结构安全度与可靠度分析论文集

JIE GOU AN QUAN DU YU KE KAO DU FEN XI LUN WEN JI

吴世伟等著

河海大学出版社

结构安全度与可靠度分析

论 文 集

吴世伟 主编

河 海 大 学 出 版 社

结构安全度与可靠度分析论文集
吴 世 伟 主 编
*
河海大学出版社出版(南京西康路一号)
江苏省新华书店发行
江苏省武进县村前印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/16 印张：10 印张 字数：243千字
1988年1月第一版 1988年1月第一次印刷
印数：3000册
*
ISBN 7-5630-0005-4/G·5
定价：2.90元

前　言

河海大学《水工结构可靠度》科研组成立于1982年，从那以后，该组围绕重力坝、拱坝、升船机塔柱、高桩码头、连续梁与刚架等结构的可靠度进行研究。特别是85年以后，先后接受了水电部三项科研经弗、水电基金、教委基金和交通部科研经弗，紧密结合《水工结构设计统一标准》和《港口工程结构设计统一标准》编写中提出的问题，进行更为系统的研究工作。与此同时，还举办过结构可靠度研讨班和短训班九次，其中专门为水电部有关部门举办三次，为交通部有关部门举办两次。参加人数共达300余人。参加人中除来自水电部、交通部有关设计和科研单位外，还来自各大专院校。此外，还应邀进行专题讲座六次，其中包括85年11月在教委举办的结构力学与弹性力学经验交流会上，向来自全国工科院校的40多位力学教师作了长达三个多小时的题为《结构可靠度理论与应用》的报告；84年8月在水电部举办的"重力坝设计规范补充规定审查会"上被特邀作了"重力坝可靠度分析"的报告；同年8月在交通部于承德召开的《港工结构设计可靠度问题》座谈会上，被特邀作《美国结构可靠度理论与应用情况》报告；86年6月在第一次华东团体力学学术讨论会上，被特邀作《结构可靠度理论与应用状况》报告；84年6月在扬州市力学学会成立大会上作过《力学发展状况与结构可靠度》的报告等。这些活动对结构可靠度理论的普及以及在工程结构设计中的应用起了宣传与推动作用。

在几年教学与科研活动中、该科研组取得了可喜的成果，仅1982—1986年期间，就完成论文或报告20多篇。为进一步搞好信息交流，激励更多同志进行结构可靠度理论和应用的研究，现从中摘出19篇编成本论文集。内容大致可以分为：结构可靠度发展简况和基本理论简介(第1、2篇)；随机变量统计资料的搜集与分析(第3、4、17篇)；结构可靠度分析方法(第5、6、7、8、12、15、18篇)；结构可靠度校核（第7、8、9、13、14、15、16篇）和现行规范校核(第10、11、19篇)。本论文集可供从事结构设计和规范编制的有关人员参考，也可供高等学校土木、水利、建筑等专业高年级学生及研究生学习和研究结构可靠度专题时参考。

本论文集研究和编写过程得到河海大学赵光恒教授、周氐教援、程迺巽教授以及结构力学教研室全体同事的关心和支持，对此谨致以诚挚的谢意。

限于水平，论文集中难免存在有错误和不当之处，敬请读者批评指正。

水利电力部科技司水电处
河 海 大 学 力 学 系

1987.11.

目　　录

结构可靠度理论及应用简介

吴　世　伟

一、概　述

结构构件的设计，应使所设计的结构构件在其使用期内，力求在经济合理前提下满足下列要求：

（1）能承受在施工和使用期内可能出现的各种作用；

（2）在正常使用时具有良好的工作性能；

（3）具有足够的耐久性；

（4）在偶然事件发生时及发生后，能保持必要的整体稳定性。

上述要求中的第(1)、(4)两项关系到人身安全。结构应具有的这种性质一般用结构的安全性来描述。第(2)项关系到结构的适用性。第(3)项则关系到结构的耐久性。结构的安全性、适用性和耐久性这三者总称为结构的可靠性。可靠性的数量描述一般用可靠度；安全性的数量描述则用安全度。

