天文大地网及大规模三角网平差方法二则

刘述文编

中国工业出版社

大規模天文大地网的严密平差，国际上当推H.博尔兹法、O.爱格特法和H.沃尔佛的逐漸趋近法較为优秀。本书即編入了后二种方法（H.博尔兹法我国书刊上已有論述）。书中第一部分叙述了經K.阿諾德簡化的爱格特平差法；第二部分闡明了H.沃尔佛的逐漸趋近法。

本书可供从事天文大地网平差計算的工程技术人員和科学研究人員参考。

天文大地网及大規模三角网平差方法二則

刘述文編

*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯（北京三里河国家測繪总局）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

（北京市书刊出版事业許可証出字第110号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 787×1092 1/16·印張 5 1/8·字数 114,000

1963年11月北京第一版·1963年11月北京第一次印刷

印数 0,001—1,155·定价(10-8)0.84元

*

統一书号：15165·2011(測繪-54)

序　言

我国幅員辽闊，全国天文大地网条件方程式的数目极为龐大，任何計算工具和任何計算方法都不能一次完成这种任务。因此，将全国天文大地网分为許多部分网，各自独立平差，然后逐次将各部分网熔鑄为一个更大的网，最后将全国的网熔鑄为一个整网。这种熔鑄（in einem Guss）为一个整网的方法对我国的大地測量是十分重要的。我国測繪科学研究工作者在这一学术領域內，也已經取得了一定成就。欧美各国有关这方面研究，以德文資料較多。回顾自克吕格首創著名的两組平差法以后，陆續出現了三个优秀的方法。首先出現的是博尔兹（H. Boltz）的扩展法和代替法（1923～1938），統称为博尔兹法。这个方法至今还是适用的，应用电子計算机解答法方程式也是可行的。应用这个方法，有时可以应用W. 耶列或K. 佛里得里西的方法，有时可以应用編者所作的定式法相配合。如果假設有一万个条件方程式，采用这种方法平差时，則最后扩展式有 $(10\,000)^2$ 个系数，組成了一个具有一万行和一万列的大矩陣。因此逐次平差中的計算格式是比較龐大的。这一方法在我国书刊上已有論述，故本书不再贅述。

国际上三个优秀的方法中，除了博尔兹的方法外，就是本书所論述的O. 爱格特的方法和H. 沃尔佛的逐漸趋近法。

O. 爱格特方法已經不是原来的O. 爱格特方法，而是經过了曲折的道路，最后由K. 阿諾德簡化出来的方法（1936～1955）。这个方法，在推算主平差中的条件方程式的手續不太繁复；三角网为鎖形时，主平差的条件方程式不多。从而就能把許多部分网熔鑄在一起。K. 阿諾德的論文載于柏林德国科学院大地测量研究所公报 Nr. 7，其书名为：Das abgekürzte Eggert'sche Verfahren zum ausgleichen grosser geodätischer Systeme nach der Methode der kleinsten Quadrate, 1955。本书第一部分即系依据該书編写而成。这个方法对于解答法方程式，主張应用所謂現代的高斯約化法的格式；其格式內所得的权系数矩陣式，不能由电子計算机直接表出。这个方法，不論部分网的个数多么大，把部分网逐次联合起来的主平差計算与同时联合起来是相同的，因之不須作出联合三角网的法方程式。这是这个方法的主要优点。

H. 沃尔佛（H. Wolf）的逐漸趋近法与其他的趋近法不同，在主平差中无須作出法方程式和条件方程式，更不用解答法方程式，因此計算可能簡单一些。本书第二部分就是叙述这个方法。是依据H. 沃尔佛所著："Die strenge Ausgleichung grosser astronomisch-geodätischer Netze mittels schrittweiser Annäeherung. 1950" 一书編写而成。

上述三个方法是天文大地网平差的重要参考資料，都是可以应用的方法。但各有其特点，如欲綜合应用，則有一定限制。

本书是編者自学中随讀随編写而成，由于編者水平有限，謬誤在所不免，尚祈讀者指正。

刘述文　序于北京

1963年1月

目　　录

第一部分　爱格特的平差方法

第一章　爱格特方法的严正性之一般証明

§1　爱格特的平差方法发展經过概述

爱格特（O. Eggert）是德文测量手册（Handbuch der vermessungskunde von W. Jordan）的編者之一，是以前柏林高等工业学校的教授，也曾經有一个时期担任过波茨坦大地测量研究所的所长。

