进行研究。主要内容包括圆弧齿轮传动共轭原理、齿面普遍方程式、几何计算、中心距的可分性、重合度、齿面干涉和避免干涉齿轮最少齿数的计算；圆弧齿轮滚切瞬时成形原理，圆弧滚刀、指形刀具和盘形刀具齿形准确设计公式；圆弧齿轮公法线、弦齿厚、弦齿深和根斜径的准确计算公式与近似计算公式，分析了近似计算公式的误差和适用条件，并按准确公式编制了弦齿厚和弦齿深测量尺寸表。本书不仅给出问题的结论，而且力求简明地给出公式的推导过程，阐述其几何和物理意义，并提供计算例题，深入浅出，可供工厂、设计院从事齿轮设计和制造、齿轮刀具设计和制造的技术人员阅读。也可供高等学校师生教学和科研参考。

图书在版编目（CIP）数据

圆弧齿轮啮合原理/卢贤缵，尚俊开著．—北京：机械工业出版社，2003．1

ISBN 7-111-11289-X

Ⅰ．圆…　Ⅱ．①卢…　②尚…　Ⅲ．圆弧齿轮—啮合原理　Ⅳ．TH132．416

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 108696 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：沈　红　张亚秋　版式设计：冉晓华　责任校对：唐海燕
封面设计：姚　毅　　　　责任印制：闫　焱
北京第二外国语学院印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2003 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
1000mm × 1400mm B5·5.25 印张·201 千字
0 001—3 000 册
定价：20.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646

前　言

圆弧齿轮传动（又称 W—N 传动）是一种新型的平行轴圆柱齿轮传动。从20世纪60年代初开始在国内研究应用，由于圆弧齿轮制造工艺简单、成本低，而且承载能力比渐开线齿轮高，在国内得到迅速发展。从1975年起国内开始研究应用双圆弧齿轮，和渐开线齿轮一样，双圆弧齿轮传动配对齿轮只需要一把滚刀加工，它的承载能力比单圆弧齿轮高40%，是一种很有发展前途的传动形式。目前圆弧齿轮传动已大量应用于冶金、矿山、石油、化工、煤炭、电力和建筑等行业的各种机械设备上。在制造工艺方面正向中硬齿面发展，采用渗氮处理的硬齿面双圆弧齿轮的线速度达120m/s，其性能与磨齿的渐开线齿轮相当。在低速重载圆弧齿轮传动中采用的模数达到30mm，功率达到5000kW。

自1765年欧拉（L.Euler）提出渐开线齿形以来，渐开线齿轮传动得到最广泛地应用，渐开线齿轮啮合原理得到充分研究。和有二百余年历史的渐开线齿轮比较，圆弧齿轮啮合原理有待进一步深入研究。

在齿轮传动中采用圆弧齿形首先是由美国的威尔德哈泊（E.Wildhaber）于1926年提出的。后来，前苏联的诺维柯夫（M.Л.Новиков）于1954年又提出了采用端面圆弧齿形的点啮合传动理论。但是这种端面圆弧齿形的齿轮难于制造。所以在威尔德哈泊和诺维柯夫的设想提出后，并未在工业生产中得到应用。圆弧齿轮传动的真正工业实践是在前苏联的库德略夫采夫（B.H.Кудрявцев）提出并解决了利用滚刀按滚切法加工圆弧齿轮之后，这种圆弧滚刀对应的斜齿条刀具的法向齿形（即齿轮基本齿廓）是圆弧。采用滚刀加工圆弧齿轮，其滚切方法和渐开线齿轮一样简便，圆弧齿轮的应用得到迅速发展。这种圆弧滚刀加工出来的齿轮端面并不是圆弧齿形，这点本书作者[4,6]从理论上证明了当基本齿廓齿形圆心位于节线上时，圆弧滚刀加工出来的齿轮通过圆心准线的法向齿形是圆弧，并在一个滚切位置上瞬时成形；如果基本齿廓齿形圆心不位于节线上，任何准线的法向齿形都不是圆弧。

利用诺维柯夫的端面圆弧齿形点啮合传动理论来阐述滚切法加工得到的圆弧齿轮的理论问题是间接的，只能定性地说明一些问题，不能定量地给这些问题以理论上的准确证明。前苏联的李特文（Φ.Л.Литвин）于1962年提出了借助两个固连的齿条成形面形成点接触共轭齿面的理论，这种理论是建立在圆弧齿轮加工方法基础上的，较好地定量地解决了圆弧齿轮的啮合理论问题。但是，长期以来国内关于圆弧齿轮啮合理论的论述，还习惯于停留在诺维柯夫的端面圆弧齿形点