早期工程结构设计方法是容许应力法。它要求荷载作用下，结构或构件某截面的应力不超过材料的容许应力$[\sigma]$，

$$[\sigma]=R/K$$

式中，R为材料强度，K为安全系数。

随着结构分析方法的发展，出现了按破坏阶段设计法。与前面容许应力法的主要区别在于考虑了材料的塑性性质，而且所计算的是截面或构件甚至整个结构的承载能力。如受弯构件的承载能力为M_P，要求构件承受的弯矩M乘以安全系数K后不超过M_P，即

$$KM\leqslant M_P$$

上述设计结构的两种方法中，为保证设计结构的安全，都引入了大于1的安全系数K。这种设计方法又简称为安全系数法。经过长时期的实践证明，安全系数法设计结构不够科学。原因是：

（1）由于安全系数系根据经验进行粗略制定的数值，结果使结构设计非常粗糙。例如，往往由于人为选择不同安全系数而与精确的计算方法不相匹配。

（2）安全系数法不能作为度量结构可靠度的统一尺度。理论与实践都证明了，安全系数大小只能反映同一类型的某种受力状态下结构的安全度。但对不同类型结构或同一结构同一截面在不同受力状态下，即使同一安全系数，也不能表明具有相同的安全度。例如，现行规范规定砖石结构偏心受压构件的设计安全系数为2.3，钢筋混凝土设计的安全系数为1.55，但并不能说明前者的安全度比后者高。钢筋混凝土轴心受压构件与受剪构件的设计安全系数都规定为 1.55，但也不能说明两者的安全度相同。

(3) 增加结构的安全系数，不一定能按比例地增加结构的安全度。对于那些存在着不同符号应力叠加情况的结构，这问题更突出。

这种假象的危害在工程上有过不少的实例，英国的Ferrybridge冷却塔就是由于这种原因破坏的[1]。

传统安全系数法的设计中存在着上述问题的原因在于没有考虑到如下的事实：材料性能、构件尺寸以及结构的外来作用都是随机的几何量或物理量，而不是确定的单值量。安全系数法把这些不确定量用一个笼统的安全系数掩盖起来。为克服这些缺点，人们发展一门新的学科一结构的可靠度。它承认几乎所有的工程变量都是随机变量。在这基础上发展出一整套可靠度计算方法，最后给结构算出概括其安全性的各种指标(可靠度、可靠指标)，据以设计或校核结构。

结构的可靠度指的是结构或构件在规定的时间内，在规定的条件下完成预定功能的概率。可靠度设计是承认结构有失效(或破坏)的可能性为前提的。在结构的可靠度问题中，主要碰到的是强度的可靠度问题。它是从结构材料的强度大于荷载引起的应力的概率出发进行可靠度设计，而不是用一个笼统的安全系数进行设计。这种出发点更符合人们对问题的认识，易为人们所接受。例如，当飞机或汽车设计师告诉人们坐飞机或汽车有冒每小时为百万分之一失事的可能性(大体上与常见病死亡率相当)时，人们是很容易理解的。如果将这种指标作为可靠度设计指标，人们自然也会放心，因为它比常规法中用安全系数2 设计要明确得多。

二、结构可靠度研究历史简介

可靠度在结构设计中的应用大概从40年代开始。1946年，A.M.Freudenthal 发表的题为《结构的安全度》论文，开始较为集中地讨论了这个问题。同期，苏联的A.P.Ржанищын 提出了一次二阶矩理论的基础概念，以及计算结构失效概率的方法及对应的可靠指标公式。但那时以及从那以后，一切可靠度理论还局限于应用古典可靠度理论。在设计中，随机变量完全为其均值和标准差所确定。显然，这只有在随机变量都是正态分布条件下才是精确的。美国Cornell 在 Ржанищын 工作的基础上，于1969年提出了与结构失效概率相联系的可靠指标作为衡量结构安全度的一种统一数量指标，建立了结构安全度的二次矩模式。从此，情况有了很大的变化。1971年加拿大的C.Lind对这种模式采用分离函数方法，将可靠指标β 表达成设计人员习惯采用的分项安全系数形式。1972年E.Rosenblueth和 L.Esteva 等人提出了对数正态分布下的二阶矩模式。这些进程都加速了结构可靠度方法的实用化。美国伊利诺大学A.H—S.Ang(洪华生)在结构可靠度研究方面有较大的贡献。他对各种结构不定性作了分析，提出了广义可靠度概率法，1974年他和 Cornell合写的《结构安全和设计的可靠度基础》一文对当时的概率设计法作了系统的概述。他同W.H.Tang合写的名为《工程规划和设计中的概率概念》一书，在世界上也广为应用。1976年国际“结构安全度联合委员会”(JCSS)，采用Rackwitz等人提出的通过“当量正态”的方法以考虑随机变量实际分布的二阶矩模式，这对提高二阶矩模式的精度意义极大。至此，二阶矩模式的结构可靠度表达式与设计方法开始进入实用阶段。