依最小二乘法的理論，本来就必須用直接观测值及其改正数进行平差才是合于平差原則的；假若将直接观测值之函数視为直接观测值加以改正数进行平差，这是不合于平差原則的。但在实用上有不少例子违背了这种原則，例如著名的赫尔默特（Helmert）天文大地网平差方法，以及在低級控制网的平差中普遍地用角度改正数而不用方向改正数进行平差等等。爱格特既感覚到赫尔默特天文大地网平差方法中的大地綫及其方位角不是直接观测值；另一方面他也感覚到互相結合的三角鎖可以分为互相独立的若干个三角鎖段而各自独立地进行平差，并依克吕格两組平差法的观点，将这些互相独立平差的条件視为第一組，而将联結各独立三角鎖段的条件視为第二組；他又进一步感覚到第二組条件的改化条件可以虛拟观测值的条件代替之（这就应用了赫尔默特所說的部分等价）。由是爱格特于1936年7月在波罗的海大地测量委員会第九次会議上报告了他的創造性論文“大規模三角网之平差”。此文除登載于“Verh. d. Balt. Geod. Kommission, 1936. Helsinki 1937”上之外，爱格特还摘要編入测量手册一书中（該书第三卷之第七和第八版均載有之）。但該論文只是就特别簡单的情形而論述的，其所說的部分网都是互相独立的单三角鎖，而爱格特对于他創作的平差方法也无严格的数字証明。因此，在該次会議上提出了关于数字严格性的追問，当时爱格特只是答称“这是完全严格的解”。在这次会議之后，爱格特也未发表关于其平差方法的一般性及严格性之証明，因而引起了人們的怀疑。

爱格特还在大地测量公报（Bulletin géodésique 1936 P. 474～480）上发表了“欧洲三角网平差之貢献”一文，其中又提出了他的新方法。这种新方法的实质，就是把两个互相邻接的三角鎖視为在一个单一的观测过程中所观测的，由是两个部分鎖公共边上的两个方向观测結果为这两个部分鎖所共有，因而这两个部分鎖不是互相独立的了。爱格特认为在这样的情况下，公共方向的改正数在两个部分鎖的平差中只应用$\frac{1}{2}$的权。爱格特把公共边的两个方向观测結果在两个部分鎖内各用一个記号表示，例如用t，u和t'，u'，而在总网的条件方程式中附加强制条件：

$$t-t'=0$$

及

$$u-u'=0$$

爱格特虽然把他以前的方法作了进一步的扩展，但这种扩展的正确性也未加証明。以后W. 耶列（W. Jenne）及K. 佛里得里西（K. Friedrich）在波茨坦大地测量研究所公报（1951年 Nr. 5）中发表了“具有零系数的綫性方程式系之几何直观解法”一文，其中討

論了爱格特方法的严格性。但耶列的論述幷非一般的証明，只是就个别情况而言，这样的証明幷不是完整的。

因为爱格特的方法在一段时期內沒有一般的严格的証明，因之人們就发生了顾虑，L.阿斯卜倫特（L. Asplund）在其“关于大規模三角网平差的一些方法”（Stockholm, 1945年）一文中，认为爱格特对于公共方向的处理意見仅仅是近似的，因而不能达到严密的平差。

H.沃尔佛（H. Wolf）在邦堡实用大地測量研究所公报（Veröffentlichungen des Instituts für Erdmessung, Bamberg）1949年 Nr. 1 中发表了“中欧三角网基础”一文，其中把爱格特的意見更加扩展，即一个方向若在 n 个部分网內都出現的話，則在部分网平差中，其权只应当是 $\frac{1}{n}$，但对于这种扩展措施仍未加証明。沃尔佛在邦堡大地測量研究所 1949 年 Nr. 3 公报中又发表了“博尔兹扩展法在平差計算中之地位”一文，其中說：“构成格网形状或閉合环的三角鎖系，用爱格特的方法平差是优越的。若三角网是連續网的形式，則我們可将各部分网中无强制的平差視为第一組而首先进行，各部分网間公共边所构成的导綫上之方向恒等条件和边长恒等条件可視为第二組之条件。……”因此，沃尔佛不仅将爱格特的方法应用于三角鎖，而且应用于連續网了。

