

831515

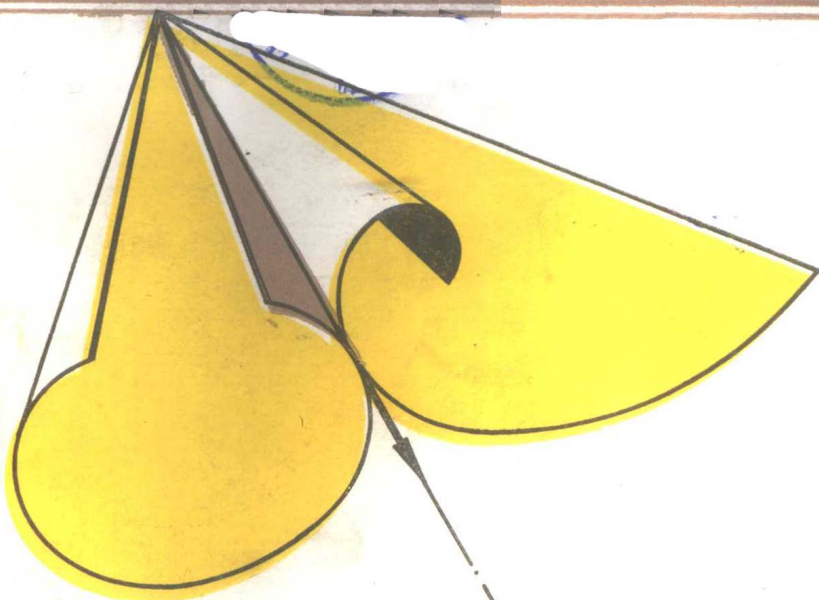
● 高等学校教材

刚体动力学

● 贾书惠

3325

1055



GANGTI DONGLIXUE

高等教育出版社

高等学校教材

刚体动力学

费书惠



高等教育出版社

内 容 简 介

本书系统地讲述了刚体动力学的基本知识,包括刚体绕定点的运动学、刚体运动微分方程式的列写方法、求解方法以及刚体的运动特性等;讨论了刚体动力学在陀螺导航、空间技术及旋转机械等工程领域中的应用,最后还介绍了多刚体系统动力学中的各种研究方法。

本书可作为高等学校高年级学生及研究生课程的教科书或教学参考书,也可供陀螺导航、空间技术及其他与陀螺现象有关领域的科技人员阅读。

高等学校教材

刚体动力学

贾 书 惠

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.375 字数 250 000

1987年9月第1版 1987年11月第1次印刷

印数0 001—03 160

ISBN 7-04-000174-8/TB·5

书号: 15010-0910 定价: 1.85元

前 言

刚体动力学是一门比较古老的学科，但在现代科学技术中获得了愈来愈广泛的应用，关于刚体动力学的研究也取得了新的进展。在航天技术、陀螺技术、转动机械、甚至运动生物力学等技术领域中，深入掌握刚体动力学的知识已经是十分必要的了。现代科学技术还提出了许多复杂机械系统的动力学问题，与此相应，近二十年来发展了多刚体系统动力学的理论。在这种理论中，刚体是组成系统的“单元”。本书主要讨论单个刚体（也包括结构简单的刚体系统，如陀螺体、框架陀螺仪等）的运动学、动力学以及它们的工程应用；并初步介绍了多刚体系统动力学的研究内容及各种方法的特点，作为进一步学习和研究这种理论的基础。

本书注意对基础理论的系统讲解，并重视各种理论方法的实际应用；对只有理论意义而无应用价值的一些问题（如刚体定点运动的柯娃列夫斯卡娅情况）则删去不讲。对动力学问题，不但要求学会在数学上求得解答，更要求了解运动的特性，有时还要深入理解运动特性的物理本质。本书强调了这方面的内容，并在重点处设置了思考题与概念题，以加深对这些内容的理解。还需指出，对较为复杂的动力学问题，已无法求得解析解，必须借助电子计算机寻求数值解，这也是解决刚体动力学问题的一个重要手段。本书中有些习题要求读者用电子计算机求解；在对运动微分方程积分时，可调用程序库中的标准程序。