在我国，结构可靠度问题的研究工作开展较晚。六十年代土木工程界曾广泛开展过结构安全度的研究与讨论。七十年代开始把半经验半概率的方法用到六本有关结构设计规范中去。此后，有关建筑部门开始组织大量科研人员从事于结构可靠度设计方法的研究。1980年

提出的《建筑结构设计统一标准》(初稿)[2]就完全采用国际上正在发展和推行的以概率统计理论为基础的极限状态设计方法。

三、结构可靠度分析的目的和过程

结构可靠度分析过程。大概可以分为如下三个阶段：

（1）搜集结构随机变量的观测或试验资料，用概率统计方法进行统计分析，求出其分布规律及有关的统计量，作为可靠度计算的依据。

（2）用力学的方法计算结构的荷载效应，通过试验与统计获得结构的抗力，从而建立结构的破坏标准。

（3）用概率统计方法计算满足结构破坏标准下结构的可靠度。工程上目前不用可靠度而直接用反映结构可靠度的所谓可靠指标。

可靠指标目前已作为结构可靠度设计的依据。许多规范都规定了适用于各种结构具体条件下的目标可靠指标。它是设计所预期的可靠指标。据此，可以进行结构可靠度设计。

四、结构可靠度的计算方法

结构可靠度计算主要是计算结构可靠指标β。计算β的方法很多，这里只介绍一次二阶矩法、JC法和蒙特卡罗法。其中JC法通俗易懂，不受随机变量分布规律限制，计算又较简单，是目前国内外结构可靠度分析中最常用的近似法。

1．一次二阶矩法

本法是把随机变量用它们的第一和第二阶矩表示的同时，把极限状态方程在某点线性化，以进行可靠度计算。

设有极限状态方程

$$g(x)=0 \tag{1}$$

式中$x=x_1$、x_2、…，x_n，表示荷载效应和抗力的n个随机变量。把式(1)用泰勒级数在某点展开，并取一次式后，得线性化后的方程为

$$z=g(x^*)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^*)\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{x^*} \tag{2}$$

式中 x^* 为线性化点。

由式(1)，有均值

$$\bar{z}=g(\bar{x})=g(x^*)+(\bar{x}_1-x_1^*)\left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{x^*}+\cdots+(\bar{x}_n-x_n^*)\left.\frac{\partial g}{\partial x_n}\right|_{x^*} \tag{3}$$

标准差σ_x可以用σ_{x_i}的各自的数值线性组合[1]如下：

$$\sigma_x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma x_i\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{x^*} \tag{4}$$

式中α_i称为灵敏系数(或分离系数)。

$$\alpha_i = \sigma_{xi}\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{x^*} \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_{xi}\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{x^*}\right)^2} \tag{5}$$

把线性化点取在破坏边界处，则有$g(x^*)=0$，因而式(3)变成

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i - x_i^*)\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{x^*} \tag{6}$$

利用可靠指标公式$\beta = \bar{Z}/\sigma_z$把式(4)和式(6)代入整理后，得对于一切i都适用的如下式子

$$x_i^* = \bar{x}_i - \alpha_i \beta \sigma x_i \tag{7}$$

式(7)确定了线性化点x^*。这个点一般称设计验算点。在给定x_i，σ_{xi}和β值时，x^*可以由式(5)和式(7)求解得到。如果只知道x_i和σ_{xi} 而β和x^*都需要求解时，则需要通过迭代法计算[1]。

2. JC法

JC法又称 Rackwitz—Skov法，是用于计算随机变量一般分布下结构可靠指标的强有力的方法。该法把随机变量x_i原来的非正态分布用正态分布代替，但对所代替的正态分布要求在设计验算点x_i^*处的概率分布CDF和概率密度函数PDF与原分布的CDF和PDF相同。