以前的邦堡实用大地測量研究所在平差中欧三角网时，曾經用过爱格特的方法。在联結两个不独立的三角鎖和三角网的平差中，阿斯卜倫特对于爱格特的方法提出了异議。沃尔佛在大地測量研究所公报 1950 年 Nr. 10 的“对于三角网联結之貢献”一文中答复了阿斯卜倫特的异議。但沃尔佛是由經驗发現爱格特方法和严格的最小二乘法在实用上完全一致，沒有从理論上作一般的証明。

耶列在以上提到的論文中以及在波茨坦大地測量研究所由 1939 年 4 月至 1940 年 3 月的所长年报中，曾經作了以下的結論：爱格特方法是可能进一步扩展于一般的，即若一个方向出現于 n 个部分三角网中时，則在各部分网平差中可令其权等于 $\frac{1}{n}$。若选擇該方向在各不同部分网中的权时，使其和等于观測方向实际的权，則也可以滿足。若全网內各方向的权充分近似相同时，則有：

$$\Sigma p = 1 。$$

但耶列的結論是依据他作的一个簡单的小例子，仍然沒有一般的严格的証明。直至 1955 年 K.阿諾德（K. Arnold）才在波茨坦大地測量研究所公报 Nr. 7 上发表了这个一般的不受限制的証明，幷进一步把爱格特的方法作了一个重要的簡化。至此，爱格特方法在理論上的缺陷才完全弥补了，其实用意义更提高了，长期間不断的爭論从此結束了。

經过阿諾德将爱格特的方法作了重大的簡化之后，部分网的权系数不必用可列斯基（Cholesky）的改化法来改化，也不必将爱格特函数的微分依虛拟观測值之改正数来展开，幷不用这些改正数作成主平差的条件方程式，从而也不必由这些条件方程式得出主平差的法方程式之系数，而只須由部分法方程式之权系数矩陣作矩陣加法，即能直接得出主平差法方程式系数的矩陣。这样就簡单多了，因为矩陣加法仅仅是将一定行列的数字相加而已。

我們在这里只是想使讀者知道爱格特方法发展的概要，其它不多談了。

§2 爱格特原来的方法

在叙述阿諾德对于爱格特方法之严密性的一般証明之前，还須把爱格特原来的方法叙述如下。

图 1 为一个三角鎖环，其中 P_a，P_b，P_c 为拉伯拉斯点，用 ⇝ 表示的三角边方向是拉伯拉斯方位角的方向，用▬▭▬表示的边是已知边。由是此三角鎖环中除了三角形条件外，还有多边形条件及拉伯拉斯条件。现在按爱格特方法对这样的三角鎖环进行平差。

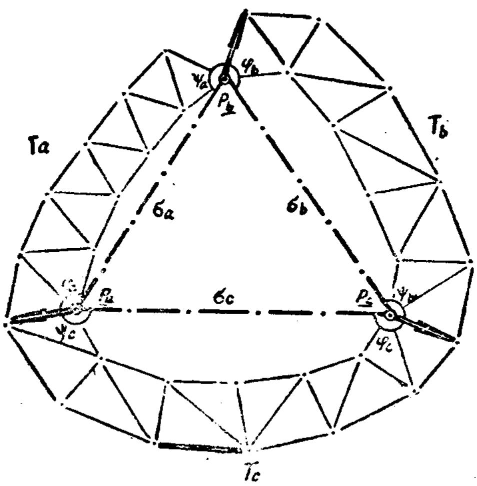

图 1

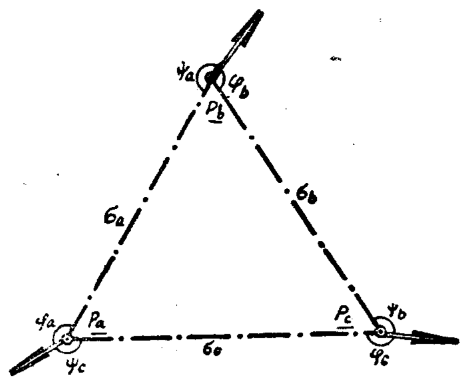

图 2

我們将 P_aP_b，P_bP_c 及 P_cP_a 之間的三角鎖以它的大地綫 σ_a、σ_b、σ_c 及联結角 φ_a、φ_b、φ_c、ψ_a、ψ_b、ψ_c 代之，并由此作成图 2。主平差的条件方程式將用函数 σ、φ、ψ 来組成，而不是用直接观測的元素来組成。