啮合传动理论基础上。

本书将从齿轮传动一般啮合理论出发研究圆弧齿轮，说明了借助一个齿条成形面或两个固连的齿条成形面在范成运动中形成线接触或点接触共轭传动的奥利佛（T.Olivier）法，是形成平行轴传动的普遍方法。事实上，我们只要赋予齿轮基本齿廓齿形（齿条成形面的法向齿形）以不同的曲线，就可以得到不同的传动形式。基本齿廓齿形采用直线（曲率半径无穷大），则形成渐开线齿轮传动，其接触线是沿齿长分布的直线。基本齿廓齿形采用圆心位于节线上的圆弧（曲率半径较小且为常数），则形成圆弧齿轮传动，其接触线是沿齿高分布的法向圆弧。如果采用两条相切的曲线作为基本齿廓，则得到点接触齿轮传动。加工圆弧齿轮时采用两条相切的圆弧作为基本齿廓齿形，得到初始点接触齿轮传动；跑合后圆弧齿轮传动成为线接触，这时可以认为其基本齿廓齿形是一条圆弧曲线。事实上，初始制造成点接触齿轮传动是避免加工误差的一种工艺手段，不是我们追求的目的。从圆弧齿轮和渐开线齿轮遵守相同的啮合规律出发，认识圆弧齿轮和渐开线齿轮的共性和圆弧齿轮的特性，对研究圆弧齿轮传动的几何学、加工方法和测量理论是非常有益的。

本书包括预备知识、圆弧齿轮啮合原理两部分。在预备知识中，简要地介绍李特文在《齿轮啮合原理》[9]一书中提出的有关方法。这些方法在本书讨论圆弧齿轮啮合原理时将被用到。和当前国内外提出的研究齿轮啮合原理的其他几种数学方法相比较，李特文的方法易于掌握。例如李特文提出的利用矩阵进行坐标变换、“运动学法”、“啮合轴”，不需要高深的数学知识，只要具有大学普通数学基础知识就可以掌握运用。这些预备知识也适用于研究其他形式齿轮传动。

李特文在《齿轮啮合原理》一书中研究了圆弧齿轮啮合理论。在李特文研究成果的基础上，结合生产实践中出现的问题，本书对圆弧齿轮啮合理论进行了较为全面地探讨。本书将介绍作者在这方面的研究成果。主要内容包括三个大的方面，即圆弧齿轮传动共轭原理、圆弧齿轮各种加工方法和刀具设计理论、圆弧齿轮测量理论。并对国内某些现有理论和计算公式提出了商榷意见。

作为圆弧齿轮刀具齿形准确计算和测量尺寸准确计算的基础，本书建立了圆弧齿轮齿面的普遍方程式。讨论了圆弧齿轮传动中心距的可分性、重合度、齿面干涉和避免干涉齿轮最少齿数等在渐开线齿轮传动存在的类似问题。

圆弧齿轮有着和渐开线齿轮一样的各种加工方式，原则上凡是加工渐开线齿轮的机床，如滚齿机、磨齿机、铣齿机等都可以加工圆弧齿轮。本书对圆弧齿轮各种加工方法成形实质进行了理论探讨，并推导了圆弧齿轮滚刀、指形铣刀、盘形刀具的齿形精确计算公式。

在有关圆弧齿轮测量理论的章节中，将介绍并比较圆弧齿轮的各种测量方法，包括公法线、弦齿厚、弦齿深和根斜径。本书将两种不同表达形式的圆弧齿

轮公法线计算公式从理论上统一起来。推导出圆弧齿轮弦齿厚、弦齿深和根斜径的精确计算公式，通过电子计算机计算，分析出国内普遍采用的圆弧齿轮弦齿厚、弦齿深和根斜径的近似计算公式误差规律和适用范围。本书还给出了作者根据准确计算公式编制的弦齿厚、弦齿深测量尺寸表。

本书的出发点在于应用大学已经学过的解析几何、数学分析和理论力学知识，论述圆弧齿轮啮合原理。侧重对生产实际中提出的圆弧齿轮理论问题进行探讨，对易于产生模糊概念的一些问题从理论上予以澄清。本书不仅给出问题的结论，而且力求简明地给出过程的推导，阐述其几何和物理意义，提供计算例题，深入浅出，使广大从事齿轮和齿轮刀具设计、制造的技术人员易于掌握运用。本书也可供高等学校教学和科研参考。