代替的正态分布变量 x_i'的均值 $\bar{x}_i'$ 和标准差σ_i' 由两种分布下的CDF和PDF的等效条件求得[1]。

$$\sigma_i' = \phi\{\Phi^{-1}[F_i(x_i^*)]\}\frac{1}{f_i(x_i^*)} \tag{8}$$

$$\bar{x}_i' = x_i^* - \sigma_i'\Phi^{-1}[F_i(x_i^*)] \tag{9}$$

以上式中，$F_i(\ )$和$f_i(\ )$分别为变量x_i的CDF和PDF。当等效正态分布的$\bar{x}_i'$ 和 σ_i' 确定之后，就可以用改进的一次二阶矩法求解可靠度指标了[1]。

3. 蒙特卡罗法

为了计算某些量，先造出概率模型，使它们的若干数字特征恰好重合于所需的计算量。从而求解所需的概率估量。这就是蒙特卡罗法的基本思路。

蒙特卡罗法的优点在于其精度随N次数增加而增高。当N选取足够大时，可以获得P_f的相对精确值。从这个角度出发，蒙特卡罗法是检验其它近似法的强有力的工具。但为求得较好的解答，当遇到小破坏概率时，用蒙特卡罗法计算的次数往往多达几万甚至几十万次，耗费相当多的电算时间。因此，人们很少直接用它计算结构的破坏概率。

五、结构可靠度理论目前使用情况

结构可靠度理论在国外已被用于原子能反应堆、海上平台等重要结构的设计中。在建筑结构中也在积极地利用该理论。这里着重介绍我国目前的使用情况。

1. 在建筑结构设计方面

1976年国家建委下达了“建筑结构安全度及荷载组合”的科研课题。1978年又下达编写《建筑结构设计统一标准》的任务。在中国建科院领导下，成立专题研究组和编委会，组织了有关单位开展工作。编委会在参考了国际上的研究成果，特别是JCSS编制的《结构统一标准规范

的国际体系》，采用水准II的概率极限状态设计法（即近似概率法）进行了卓有成效的工作。1981年在昆明召开鉴定会，提出了《建筑结构设计统一标准》(初稿)。1982年7月在九江召开了审查会，通过了该统一标准的送审稿。这样，我国安全度的研究进入了新阶段。去年中国建科院已出版了该册。目前建筑结构有关部门正组织力量研究适用于各种具体结构的基于可靠度理论的规范。

2．在机械工程方面

凌树森先生在文献[3]中对于可靠度理论在机械工程中的应用作了相当详细的介绍。还对该理论在疲劳和断裂研究中的应用作了论述。

同建筑结构相比，机械部门由于元件更为规则，因此使用可靠度理论更加有利。

3．在水工结构设计方面

水工建筑物中许多设计量都不是单一量而是随机量。因此，可靠度理论在水工设计中是有实际意义的。在目前设计规范中，鉴于考虑到许多设计量的不确定性，往往用一些系数进行层层打折的办法。这样的处理一方面使设计方法很不统一，另一方面又不能达到预期的安全度。为此，我们学校1982年成立了"水工结构可靠度"科研组，作为第一步，进行了该理论在重力坝设计中应用的研究[4,5]。

82年以来我们在基本理论上做了如下的工作：

(1) 资料搜集及进行小子样统计方法的研究；

(2) 重力坝结构极限状态方程的研究；

(3) 重力坝可靠度分析方法的研究；

具体完成了如下几方面工作：

(1) 水库坝上游水位年峰值的统计值；

(2) 完成几个山区小型砌石重力坝的可靠度分析；

(3) 完成两个重力坝的验证荷载法校核；

(4) 完成一个实际重力坝安全度的校核。

参 考 文 献

[1] 吴世伟，《结构可靠度》，华东水利学院讲义，1982，9。

[2] 《建筑结构设计统一标准》，中国建筑科学研究院主编。1985。

[3] 凌树森，"可靠度理论及其在机械工程中的应用"，《江苏机械》增刊。1981，5。

[4] 吴世伟，"重力坝可靠度校核方法的探讨"，《华东水利学院学报》，1984，第二期。

[5] 吴世伟、张思俊、余强，"坝上游水位变化规律及统计量"，《华东水利学院学报》，1984，第四期。

Brief Introduction to Structural Reliability

Theory and Its Applications

Shiwei Wu

Abstract

This article gives a brief introduction to the divelopments of structural reliability theory and analysis methods, and the applications of the theory in building structures, machines as Well as hydraulic structures。