本书的材料选自作者近年来在清华大学为研究生及高年级大学生开设的“陀螺力学”、“刚体及刚体系统动力学”、“高等动力学”等课程的内容。北京航空学院张安厚老师审阅了书稿并提出了宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

作者

1986年9月

目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 刚体动力学简介	1
§ 1.2 数学补充知识	5
习题	14
第二章 刚体绕定点运动的运动学	16
§ 2.1 关于刚体绕定点有限转动的欧拉定理	16
§ 2.2 用方向余弦矩阵解析地描述刚体的定点运动	19
§ 2.3 用欧拉角解析地描述刚体的定点运动	25
§ 2.4 用欧拉参数解析地描述刚体的定点运动	36
习题	51
第三章 刚体的运动微分方程式	57
§ 3.1 刚体的质量几何	57
§ 3.2 绕定点运动刚体的动量矩与动能	65
§ 3.3 刚体绕定点运动的运动微分方程式	68
§ 3.4 凯恩方法	73
§ 3.5 刚体作其他运动的情况	81
§ 3.6 刚体运动微分方程式积分方法概述	93
习题	94
第四章 刚体动力学的古典问题	100
§ 4.1 刚体绕定点的自由运动	100
§ 4.2 在重力作用下刚体绕定点的运动	115
§ 4.3 自激陀螺	126
§ 4.4 陀螺体的运动	133
§ 4.5 刚体运动的其他情况	142
习题	150
第五章 刚体动力学的某些工程应用	154
§ 5.1 人造地球卫星的姿态稳定问题	154
§ 5.2 陀螺仪表的工作原理与原理误差	172

§ 5.3 陀螺效应对转子临界转速的影响	205
习题	215
第六章 多刚体系统动力学基础	221
§ 6.1 多刚体系统动力学的研究对象与研究内容	221
§ 6.2 用常规方法建立多刚体系统的数学模型	225
§ 6.3 罗伯逊-维滕堡 (R & W) 方法	236
§ 6.4 凯恩方法	248
§ 6.5 变分方法	256
习题答案	269
附 录	276
参考文献	288

第一章 绪 论

§ 1.1 刚体动力学简介

通常所说的刚体动力学，其主要内容是研究刚体绕定点的运动。这是因为刚体的一般运动常可分解为质心的运动及相对质心的转动，而前者可归结为质点的动力学问题。刚体绕定点运动是从十八世纪开始研究的。当时，由于航海事业的发展，提出了关于船舶摇摆运动规律的问题，欧拉（1707—1783）最初的研究就属于这类问题。天文学中关于建立地球进动与章动的解析理论也从另一方面推动了刚体绕定点运动的研究。此外，这种研究在外弹道学中也有重要意义。应该指出，对本问题研究的发展过程中，探索力学的内在规律也是一个动力。

十八、十九世纪关于刚体定点运动的研究工作首先集中在如何列写运动微分方程式及如何对运动微分方程式进行积分（求解），特别是关于“重刚体”（主动力只有重力，这是主动力的最简情况）的定点运动解决得比较完善。这一部分研究工作常称为**定点运动的古典理论**。欧拉于1758年最先列出了刚体定点运动的动力学方程式，这些方程式后来就被称为欧拉动力学方程。欧拉还研究了外力矩为零的情况，即刚体绕定点的自由运动或惯性运动；这时运动微分方程式有精确解。三十年后，拉格朗日（1736—1813）发表了著名的《分析力学》，其中第九章解决了定点运动微分方程式在新情况下精确求解的问题，这就是拉格朗日情况。这时，刚体的质量分布受到了限制，即刚体必须是旋转对称的，但重心则可位于对称轴上任何一点。此后的很长时期，研究工作都只限于对上述两种情况的补充与完善，却再也没有找到新的可积情况。^①1849年雅可比（1804—1851）提出了所谓第四积分问题，即若要刚体绕定点运动的运动微分方程可积，必须找到