国内还没有出版过关于研究圆弧齿轮啮合理论的专著。本书是这方面的一个尝试。由于水平所限，错误在所难免，欢迎读者指正。

主要符号

A——中心距
b——齿宽
d——直径，分度圆直径
d_a——齿顶圆直径
d_b——基圆直径
d_f——齿根圆直径
d_k——根斜径
d_{fa}——根顶径
e——基本齿廓圆心移距量
e_a——凸齿齿廓圆心移距量
e_f——凹齿齿廓圆心移距量
$\boldsymbol{e}$——单位法线矢量
h——齿高，全齿高
$\overline{h}$——弦齿高
h_a——齿顶高
h_f——齿根高
H——弦齿深
i——传动比
j——侧隙，法向侧隙
l——基本齿廓圆心偏移量
l_a——凸齿齿廓圆心偏移量
l_f——凹齿齿廓圆心偏移量
L——公法线长度
m——模数，法向模数
m_t——端面模数
n——测量公法线的跨齿数
$\boldsymbol{n}$——法线矢量
N——相对坐标轴的齿廓圆心偏移量
p——螺旋参数
p_t——端面齿距
p_x——轴向齿距
r——半径，分度圆半径
r_a——齿顶圆半径
r_b——基圆半径
r_c——基本齿廓圆心所在圆半径
r_f——齿根圆半径
r_g——基本齿廓齿根圆弧半径
r_v——当量齿轮分度圆半径
$\boldsymbol{r}$——坐标系中点的径矢
R——半径
s——齿厚
$\overline{s}$——弦齿厚
S——坐标系
$\boldsymbol{v}$——速度矢量
w——齿槽宽度，法向齿槽宽度
z——齿轮齿数
z_v——当量齿数
α——压力角，法向压力角
α_o——初始接触点压力角
α_t——端面压力角
β——螺旋角，分度圆螺旋角
β_a——齿顶圆螺旋角
β_b——基圆螺旋角
β_c——基本齿廓圆心所在圆螺旋角
β_x——半径 R 圆柱面上螺旋角
γ——角度
δ——啮合极点偏角，基本齿廓工艺角
ε——重合度
ε_a——端面重合度
ε_β——纵向重合度
η——角度
θ——角度
λ——升角
ν——角度

ξ——径向变位系数

ρ——基本齿廓圆弧半径

ρ_a——凸齿齿廓圆弧半径

ρ_f——凹齿齿廓圆弧半径

ϕ——角度

ψ——角度

$\boldsymbol{\omega}$——角速度矢量

主要下角标：

a——齿顶的，凸齿的

f——齿根的，凹齿的

o——初始的

t——端面的

x——轴向的

v——当量的

注：本书中凡未注明的，长度单位一律为 mm，角度单位一律为 rad。

目　　录

第 1 章 预 备 知 识

1.1 矢量代数

1.1.1 矢量 径矢 单位矢量

在本书里采用的坐标系是右旋直角坐标系。如图 1-1 所示，M 为空间一点，则 M 和坐标系原点 O 的连线 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 为一矢量。我们将以坐标原点 O 为始点，以空间一点 M 为终点的矢量 $\boldsymbol{r}$ 称为 M 点的径矢。设 x、y、z 为矢量 $\boldsymbol{r}$ 的分量，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为沿着 3 个坐标轴正向的单位矢量，则矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以写成

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

它的模是

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1-2}$$

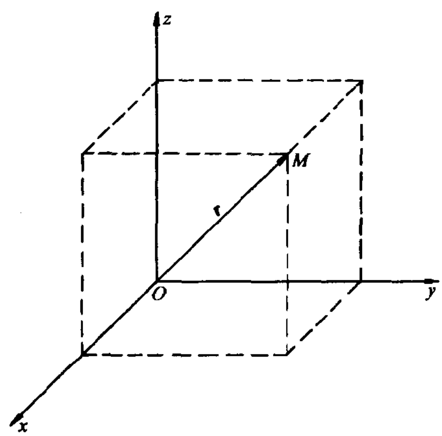

图 1-1

若 $\boldsymbol{r}\neq 0$，则 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ 是和 $\boldsymbol{r}$ 正向相同的单位矢量。设矢量 $\boldsymbol{r}$ 与坐标轴 Ox、Oy、Oz 的正向夹角（即方向角）顺次为 α、β、γ。方向余弦为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，则单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 的分量等于矢量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦，即

$$\boldsymbol{e}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k} \tag{1-3}$$