结构体系可靠度理论与应用状况

吴 世 伟

一、概 述

文献[1]曾较详细地介绍过结构可靠度理论与应用状况。两年多来，本学科无论在理论上还是在应用上又有相当大的发展。第四次国际结构安全度与可靠度会议去年5月在日本的召开是发展的重要标志。在会议上发表了244篇论文[2]，它们把可靠度课题延伸到断裂、有限元、疲劳、优化设计、土力学、地震工程、海上工程等学科。在理论上除进一步发展与完善静力荷载下构件的可靠度外，正向着动力可靠度以及系统可靠度方向发展。国内可靠度理论与应用也正在加快。特别是随着《工程结构可靠度设计统一标准》和《铁路工程结构设计统一标准》两个国家统一标准以及《公路工程结构设计统一标准》、《水利工程结构设计统一标准》的加速制订，许多需要联合攻关的课题都提出来了[3]，结构体系可靠度分析及其在工程结构中的实用化就是其中的一个重要课题。本文就是在这个基础上提出来的。

二、确定结构体系中某模式失效概率的方法

结构体系失效模式是很多的，这里先讨论某模式（如第i模式）的失效概率的计算。设其失效概率为 P_{fi}，它可以由下式确定[4]：

$$P_{fi}=\int_{-\infty}^{0} f_{Z_i}(Z)dZ \tag{1}$$

式中f_{Zi}为变量Z_i的概率密度函数，Z_i是许多随机变量的函数，它可以通过虚功原理导出，一般表达式为[5]：

$$Z_i=\sum_j a_{ij}M_j+\sum_k b_{ik}L_k \tag{2}$$

式中M_j和L_k分别表示结构的抗力和荷载效应，a_{ij}和b_{ik}分别为与结构有关的系数。

Z也称为功能函数，它还可以写成

$$Z=g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{3}$$

据此，式(1)又可改写为

$$P_{fi}=P(Z_i\leqslant 0) \tag{4}$$

式(4)即结构体系中一个失效模式的失效概率。式中Z_i同结构几何尺寸、抗力以及各种作用效应有关。当各变量分布较复杂，组成的式(2)或(3)又是非线性时，要精确求解$P_{f,i}$就非常困难。目前一般用蒙特卡罗法求解其相对精确值，但较多的是用一次二阶矩法近似地求解[6]。

三、结构体系可靠度的计算方法

结构体系由于它的构件多，构造又复杂，精确计算其可靠度往往非常困难，因此人们不走精确的而走近似的计算途径。国外关于结构体系可靠度的研究情况，文献[6，7]作了相当详细的论述，同时较系统地提出了一些切实可行的方法。这些方法无论对静定或超静定结构都是适用的，现在分述如下：

1．Stevenson-Moses法

对于延性结构，Stevenson和Moses于1970 年导出一种利用塑性铰机构求解其可靠度的方法。设结构体系第i机构的功能函数为Z_i，由式(2)获得Z_i的表达式之后，第i机构的可靠指标即可用一次二阶矩或蒙特卡罗法求得。结构体系的失效机构一般不止一个，设有n个，则对应的功能函数将有Z_1，Z_2，…，Z_n。这时，结构体系的失效概率将是

$$P_f = P(Z_1 < O U Z_2 < O U \cdots U Z_n < O) \tag{5}$$

直接通过上式进行可靠度计算还是很困难的。但当所有的机构完全相关时，式(5)可简化成

$$P_f = \max P_{fi} \tag{6}$$

式中P_{fi}为第i机构的失效概率。

如果所有机构都是统计独立的，则式(5)可简化成

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P_{fi}) \tag{7}$$

或用可靠度表示成

$$P_r = \prod_{i=1}^{n}(1 - P_{fi}) = \prod_{i=1}^{n} P_{ri} \tag{8}$$

式中P_{ri}为第i机构的可靠度，P_r即结构体系的可靠度。

由于通常机构间既不完全相关，也不完全统计独立，而是处在两者之间，因此，Stevenson-Moses法的计算结果会导致偏危险或过份保守。不过本法对静定结构体系可靠度的计算是合理的。

2．Gorman-Moses法

1979年Gorman和Moses对式(5)进一步简化之后认为，在同等条件下，功能函数最小的机构首先破坏，从而引起结构的破坏。因此主张采用下式确定结构体系的可靠度：

$$P_f = P[\min(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)] \tag{9}$$

显然，用式(9)估计结构体系的可靠度，可使问题得到极大的简化。但由于功能函数值最小的机构对应的失效概率不一定都比功能函数值大的机构的失效概率大。而且略去其它机构的失效概率的影响往往是很大的。因此，这个方法很少被采用。