多边形条件及拉伯拉斯条件平差中所应用的函数 σ、φ、ψ 的値，由部分三角鎖 T_a、T_b、T_c 的平差来求得。部分鎖平差中所包含的观测元素，有只屬于本部分鎖的观测元素，也有本部分鎖与前后相邻的两部分鎖所公共的观測元素。在各部分鎖的平差中，这些与邻鎖公共的观測元素，只附以权 $p=\frac{1}{2}$，而只含于本部分鎖內的观測元素，則附以权 $p=1$。由是部分鎖的平差屬于不等权观測的情况，因而不能应用就单三角鎖之角方程式所作的現成的联系数表。

設各部分鎖平差中所包含的直接观測值为：

$$L_1,\ L_2,\ \cdots\cdots,\ L_n,$$

則函数 σ、φ、ψ 的观測值我們一般地可設想为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma^0&=\sigma^0(L_1,\ L_2,\cdots\cdots,\ L_n),\\ \varphi^0&=\varphi^0(L_1,\ L_2,\cdots\cdots,\ L_n),\\ \psi^0&=\psi^0(L_1,\ L_2,\cdots\cdots,\ L_n)。\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

在部分鎖平差后，得出該部分鎖暂时的联系数：

$$K_1',\ K_2',\cdots\cdots,\ K_r'。\quad(2)$$

設想部分鎖平差时采用不定答解法，則得出以下的联系数展开式：

$$\left.\begin{array}{l}K_1'=\Gamma_{1.1}w_1+\Gamma_{1.2}w_2+\cdots\cdots+\Gamma_{1.r}w_r,\\ K_2'=\Gamma_{2.1}w_1+\Gamma_{2.2}w_2+\cdots\cdots+\Gamma_{2.r}w_r,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ K_r'=\Gamma_{r.1}w_1+\Gamma_{r.2}w_2+\cdots\cdots+\Gamma_{r.r}w_r。\end{array}\right\}\quad(3)$$

r 是該部分鎖內的条件方程式个数。

在部分鎖平差后，可得出該部分鎖中所含有的观测值之暂时的改正数:

$$v_1',\ v_2',\ \cdots\cdots,\ v_n'。\quad(4)$$

由是得出部分鎖平差后函数 σ，φ，ψ 的暂时值 σ'，φ'，ψ' 如下:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma'=\sigma'(L_1+v_1',\ L_2+v_2',\ \cdots\cdots,\ L_n+v_n'),\\ \varphi'=\varphi'(L_1+v_1',\ L_2+v_2',\ \cdots\cdots,\ L_n+v_n'),\\ \psi'=\psi'(L_1+v_1',\ L_2+v_2',\ \cdots\cdots,\ L_n+v_n')。\end{array}\right\}\quad(5)$$

在进行了联結平差或主平差以后，已附加了暂时改正数 v' 之后的各观测值，还要附加第二次改正数:

$$v_1'',\ v_2'',\ \cdots\cdots v_n''。\quad(6)$$

因而函数 σ，φ，ψ 的最后值为:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma=\sigma(L_1+v_1'+v_2'',\ L_2+v_2'+v_2''\cdots\cdots,\ L_n+v_n'+v_n''),\\ \varphi=\varphi(L_1+v_1'+v_2'',\ L_2+v_2'+v_2''\cdots\cdots,\ L_n+v_n'+v_n''),\\ \psi=\psi(L_1+v_1'+v_2'',\ L_2+v_2'+v_2''\cdots\cdots,\ L_n+v_n'+v_n'')。\end{array}\right\}\quad(7)$$