且矢量方向余弦的平方和等于 1，即

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=0 \tag{1-4}$$

若某一矢量的始点 M_1（x_1，y_1，z_1），终点 M_2（x_2，y_2，z_2）。则该矢量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 等于终点 M_2 的径矢 $\boldsymbol{r}_2$ 与始点 M_1 的径矢 $\boldsymbol{r}_1$ 之差，即

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k} \tag{1-5}$$

1.1.2 矢量之和 数量积 矢量积 混合积

下面讨论两矢量之和、数量积、矢量积和混合积的几何、物理意义及运算。

(1) 和　两矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 之和是以该两矢量做两边的平行四边形的对角线，

即

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=(x_1+x_2)\,\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\,\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\,\boldsymbol{k} \tag{1-6}$$

如果 F_1 和 F_2 表示作用在一个物体的两个力，则矢量和 F_1+F_2 表示该两个力的合力。

（2）数量积　两矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 之数量积等于该两矢量的模和它们之间夹角 θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）余弦的乘积，即

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\cos\theta \tag{1-7}$$

其坐标表达形式为

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{1-8}$$

从数量积的定义式（1-7）可以得出，两矢量垂直的充要条件是它们的数量积等于零。在力学上，如果一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下做直线位移 s，则数量积 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$ 表示力所做的功。

（3）矢量积　两矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 之矢量积 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$ 是一个矢量，它的方向垂直于 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 所决定的平面，指向为使 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$ 成右手螺旋系的前进方向。它的模等于该两矢量的模和它们之间夹角 θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）正弦的乘积，即

$$|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\sin\theta \tag{1-9}$$

其坐标表达形式为

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{pmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{pmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{pmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}\boldsymbol{k} \tag{1-10}$$

从式（1-9）可以得出，两矢量平行的充要条件是它们的矢量积等于零。和数量积不同，两矢量之矢量积不适用交换律。两矢量位置调换时，矢量积改变方向，即

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=-(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1)$$

在几何上，两矢量的矢量积的大小等于以该两矢量为边的平行四边形面积。在力学上矢量积的实例很多：如 $\boldsymbol{F}$ 为作用于 M 点的力，$\boldsymbol{r}$ 为从坐标原点 O 到 M 点的径矢，则矢量积 $\boldsymbol{r}\times F$ 就是力 $\boldsymbol{F}$ 对于点 O 的力矩；又点 M 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕轴旋转，$\boldsymbol{r}$ 为 M 点的径矢，则 M 点的线速度等于矢量积 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$。

（4）混合积　三矢量混合积 $[\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3]=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)$ 是一个数量，它的绝对值等于以 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 为边的平行六面体的体积。如果 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 组成右手系，其值为正；否则为负。混合积的坐标表示式为

$$[\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3]=\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix} \tag{1-11}$$

由混合积定义得出，3个矢量共面（在一平面上或在平行平面上）的充要条件是它们的混合积等于零。

1.2 矩阵知识

1.2.1 矩阵的基本概念

矩阵是以确定位置排成矩形的一组数，其中每个数称作元素，横排称作行，竖排称作列，例如矩阵 A 表示为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{1-12}$$

矩阵元素 a_{ij}有两个下标，第一个 i 表示行的序号，第二个 j 表示列的序号，元素 a_{ij}位于第 i 行和第 j 列的交点上。例如元素 a_{23}位于第2行和第3列的交点上。

行数和列数相等的矩阵称作方阵。只有一列的矩阵称作列矩阵。例如径矢 $\boldsymbol{r}$ 的空间点的坐标可以写成列矩阵

$$r=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1-13}$$

式中　r——径矢 $\boldsymbol{r}$ 列矩阵记号。

矩阵的阶数表示它包含的行数和列数。式（1-12）矩阵是四阶方阵。式(1-13)是 3×1 阶矩阵。

1.2.2 矩阵乘法

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，即“列等行”，才能做两个矩阵的乘法运算。下面讨论两个四阶方阵的乘法运算。两个四阶方阵 A 和 B

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

的乘积 C 是一个同阶方阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$$

简记为

$$AB=C \tag{1-14}$$

按“行乘列”的矩阵乘法法测，方阵 C 的元素 c_{ij} 等于第一个矩阵 A 的第 i 行的各个元素和第二个矩阵 B 的第 j 列的对应元素的乘积之和，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+a_{i4}b_{4j} \tag{1-15}$$