第四个首次积分。欧拉、拉格朗日都是不自觉地找到了第四个首次积分，才能最终解决问题。于是，能否找到新的可积情况就归结为在什么情况下还存在第四积分。鉴于问题的难度大，1886年巴黎科学院以“为完善定点运动的解法”为题进行征文，并设置了包尔奖金。1888年的第三次评选会上俄罗斯青年女数学家柯娃列夫斯卡娅（1850—1891）的论文中选。她提出了运动微分方程的第三种可积情况，常称为柯娃列夫斯卡娅情况。在这种情况下，对刚体质量分布的限制更严（除对称性外还要求惯量比1:2），但重心可在赤道平面上任意一点。柯娃列夫斯卡娅感到在实数域内积分的方法行不通，因而转向了复变函数并取得了成功。评选委员会对她的成果及所用的方法都给予了很高的评价。从拉格朗日提出的第二种可积情况到柯娃列夫斯卡娅的工作整整经过了一百年。柯娃列夫斯卡娅的工作给了定点运动的研究以新的推动，但后来的长期工作证明了：除上述三种情况外，再没有任何情况下能找到第四积分，除非对运动的初始条件加以限制。

刚体定点运动的研究工作在陀螺仪器的发展过程中获得了新的进展。当刚体具有很高的自转角速度时，就成为人们通常所称的陀螺。它的独特的力学特性早已为人们所熟知，但真正把这些特性用于实际，却是十九世纪的事了。1852年傅科（1819—1868），在完成了著名的傅科摆后一年，又设法应用高速陀螺的定轴性来测定地球的自转。他使用了所谓卡尔丹支架来实现陀螺转子的定点支承（图1.1）。这种方式是陀螺仪器中最基本的支承方式，后来这种支承形式的陀螺仪就称为框架陀螺仪。其实，这种支承方式在西方于十三世纪就已为人所知了，在中国则出现得更早。而卡尔丹则是十六世纪的医生兼数学家，不过现在国际上仍然通用这个名称。真正实用的陀螺仪器是二十世纪才出现的，现在这些仪器作为控制系统中的量测元件或执行元件已广泛用于航空、航海与航天技术中，高速陀螺动力学的研究方法与经典理论不同，它着重研究在转子高速自转情况下运动微分方程的近似解法，以及在载体作机动运动时仪器的各种误差与补偿方法，这些

就构成了实用陀螺仪理论的内容。在框架陀螺仪中，内外环轴承处的摩擦是主要的干扰源。为了提高仪器精度，还研制了液浮陀螺、静电陀螺及动压陀螺。它们分别借助液体浮力、静电吸力及动压气膜实现定点支承，因此在转子或转子组合件上还作用有流体动力及电磁力，运动微分方程式的求解问题显然更为复杂。近十几年来还发展了一种高精度、高可靠性、低成本的挠性陀螺

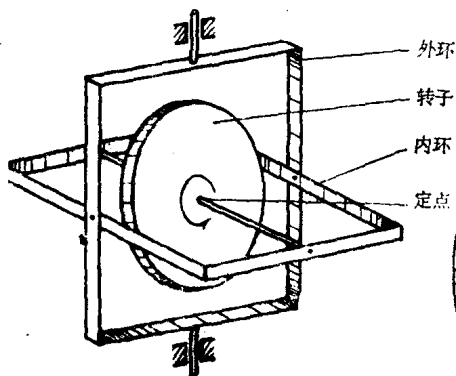


图 1.1

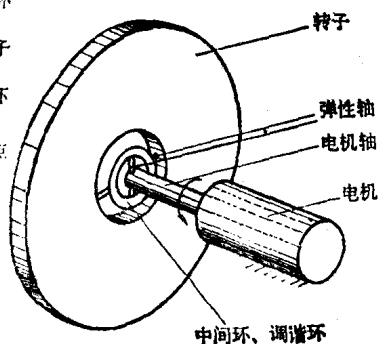


图 1.2

（图1.2），它实质上是一种内卡尔丹环陀螺。利用中间环振动时所产生的惯性力矩来平衡弹性轴的弹性恢复力矩，可以在某一确定转速下使转子所受绕定点的力矩准确为零；因此，转子轴的定向精度很高，而这种陀螺仪也就称为动力调谐陀螺仪。显然，研究这类陀螺仪的运动时，我们将遇到作定点运动的刚体系统。