命

$$v_i=v_i'+v_i''。\quad(8)$$

则 v_i 为 L_i 的最后改正数。上列（7）式变为

$$\left.\begin{array}{l}\sigma=\sigma(L_1+v_1,\ L_2+v_2,\ \cdots\cdots,\ L_n+v_n),\\ \varphi=\varphi(L_1+v_1,\ L_2+v_2,\ \cdots\cdots,\ L_n+v_n),\\ \psi=\psi(L_1+v_1,\ L_2+v_2,\ \cdots\cdots,\ L_n+v_n)。\end{array}\right\}\quad(9)$$

我們知道（5）式与（9）式右边的形式是完全相同的，如果要求部分鎖平差后函数 σ'，φ'，ψ' 的权，則无論由（5）式或（9）式都可求出系数

$$f_i=\frac{\partial\sigma'}{\partial L_i},\quad f_i'=\frac{\partial\varphi'}{\partial L_i},\quad f_i''=\frac{\partial\psi'}{\partial L_i},$$

既已算出这些系数，則一方面可将（5）式及（9）式写成

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma'=\sigma^0+[fv']=\sigma^0+\Delta\sigma'; & \sigma=\sigma^0+[fv]=\sigma^0+\Delta\sigma,\\ \varphi'=\varphi^0+[f'v']=\varphi^0+\Delta\varphi'; & \varphi=\varphi^0+[f'v]=\varphi^0+\Delta\varphi,\\ \psi'=\psi^0+[f''v']=\psi^0+\Delta\psi'; & \psi=\psi^0+[f''v]=\psi^0+\Delta\psi。\end{array}\right\}\quad(10)$$

另一方面可将这些系数視为虛拟的条件方程式之系数，附于該部分鎖內条件方程式

$$\left.\begin{array}{l}[av]-w_a=0,\\ [bv]-w_b=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [rv]-w_r=0,\end{array}\right\}\quad\text{（共 9 个）}\quad(11)$$

之后，以組成法方程式而答解之，則得权系数

$$
\left.\begin{aligned}
&[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\cdots\cdots-\frac{[rf\cdot(\rho-1)]^2}{[rr\cdot(\rho-1)]}=[ff\cdot\rho],\\
&[ff']-\frac{[af][af']}{[aa]}-\frac{[bf\cdot 1][bf'\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\cdots\cdots-\frac{[rf\cdot(\rho-1)][rf'\cdot(\rho-1)]}{[rr\cdot(\rho-1)]}=[ff'\cdot\rho],\\
&[ff'']-\frac{[af][af'']}{[aa]}-\frac{[bf\cdot 1][bf'\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\cdots\cdots-\frac{[rf\cdot(\rho-1)][rf''\cdot(\rho-1)]}{[rr\cdot(\rho-1)]}=[ff''\cdot\rho],\\
&[f'f']-\frac{[af']^2}{[aa]}-\frac{[bf'\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\cdots\cdots-\frac{[rf'\cdot(\rho-1)]^2}{[rr\cdot(\rho-1)]}=[f'f'\cdot\rho],\\
&[f'f'']-\frac{[af'][af'']}{[aa]}-\frac{[bf'\cdot 1][bf''\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\cdots\cdots-\frac{[rf'(\rho-1)][rf''\cdot(\rho-1)]}{[rr\cdot(\rho-1)]}=[f'f''\cdot\rho],\\
&[f''f'']-\frac{[af'']^2}{[aa]}-\frac{[bf''\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\cdots\cdots-\frac{[rf''\cdot(\rho-1)]^2}{[rr\cdot(\rho-1)]}=[f''f''\cdot\rho]。
\end{aligned}\right\}\quad(12)
$$

故在部分鎖平差后，旣可以算出函数値 σ'，φ'，ψ' 或 $\Delta\sigma'$，$\Delta\varphi'$，$\Delta\psi'$；并可以算出(12)式的权系数。我們以下要将部分鎖平差后算得的値 σ'，φ'，ψ' 視为直接观測値来进行主平差，来求它們的改正数 $(\Delta\sigma)$，$(\Delta\varphi)$，$(\Delta\psi)$，以使