所谓对应元素是指第一个矩阵 A 的元素的列序号（第二个下标）和第二个矩阵 B 的元素的行序号（第一个下标）相同，即“列同行”。例如计算位于第 2 行和第 3 列的元素 c_{23} 为

$$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}+a_{24}b_{43}$$

在计算过程中注意到，首先是“行乘列”，即第一个矩阵 A 第 2 行各个元素（元素第一个下标都是 2）依次和第二个矩阵 B 第 3 列的对应元素（元素第二个下标都是 3）相乘；其次是“列同行”，即相乘的两个对应元素中，第一个矩阵 A 的元素的列序号（第二个下标）和第二个矩阵 B 的元素的行序号（第一个下标）始终相同。

如果一个方阵 A 的列数等于一个列矩阵 x 的行数，则可以依据上述“行乘列”法则，按式（1-15）求出其乘积 b。由于列矩阵 x 只有第 1 列，其他列元素皆为零，所以其乘积 b 为列矩阵。即方阵 A

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

和列矩阵 x

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

乘积 b

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

是一个列矩阵。注意对列矩阵的元素只标注了一个下标，即行的下标。省略了第2个，即列的下标。简记为

$$Ax = b \tag{1-16}$$

或记为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \tag{1-17}$$

展开之后得到

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{aligned}\right\} \tag{1-18}$$

式（1-18）是一个非齐次线性方程组。根据矩阵乘法法则，这个非齐次线性方程组可以通过矩阵形式（1-16）或式（1-17）表示。在线性代数中，往往通过矩阵表示并求解线性方程组。

n 阶方阵的表达式和乘法法则与上述四阶方阵是一样的，只是元素数目不同。本书在坐标变换中将用到四阶方阵、三阶方阵和 4×1 阶、3×1 阶列矩阵，以及本节列出的公式。

矩阵乘法不具有交换律，乘积与矩阵因子顺序有关，即

$$AB \neq BA$$

两个矩阵的乘法法则可以推广到多个矩阵因子的情况。这时每步做相邻两个矩阵的乘法，与矩阵顺序无关，即结合律成立。例如

$$(AB)C = A(BC)$$

即可以先做矩阵乘积 $AB = D$，然后做矩阵乘积 DC；也可以先做矩阵乘积 $BC = E$，然后做矩阵乘积 AE（不能做 EA）。两种步骤结果是一样的。

例题 1： 求下列两个四阶方阵 A 和 B 的乘积 C

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

解：按“行乘列”法则，乘积 C 的第 1 行第 1 列元素为 $3\times1+2\times(-1)+2\times2+1\times3=8$，依次计算各元素，得

$$C=AB=\begin{pmatrix}8 & 19 & 10 & 8\\ 13 & 12 & 5 & -8\\ 24 & 40 & 22 & 13\\ 20 & 35 & 36 & 37\end{pmatrix}$$

例题 2：求下面四阶方阵 A 和 4×1 阶列矩阵 B 的乘积 C

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 4 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}4\\6\\7\\8\end{pmatrix}$$

解：乘积 C 的第 1 行元素等于 $1\times4+3\times6+0\times7+1\times8=30$，依次计算第 2，3，4 行元素，得到乘积

$$C=AB=\begin{pmatrix}30\\19\\76\\72\end{pmatrix}$$

1.3 坐标变换

在齿轮传动中，各构件之间存在着相对运动，往往需要分别在与不同构件相固连的坐标系中表示点的位置或矢量。有时在一个构件上也采用不同的坐标系来表示点的位置。这些可以通过一次或多次坐标变换来实现。坐标变换是研究齿轮啮合原理的重要方法。本节将较为详细地介绍坐标变换的两种方法，一种是解析几何中的方法，对简单的坐标变换建议采用这种方法；一种是矩阵方法，建议用于复杂的多次坐标变换。如上所述，本书采用右旋坐标系。右手系的一种判别方法是：右手握拳，当 x 轴顺着四指握绕方向转向 y 轴时，伸出的拇指表示 z 轴方向。

1.3.1 解析几何中的坐标变换方法

（1）坐标轴的平移　如图 1-2 所示，坐标系 S_2 相对坐标系 S_1 沿坐标轴 x_1、y_1 平移距离 a、b。$x_1O_1y_1$ 平面上任意点 M 在坐标系 S_1 中的坐标（x_1，y_1）用坐标系 S_2 中的坐标（x_2，y_2）表示为

$$\left.\begin{aligned}x_1&=x_2+a\\ y_1&=y_2+b\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}19)$$