自从1957年人类首次发射人造地球卫星以来，航天技术发展得十分迅速，因而形成了一门“人造天体力学”的新兴学科。它与古典的天体力学不同之处在于人造天体（卫星、飞船、空间站等）还可受人力的控制力作用。它主要分轨道力学及姿态动力学两方面，而后者内容就是研究这些人造天体相对质心的运动——主要是姿态的稳定与控制。由于作用力矩可以是复杂的干扰力矩和控制力矩，关于定点运动的经典理论在这里获得了很大的丰富与发展。1958年美国卫星“探险者一号”按照古典理论设

计成绕最小惯量轴自旋，但入轨后不久即出现失稳。研究表明，这是由于卫星的四根挠性天线振动时，材料内阻消耗了能量所造成的；于是人们从刚体的力学模型又过渡到变形体或混合系统的力学模型。姿态动力学中就要研究这类复杂力学模型的运动与控制问题。当然，这里使用的主要是近似解法及数值解法。

当前世界上正经历着一场新技术革命，其重要内容之一是发展各种类型的机器人。机器人是一个由计算机控制的复杂的光机电系统；但其运动问题则属于刚体系统动力学的范畴。此外，关于人体运动的研究在体育科学中也得到了应用。例如体操及跳水运动员怎样控制身体各部的动作才能作出复杂而新颖的空翻动作、跳高运动员怎样改进技术才能跳过更高的高度，以及如何制定宇航员在完全失重情况下的动作规范等，都是当前的研究课题。在这些研究中通常把人体简化成若干刚体铰接而成的树状结构。近十几年来逐渐形成了一门新的学科——**多体系统动力学**，它的研究对象不只有人体及机器人，也包括车辆、复杂的航天器等。1977年及1985年在德国的慕尼黑及意大利的乌迪内分别召开了第一次及第二次多体系统动力学的国际学术会议，论文的内容涉及所有上述各领域。由于模型复杂（有时有十几个刚体），所以研究的途径是寻找适当的方法列写系统的运动微分方程式，然后用计算机求数值解。在美国和德国还有人用计算机进行符号推导，直接利用计算机列写运动微分方程式。由此可见，把计算机引入刚体动力学，为解决现代技术提出的复杂问题开辟了广阔的前景。

刚体动力学领域中的另一个研究方向就是研究含有陀螺效应的各种系统的共同特性，这就是**陀螺耦合系统动力学**。早在上一世纪末汤姆孙（W. Thomson 1824-1907）和泰特（P. G. Tait 1831-1901）就曾指出：即使系统中没有陀螺，在某些情况下运动微分方程式中也仍然会出现引起陀螺效应的“陀螺项”。因此，有必要作统一的研究，以明确陀螺项对系统运动的作用。当前，在陀螺项对系统定态运动稳定性的影响方面，已得出了许多经过严格证明的定理，其中最著名的有开尔文（Kelvin 原名

W. 汤姆孙)、切塔耶夫 (Четаев 1902-1959) 等人提出的定理。麦若维奇 (Meirovitch) 则研究了陀螺耦合系统特征值的求法。

本书着重介绍刚体动力学的基本知识及某些应用, 主要是单个刚体的运动学与动力学, 以及卫星姿态动力学、实用陀螺仪理论、转子动力学的初步知识。

§ 1.2 数学补充知识

符号说明: 以 $\mathbf{a}$ 表示向量, $\mathbf{P}$ 表示张量; a_i 及 p_{ij} 分别表示向量 $\mathbf{a}$ 及张量 $\mathbf{P}$ 在某直角坐标系中的分量; $\{a_i\}$ 或 $\{a\}$ 表示列阵; $[p_{ij}]$ 或 $[p]$ 表示矩阵; a 或 $|\mathbf{a}|$ 表示向量 $\mathbf{a}$ 的模。为简化书写, 在不致引起误解的情况下也以 a , P 分别表示列阵及矩阵。下面的讨论仅限于三维欧氏空间。

1.2.1 向量的乘积

两向量的标量积 (点积) 为一标量:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

由于向量也可用其三个分量的列阵表示, 上式的矩阵表达式为:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