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma&=\sigma'+(\Delta\sigma),\\
\varphi&=\varphi'+(\Delta\varphi),\\
\psi&=\psi'+(\Delta\psi)。
\end{aligned}\right\}\quad(13)
$$

这本来是不合于最小二乘法原則的。我們必須将 σ'，φ'，ψ' 以三个虛拟的直接观測値 l_1，l_2，l_3 表示为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma'&=\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\alpha_3 l_3,\\
\varphi'&=\qquad\quad\ \beta_2 l_2+\beta_3 l_3,\\
\psi'&=\qquad\qquad\qquad\ \gamma_3 l_3。
\end{aligned}\right\}\quad(14)
$$

設这些虛拟的观測値之改正数为 λ_1，λ_2，λ_3，則平差后的函数値为：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma&=\sigma'+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\alpha_3\lambda_3,\\
\varphi&=\varphi'\qquad\quad+\beta_2\lambda_2+\beta_3\lambda_3,\\
\psi&=\psi'\qquad\qquad\qquad+\gamma_3\lambda_3。
\end{aligned}\right\}\quad(15)
$$

我們要使由虛拟观測値依（14）式算得的 σ'，φ'，ψ' 与由部分鎖平差后所算得的 σ'，φ'，ψ' 不仅同値，而且还要同权。因（14）式內的 l 可視为同权的直接观測値，則其权系数为

$$
\left.\begin{aligned}
&[\alpha\alpha],\ [\alpha\beta],\ [\alpha\gamma],\\
&[\beta\alpha],\ [\beta\beta],\ [\beta\gamma],\\
&[\gamma\alpha],\ [\gamma\beta],\ [\gamma\gamma]。
\end{aligned}\right\}\quad(16)
$$

若要使由（14）式算得的函数 σ'，φ'，ψ' 与以前由部分鎖平差后所得的 σ'，φ'，ψ' 等权，則不可不有

$$
\left.\begin{aligned}
&[\alpha\alpha]=[ff\cdot\rho],\\
&[\alpha\beta]=[ff'\cdot\rho],\ [\beta\beta]=[f'f'\cdot\rho],\\
&[\alpha\gamma]=[ff''\cdot\rho],\ [\beta\gamma]=[f'f''\cdot\rho],\ [\gamma\gamma]=[f''f''\cdot\rho],
\end{aligned}\right\}\quad(17)
$$

由是得

$$\gamma_3=\sqrt{[f''f''\cdot\rho]}\,;$$

$$\beta_3\gamma_3=[f'f''\cdot\rho],\quad 故\quad \beta_3=\frac{[f'f''\cdot\rho]}{\sqrt{[f''f''\cdot\rho]}};$$

$$\alpha_3\gamma_3=[ff''\cdot\rho],\quad 故\quad \alpha_3=\frac{[ff''\cdot\rho]}{\sqrt{[f''f''\cdot\rho]}}。$$

又因

$$\beta_2^2+\beta_3^2=[f'f'\cdot\rho],\quad 故\quad \beta_2^2=[f'f'\cdot\rho]-\frac{[f'f''\cdot\rho]^2}{[f''f''\cdot\rho]},$$

$$[\alpha\beta]=\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=\left\{\sqrt{[f'f'\cdot\rho]-\frac{[f'f''\cdot\rho]^2}{[f''f''\cdot\rho]}}\right\}\alpha_2+\frac{[ff''\cdot\rho][f'f''\cdot\rho]}{[f''f''\cdot\rho]}$$
$$=[ff'\cdot\rho],$$

故

$$\alpha_2=\left\{[ff'\cdot\rho]-\frac{[ff''\cdot\rho][f'f''\cdot\rho]}{[f''f''\cdot\rho]}\right\}\div\sqrt{[f'f'\cdot\rho]-\frac{[f'f''\cdot\rho]^2}{[f''f''\cdot\rho]}},$$