以上两种方法系直接估计结构体系可靠度的点值，一般称为点估计法。由于结构失效概率本身也是一个随机变量，因此，目前人们又采用界限范围估计法确定结构体系的可靠度。

3．结构体系可靠度的一般界限范围

由前面的讨论知，当结构体系机构间完全相关时，可采用式（6）求解其可靠度或失效概率；当各机构间统计独立时，可采用式(7)或(8)求解其可靠度或失效概率。但在一般情况下，结构体系的失效概率处在这两者之间，因此，*Ang*和*Amin*主张用这两种极端情况作为结构体系失效概率的界限范围，即

$$\max_i P_{fi} \leqslant P_f \leqslant 1-\prod_{i=1}^{n}(1-P_{fi}) \tag{10}$$

当P_{fi}较小时，$1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-P_{fi}) \approx \sum\limits_{i=1}^{n} P_{fi}$，于是得到一般界限范围的另一表达式为

$$\max_i P_{fi} \leqslant P_f \leqslant \sum_{i=1}^{n} P_{fi} \tag{11}$$

本法可用于估计结构体系失效概率P_f的界限范围。当机构数目多或P_{fi}不是足够小时，本法算出的界限范围往往偏大。但由于方法简单明了，故常用于结构体系可靠度的初始检验。

4．结构体系可靠度的窄界限范围

针对一般界限法中存在的范围过宽的问题，Ditlevsen于1979年导出了结构体系失效概率的窄界限范围公式。

设结构体系的几个机构的事件为E_1，E_2，…，E_n。根据概率论，Ditlevsen 导得如下的结构体系失效概率界限范围式(12)：

$$P(E_1)+\max\left[\sum_{i=2}^{n}\left\{P(E_i)-\sum_{j=1}^{i-1}P(E_iE_j)\right\};\ 0\right] \leqslant P_f \leqslant \sum_{i=1}^{n}P(E_i)-\sum_{i=2}^{n}\max_{j<i}P(E_iE_j) \tag{12}$$

式中$P(E_iE_j)$为共同事件E_iE_j的概率。当所有随机变量都是正态分布时，借助于机构i、j的可靠指标β_i和β_j，在其相关系数$\rho_{ij}\geqslant 0$条件下，由

$$q_i+q_j \geqslant P(E_iE_j)=P(Z_i<0 \cap Z_j<0) \geqslant \max(q_i,\ q_j) \tag{13}$$

确定。式中

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \Phi(-\beta_i)\Phi\left(-\frac{\beta_j-\rho_{ij}\beta_i}{\sqrt{1-\rho_{ij}^2}}\right) \\ q_j &= \Phi(-\beta_j)\Phi\left(-\frac{\beta_i-\rho_{ij}\beta_j}{\sqrt{1-\rho_{ij}^2}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

而

$$\rho_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}^{*}\ \alpha_{jk} \tag{15}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{*}_{ik} &= \left(\frac{\partial Z_i}{\partial x_k'}\right)_{x^*} \Bigg/ \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial Z_i}{\partial x'_k}\right)^2_{x^*}} \\ \alpha^{*}_{jk} &= \left(\frac{\partial Z_j}{\partial x_k'}\right)_{x^*} \Bigg/ \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial Z_j}{\partial x'_k}\right)^2_{x^*}} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

式中

$$x'_k = \frac{x_k - m_{xk}}{\sigma_{xk}} \tag{17}$$

x_k为变量，对应的均值和标准差分别为m_{xk}和σ_{xk}，x'_k是x_k的约化变量。

具体计算时，求出q_i+q_j，代替式(12)中左边的$P(E_iE_j)$，求出$\max\{q_i,q_j\}$代替式(12)中右边的$P(E_iE_j)$以近似地获得体系的失效概率P_f的界限范围值。

由上面讨论可知，Ditlevsen窄界限法还是比较麻烦的。然而，它往往可以得出很窄的失效概率范围值。尤其是当结构体系的失效概率P_f小时(如小于10^{-4})，结果更加理想。