两向量的向量积 (叉积) 为一新的向量:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3$$

其中 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 为沿坐标轴的单位向量。上式的矩阵表达式为:

$$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} \quad (1.1)$$

其中 $\tilde{\mathbf{a}}$ 为由列阵 $\mathbf{a}$ 各元按下式组成的 3×3 阶矩阵, 称为向量 $\mathbf{a}$ 的叉乘矩阵

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$\tilde{\mathbf{a}}$ 为反对称矩阵, 故有

$$\tilde{\mathbf{a}}^T = -\tilde{\mathbf{a}}$$

两向量的并矢积(并矢)为一新量——张量:

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}\mathbf{b} \quad (1.3)$$

张量 $\mathbf{P}$ 有九个分量 p_{ij} ($i, j=1, 2, 3$), 它们和 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的分量间的关系定义为

$$p_{ij} = a_i b_j \quad (i, j=1, 2, 3)$$

或用张量 $\mathbf{P}$ 的矩阵表达式 $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ 表示

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T \quad (1.4)$$

1.2.2 张量简介

首先研究一下我们已经熟悉的向量。设有一向量 $\mathbf{r}$, 它在直角坐标系 I 中的分量(通常称为坐标)是三个标量 r_1, r_2, r_3 。当坐标系 I 变换为坐标系 I' 时, 它的三个新分量为 r'_1, r'_2, r'_3 。如果两个坐标系的变换矩阵为 $\mathbf{A} = [l_{ij}]$, 此处 l_{ij} 为新老坐标轴夹角的方向余弦

$$l_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (1.5)$$

$\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j$ 分别为新老坐标系中沿坐标轴的单位向量。此外还有

$$\sum_{k=1}^3 l_{ik} l_{jk} = \delta_{ij}, \quad \sum_{k=1}^3 l_{ki} l_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (1.6)$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克符号

$$\delta_{ij} = 1 - \frac{1}{4} (i-j)^2 [5 - (i-j)^2] = \begin{cases} 1, & \text{当 } i=j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (1.7)$$

满足式(1.6)的矩阵常称为正交矩阵, 相应的变换则称为正交变换。这时在向量的新老分量之间有关系式

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}$$

或

$$r'_i = \sum_{j=1}^3 l_{ij} r_j \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.8)$$

由此可见, 并不是任意三个标量的组合都可以代表向量。向量的三个分量随坐标的变换而不同, 并且满足式(1.8)。因此可以给向量下一个新的定义: 向量 $\mathbf{r}$ 是一个包含 $3^1 = 3$ 个分量 $r_i (i=1, 2, 3)$

的量，当坐标变换时，这些分量满足变换关系式(1.8)。向量是自然界中存在的许多物理量（如力、速度等）的数学概括，它不是人们杜撰的。

张量也是一些客观物理量的抽象和概括，它可看成向量的推广：张量 $\mathbf{P}$ 是一个包含 $3^2=9$ 个分量 p_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 的量，当坐标变换时，这九个分量满足下列变换关系式

$$p'_{ij} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 l_{im} l_{jn} p_{mn} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (1.9)$$

仔细考察标量、向量及张量的定义。发现它们都有类似的性质，因此可以分别称为**零阶张量**、**一阶张量**及**二阶张量**。仿此可得三阶、四阶、……、 N 阶张量，其定义为：

N 阶张量是一个包含 3^N 个分量 $p_{ijkl\cdots}$ (N 个下标) ($i, j, k, \cdots = 1, 2, 3, \cdots$) 的量，当坐标变换时，这些分量满足下列变换关系式

$$p'_{ijkl\cdots} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{q=1}^3 \cdots \sum l_{im} l_{jn} l_{kq} \cdots p_{mnq\cdots}$$

在本书中只使用二阶张量，所以以后所说的张量均指二阶张量。还需说明，由于上面定义张量的基础是在笛卡尔直角坐标系之间变换，故这种张量称为**笛卡尔张量**（或**仿射正交张量**）。显然，它是普遍情况下张量的一种特例。