再由$[\alpha\alpha]=[ff\cdot\rho]$即可决定$\alpha_1$。既已求得（14）式中的一切系数，然后将以前部分平差所算得的σ'，φ'，ψ'值代入（14）式的左边，就可以求得虚拟的观测值l_1，l_2，l_3了。这样由（14）式算得的σ'，φ'，ψ'与部分平差所算得的值不仅等值，而且也等权。然后再将这些虚拟的观测值l_i加入改正数λ_i以进行主平差。此时条件方程式不是用（13）式中的（$\Delta\sigma$），（$\Delta\varphi$），（$\Delta\psi$）来組成，而是用$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$来組成。因为$\lambda_i$是直接观测值的改正数，用它們所組成的条件来进行平差就合于最小二乘法的原則了。由主平差得出λ_i的值之后，再由

$$\left.\begin{aligned}(\Delta\sigma)&=\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\alpha_3\lambda_3,\\(\Delta\varphi)&=\qquad\quad\ \beta_2\lambda_2+\beta_3\lambda_3,\\(\Delta\psi)&=\qquad\qquad\qquad\quad\ \gamma_3\lambda_3。\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

計算出函数σ'，φ'，ψ'的改正数，然后由（13）式得出函数的最后值σ，φ，ψ。

以上是就第一图所示的三角网之情況而言，若在同一个部分鎖內有两条以上的基綫，則在該部分鎖的平差中自然包含有基綫条件，这种基綫条件自然也包含于（11）式中，其它不必叙述了。若相邻两个部分鎖內都有基綫，則該两鎖的公共边上成立有恒等条件。这样，函数不是三个，而是四个了，因而虚拟的观测值也不是三个，而是四个。在这种情况下，（14）、（15）两式中也应附加α_4l_4，β_4l_4，γ_4l_4及$\alpha_4\lambda_4$，……等項。若三角网的形状再复杂，則函数的个数还有增加。故一般說来，求α，β，γ，……等的值，并不像在（17）式以下所說的那样簡单。要使这些計算有系統規律，必須依可列斯基的改化格式进行計算，这可参考阿斯卜倫特所著的“关于大规模三角网平差的一些方法”（Über einige Methoden für die Ausgleichung grosser Dreiecksnetze, Stockholm, 1945）一书以及B.哈雷尔特（B. Hallert）在德国测量杂志（Z. F. V. 1943）中所发表的“关于法方程式解答的一些方法”（Über einige Verfahren zur Lösung von Normalgleichungen）一文。

依爱格特的方法，在主平差的条件方程式中，不用包含在部分鎖平差中的观测值，而用虚拟的等价观测值的改正数λ。此外，若在部分鎖平差中还有未包含的观测值L^s，則在主平差的条件內也包含其改正数v^s（s不是乘幂，只是一个上标）。故一般說来，主平差

的条件方程式可概括为：

$$\left.\begin{aligned}&[A'\lambda]+[A^s v^s]-W_A=0,\\&[B'\lambda]+[B^s v^s]-W_B=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&[R'\lambda]+[R^s v^s]-W_R=0。\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

此外，若某些观测为許多个部分鎖所公有，則除了函数 σ，φ，ψ 之外，还有相邻部分鎖公共的观测 t，u……；t'，u'……这一类的函数，这时不可不滿足于以下的方向恒等条件：

$$t-t'=0,\quad u-u'=0,\quad\cdots\cdots\qquad(20)$$

依爱格特的意見，以上（19）及（20）联合起来，就是主平差的条件。

以上曾說明在主平差后由（18）式来計算最后的函数值。我們除了求这些最后的函数值之外，对于包含在部分鎖平差中并已經求出其改正数 v'_i 的那些观测値，还要求出其最后改正数 $v_i=v'_i+v''_i$。因为这时已經知道了函数的最后值 σ，φ，ψ，故（10）式中的

$$\left.\begin{aligned}&[fv]+\sigma^0-\sigma=0,\\&[f'v]+\varphi^0-\varphi=0,\\&[f''v]+\psi^0-\psi=0;\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

以及部分鎖平差中所原有的条件方程式（11）都为 v 所必須滿足的条件。現在旣然要求这些 v，就必須把（21）式和該部分鎖原有的条件以 v 代 v' 联合起来，再进行一次該部分鎖的平差。