5．PNET法

针对上述方法存在问题，Ma和Ang等人于1979年把概率网络估算技术用到结构体系可靠度分析中，提出了PNET法。该法认为结构失效机构可以分出主要与次要机构，而从主要机构中又可以选出m个代表机构，它们是通过下述原则选择出来的：把主要机构分为几个组，在同一组中各机构与一个代表机构高级相关，这个代表机构就是该组所有机构中失效概率最高的机构。从相关条件知，它可代表该组所有机构的失效概率。计算时，假定不同组间的代表机构是统计独立的。

根据上述原则，设m个代表机构中，第i个机构的破坏概率为P_{fi}，则结构体系的可靠度为

$$P_r = \prod_{i=1}^{m}(1-P_{fi}) = \prod_{i=1}^{m} P_{ri} \tag{18}$$

对应的失效概率为

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1-P_{fi}) = 1 - \prod_{i=1}^{m} P_{ri} \tag{19}$$

当P_{fi}很小时，上式可近似地写成

$$P_f = \sum_{i=1}^{m} P_{fi} \tag{20}$$

用PNET法计算结构体系可靠度的步骤如下：

(1) 列出主要失效机构及相应的功能函数Z_i。求Z_i的均值、方差，然后用一次二阶矩法求可靠指标β_i，把β_i值由小到大进行排列，并将所得序号作为机构排列次序的依据。

(2) 选择ρ_o值，以作判别机构间相关程序的依据。

(3) 寻找m个代表机构。取1号机构(与最小可靠指标对应)作为第一代表机构。然后用式(15)计算它与其余机构的相关系数ρ_{i1}。若$\rho_{i1}>\rho_c$，则认为第i机构与1号机构而可为1号机构代替；若$\rho_{i1}<\rho_o$，则认为它们之间低级相关，不能互相代替。再从剩下的机构中找出可靠指标最小者作为第二个代表机构，并找出它所代替的机构。重复以上步骤，直完成最后一个机构为止。

(4) 最后，用式(18)式(19)或(20)计算结构体系的可靠度或失效概率。

PN ET法由于考虑各机构间的相关性，因而具有一定的适应性。由于各机构间荷载效应般是高级相关的，加上材料性能所决定的抗力也有较高的相关性，因此各机构间的相关系通常较高，故代表机构一般较少，这样可使计算工作量大大地减少。至于PNET法所得结果具

有较高的精度这点，也已被一些精确方法所检验[6，7]。由于上述优点，PNET法已成为延性结构体系可靠度分析的较为可行的方法。

由于PNET法采用ρ_0作为衡量机构相关性的标准，显然，ρ_0的取值与所得可靠度密切相关。如果取 $\rho_0=1$，则得出过低的可靠度，这是偏保守的；如果$\rho_0=0$，则得出过高的可靠度，所得成果作为设计依据则偏危险。因此，ρ_0的选取是PNET法的一个关键，它应根据主要机构的多少和工程的重要性来选取。一般来说，当主要机构少、设计的工程重要时，ρ_0可取高些，反之则低些。文献[6]建议选择ρ_0为0.7或0.8，后者适用于较小的失效概率。

6．蒙特卡罗法

结构体系可靠度还可以通过蒙特卡罗法进行计算。用该法计算结构体系可靠度时，需要事先判断体系的所有可能失效机构和这些机构的实际破坏条件。当体系所有的可能失效机构已被识别出来之后，蒙特卡罗法求其可靠度的步骤如下：

(1) 对结构体系中每一随机变量的分布，利用随机数产生器或随机数表产生一随机数[9]。用这些随机数产生结构体系中的荷载效应与抗力值，从而就所有可能机构计算其功能函数Z_i值。那些与负功能函数值对应的可能失效机构，即为实际破坏机构；

(2) 重复步骤(1)的计算，得到n个功能函数值，并记录实际失效机构的样本数m；

(3) 把实际失效机构样本数m除以总样本数n即得结构体系的失效概率P_f，

$$P_f=\mathrm{m}/\mathrm{n} \tag{21}$$

为减少样本数量不足引起的误差，蒙特卡罗法的样本数n必须大于引起一次$Z_i<0$所需的平均样本数的100倍，即

$$n>100/P_f \tag{22}$$

蒙特卡罗法抛弃了结构的相关与独立性条件，从模拟的角度出发求解结构体系的可靠度，所得成果的精度与精确解十分接近。因此，目前往往用它作为结构构件或体系可靠度的近似精确解。然而，在实际结构体系中，由于选取大样本使计算工作量变成非常繁重，这就限制了该法的实际应用。但作为结构体系近似计算法结果的检验，蒙特卡罗法还是一个行之有效的方法。