张量 $\mathbf{P}$ 既然有九个分量，最好用矩阵表示

$$\mathbf{P} = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

这就是张量 $\mathbf{P}$ 的矩阵表达式。其各分量在不同坐标系中有不同的值，它们的变换关系式(1.9)也可用矩阵表示：●

●由式(1.9)得

$$[p'_{ij}] = \left[\sum_m \sum_n l_{im} l_{jn} p_{mn} \right] = \left[\sum_n \left(\sum_m l_{im} p_{mn} \right) l_{jn} \right] = \left[\sum_n q_{in} r_{nj} \right]$$

其中 $q_{in} = \sum_m l_{im} p_{mn}$ $r_{nj} = l_{jn}$

$$P' = APA^T \quad (1.10)$$

即当坐标系变换时, 表示张量 $\mathbf{P}$ 的矩阵 $\mathbf{P}$ 也要进行正交变换, 才能求出张量在新坐标系中的各分量。还需指出, 虽然向量的分量在坐标变换时要发生变化, 但是向量本身并不依赖于坐标系。同样, 当坐标系不同时, 张量的分量将发生变化, 但张量本身则是一个不依赖于坐标系的量。

下面举几个张量的例子。

例1 三维弹性体内一点的应力状态

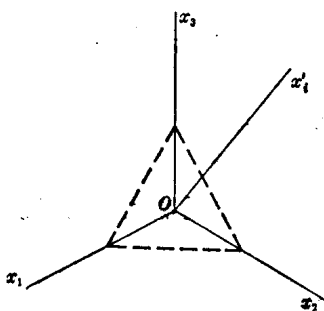


图 1.3

对弹性体内某一点作任意方向的截面, 如果能知道该点附近面积微元上的应力, 即可说明弹性体内该点的应力状态。为此考虑如图 1.3 所示之四面体微元的平衡。当体积很小时, 体积力比起面积力来是高阶微量, 可以忽略不计; 于是得平衡条件

$$p'_i s = p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3$$

其中 p_j 为 j 面 (垂直于 x_j 轴之面) 上的应力, s_j 为 j 面之面积, p'_i 为 i' 面 (垂直于新坐标系之 x'_i 轴) 上的应力, s 为 i' 面之面积。上式还可写为

$$p'_i s = p_1 s l_{i1} + p_2 s l_{i2} + p_3 s l_{i3}$$

$$\therefore p'_i = \sum_{m=1}^3 l_{im} p_m$$

将 p'_i 向新坐标系 x'_1, x'_2, x'_3 投影, 并以 p_{ij} 表示 i 面上的应力沿 j 轴的分量, 则有

$$p_{ij} = \sum_{m=1}^3 l_{im} \left(\sum_{n=1}^3 p_m l_{jn} \right) = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 l_{im} l_{jn} p_m \quad (i, j=1, 2, 3)$$

或 $[q] = [l][p] \quad [r] = [l]^T$

由以上得

$$[p'] = [q][r] = [l][p][l]^T$$

或

$$P' = APA^T$$

故知 p_{ij} 在坐标变换时符合规则 (1.9), 于是将 p_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 的总和称为弹性体内 O 点的应力张量 $\mathbf{P}$, 其矩阵表达式为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

由平衡关系可推出 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, 故知应力张量是一个对称张量, 独立的分量只有六个。

例2 二次型的系数

设有三变量的二次型

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 c_{mn} x_m x_n$$

现在证明: 如果 x_i 构成一向量, 则系数 c_{mn} 构成一张量。

当坐标变换时, 有

$$x'_i = \sum_{m=1}^3 l_{im} x_m$$

及

$$x_m = \sum_{i=1}^3 l_{im} x'_i$$

代入二次型 φ , 得

$$\begin{aligned} \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 c_{mn} \left(\sum_{i=1}^3 l_{im} x'_i \right) \left(\sum_{j=1}^3 l_{jn} x'_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 l_{im} l_{jn} c_{mn} \right) x'_i x'_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c'_{ij} x'_i x'_j \end{aligned}$$

其中

$$c'_{ij} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 l_{im} l_{jn} c_{mn}$$