以上六种结构体系计算方法中，四种是点估计法，两种是界限范围估计法。目前较为广泛采用的计算方法，在点估计法方面是PNET法，在界限范围估计法方面则是Ditlevsen窄界限法。至于一般界限法，由于计算简单，可作初始检验用。蒙特卡罗法则用作检验其它近似计算法的精度。

四、结构体系可靠度算例

[例1] 受均布力的简支钢架，可能在弯曲或剪切或弯剪组合作用下失效。设梁截面为50C工字钢，抗拉屈服极限 $f_y=(1923kg/cm^2,\ 0.2)$，均匀屈服剪应力为 $\tau_y=(1000kg/cm^2,\ 0.25)$，均布荷载$\omega=(2t/m,\ 0.25)$。(以上括号中第一数值为均值，第二数值为变异系数)。此外，截面模量S为确定值，$S=2080cm^3$，腹板面积A_{web}也为定值，$A_{web}=139cm^2$。设一切随机变量都是正态分布，现求解本梁的失效概率。

[解]：梁的塑性抗力矩M_p的均值和变异系数分别为

$M_o = f_x \times S = 1923 \times 2080 = 4 \times 10^6 kg - cm = 40t - m$

$V_{Mo} = 0.2$，$(\sigma_{Mo} = 8t - m)$。

抗剪能力V_o的均值和变异系数分别为

$V_o = \tau_x A_{Web} = 1000 \times 139 = 139000kg = 139t$

$V_{vo} = 0.25$，$(\sigma_{vo} = 34.75t)$。

假定梁的所有截面完全相关，因此，梁弯曲和剪切的功能函数分别为

$$g_1 = M_o - \frac{1}{8}WL^2$$

$$g_2 = V_o - \frac{1}{2}WL$$

当把弯曲和剪切的组合失效标准定义为$M/M_o + V/V_o \geqslant 1.0$时，对应的功能函数为

$$g_3 = 1 - \left(\frac{M}{M_0} + \frac{V}{V_0}\right)$$

显然，在上述假定下，弯曲失效在梁的中间截面处，剪切失效在临近支座截面处，而组合失效则在g_3的最小值或$M/M_o + V/V_o$的最大值处，即在离开支座为

$$x_{max} = \frac{L}{2} - \frac{M_0}{V_0}$$

处。在该处

$$g_3 = 1 - \left(\frac{WL^2}{8M_o} + \frac{WM_0}{2V_0^2}\right)$$

在W、M_o、V_o都完全相互独立下，与弯曲和剪切作用对应的各自失效概率为

$$P_{f1} = \Phi\left[-\frac{\overline{M}_0 - \frac{1}{8}\overline{\omega}L^2}{\sqrt{\sigma_{M_o}^2 + (\frac{1}{8}L^2\sigma_w)^2}}\right] = \Phi\left[-\frac{40 - \frac{1}{8} \times 2 \times 6^2}{\sqrt{8^2 + (\frac{1}{8}6^2 \times 0.5)^2}}\right]$$

$$= \Phi(-3.730) = 0.000096$$

$$P_{f2} = \Phi\left[-\frac{\overline{V}_0 - \frac{1}{2}\omega L}{\sqrt{\sigma_{v0}^2 + (\frac{1}{2}L\sigma_w)^2}}\right] = \Phi\left[-\frac{139 - \frac{1}{2} \times 2 \times 6}{\sqrt{34.75^2 + (\frac{1}{2}6 \times 0.5)^2}}\right]$$

$$= \Phi(-3.824) = 0.000067$$

功能函数g_2系非线性式，没有简单公式可以直接求解。采用JC法[5]求得可靠指标β和失效概率如下：

$$\beta = 3.729, \quad P_f = 0.000097$$

由于三种失效模型通过随机变量联系着，存在着相关关系，因此采用系统可靠度界限公式。先用式(11)得木梁失效概率的一般界限范围为

$$0.97 \times 10^{-4} \leqslant P_f \leqslant 2.6 \times 10^{-4}$$

为求本梁失效概率的窄界限，需用式(15)求相关系数。为此，先用式(16)求得方向余弦α_{ij}*值如下：