由此可知, 二次型 φ 的系数满足变换关系式 (1.9), 它们的总和构成张量 $\mathbf{C}$ 。由于 $x_i x_i$ 与 $x_i x_i$ 是同类项, 通常令 $c_{ii} = c_{ii}$ 且等于此项系数的一半, 因而 $\mathbf{C}$ 是一个对称张量。

也可以使用矩阵形式的变换关系式 (1.10), 上述证明过程将变得简洁。二次型 φ 可用矩阵形式表达

$$\varphi(x) = x^T C x$$

其中 $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, $C = [c_{ij}]$ 。当坐标变换时, 有

$$x' = Ax$$

及

$$x = A^T x'$$

其中 A 为坐标变换矩阵 (正交矩阵)。将上式代入二次型 φ , 得

$$\varphi'(x') = x'^T A C A^T x' = x'^T C' x'$$

此处

$$C' = A C A^T$$

系数矩阵 C 满足变换关系式 (1.10), 因而它代表一个张量 C 。

例3 两向量的并矢

设有两向量 a 、 b 及其并矢 ab 。它们在坐标系 I 及 I' 的矩阵表达式分别为 a 、 b 、 ab^T 及 a' 、 b' 、 $a'b'^T$; 由坐标系 I 到 I' 的坐标变换矩阵为 A 。则有

$$a' = Aa,$$

$$b' = Ab$$

$$\therefore a'b'^T = Aa (Ab)^T = A (ab^T) A^T$$

根据定义 (1.10) 可知 ab 确实是一个张量。

1.2.3 张量运算

下面给出张量各种基本运算的定义及由此导出的各种运算规则。

张量加法 两张量 P 、 Q 之和为一新张量 R , 表示为

$$P + Q = R$$

且有

$$R = P + Q$$

即: 张量 R 的各分量为 P 、 Q 中相应分量的和。

根据张量加法, 可将张量用并矢表示:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

引入向量 p_1 、 p_2 、 p_3 及沿坐标轴的单位向量 e_1 、 e_2 、 e_3 ; 它们的矩阵表达式分别为

$$\mathbf{p}_1 = [p_{11}, p_{12}, p_{13}]^T, \quad \mathbf{p}_2 = [p_{21}, p_{22}, p_{23}]^T,$$

$$\mathbf{p}_3 = [p_{31}, p_{32}, p_{33}]^T$$

$$\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T, \quad \mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T$$

则式(1.11)可写为

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \mathbf{p}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{p}_2^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{p}_3^T \quad (1.12)$$

因而可将张量 $\mathbf{P}$ 用并矢表示:

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{p}_3 \quad (1.13)$$

用类似的方法, 如果将矩阵 $\mathbf{P}$ 写成九个矩阵之和, 每个矩阵只有一个非零元素等于 $\mathbf{P}$ 的一个元, 则可推得

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.14)$$

此式常称为张量的九元表达式。如果再引进元素为向量的列阵 $\mathbf{e}$

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}\} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]^T \quad (1.15)$$

则由式(1.12)还可写出

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} \quad (1.16)$$

从而将张量 $\mathbf{P}$ 与它的矩阵表达式 $\mathbf{P}$ 用坐标轴单位向量的并矢联系起来。

在后面的推导中还经常遇到单位张量 $\mathbf{E}$, 它的矩阵表达式为单位矩阵 $\mathbf{E}$, 易证

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad (1.17)$$

张量与标量的乘积 张量 $\mathbf{P}$ 与标量 m 的乘积仍为一张量 $\mathbf{Q}$, 表示为

$$m\mathbf{P} = \mathbf{Q}$$

且有

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{P}$$

即: 张量 $\mathbf{Q}$ 的各分量为张量 $\mathbf{P}$ 的相应分量与 m 的乘积。

向量与张量的点乘

右乘: $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}$ 为一新向量 $\mathbf{a}'$, 由下式确定

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}_1 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{e}_2 (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{e}_3 (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{a}) \quad (1.18)$$

或

$$a'_1 = p_{11}a_1 + p_{12}a_2 + p_{13}a_3$$

$$a'_2 = p_{21}a_1 + p_{22}a_2 + p_{23}a_3$$