我們也可以不直接求 v_i，而求 v''_i，即由（18）式算出 $(\Delta\sigma)$，$(\Delta\varphi)$，$(\Delta\psi)$，又将（10）式写为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=\sigma'+[fv''] & &[fv'']-(\Delta\sigma)=0,\\&\varphi=\varphi'+[f'v'']\quad\text{即} & &[f'v'']-(\Delta\varphi)=0,\\&\psi=\psi'+[f''v''] & &[f''v'']-(\Delta\psi)=0。\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

然后将（22）式和原条件中的 v' 以 v'' 代之联合起来，再平差一次。这种平差也可以依克呂格的两組法来进行，即把原来的部分鎖平差作为第一組，而把（21）式或（22）式作为第二組。

求得 v_i 之后，即可得出观测値 L_i 的平差値 L_i+v_i。

§3 关于爱格特对于公共方向取权規定的正确性之一般証明

本节将一般地証明爱格特的取权規定是正确的。在証明之前，为了使讀者容易了解起見，先举一个簡单的例子，来說明因三角网形拼合或分割的形式不同，条件方程式也可写成不同的形式。

如图3为有三条基綫的一个中点多边形。假設各測站上的观测結果已經化为完全測回的方向观測，則可以不顧及測站平差。又若我們要将图3依条件观測平差法进行整体平差，則应当有七个角条件，一个以中心为极的边条件（或称中心条件），以及两个长条件（或称基綫条件）。若网形不分割，只是将条件方程式分組，則每一个条件方程式都可以保持

其原有形式不变。若将图 3 的网形分割为图 4 的两个部分网，则除角条件及由 HG 和 HB 两基綫所成的长条件仍保持不变外，其余的边条件及由 CD 与 HB 两基綫所成的长条件便不能直接应用了。这时必須以两个边长恒等条件来代替，就是在 a，b 两个部分网平差后，所得的 H^aC^a 及 H^aE^a 必須分别与 H^bC^b 及 H^bE^b 相等。此外，原条件方程式中所沒有而此时必須增加的条件，则有观測值 L_7^a 之最后改正数 v_7^a 必須与观測值 L_2^b 之最后改正数 v_2^b 相等，v_{18}^a 必須与 v_8^b 相等，v_{19}^a 必須与 v_{10}^b 相等，以及 v_{10}^a 必須与 v_6^b 相等，否則就不能与原来的条件方程式等价或等效。将一个整网分割为两个互相独立的部分网而各自独立地进行平差，例如图 4 在 a 部分网平差中只有 5 个角条件及一个长条件，在 b 部分网平差中则只有两个角条件。而在两部分网各自独立平差后，还必須将两个边长恒等条件及增加的 4 个方向恒等条件再进行一次主平差。不仅如此，若原来的一切观測方向值的权相同，或极近似地相同，则按图 3 进行整网平差时，必然地将一切改正数的权視为 1；而在按图 4 进行平差时，则依爱格特的意見，在部分网平差中，v_7^a，v_{10}^a，v_{18}^a，v_{19}^a 以及 v_2^b，v_6^b，v_8^b，v_{10}^b 的权必須視为 $\frac{1}{2}$，而其余改正数的权仍視为 1。

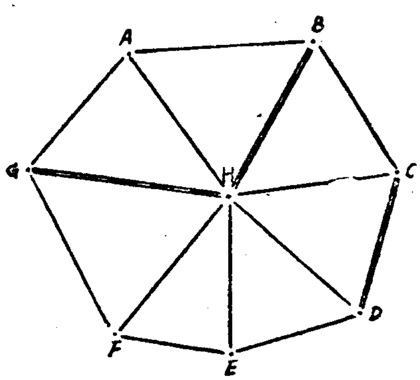

图 3

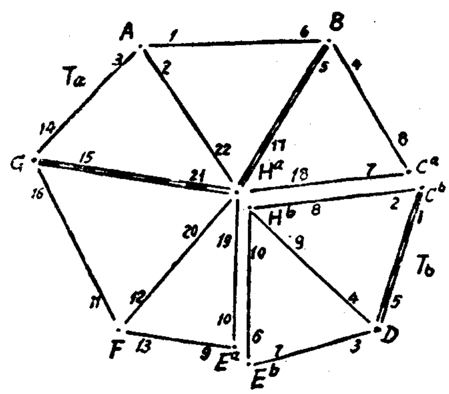

图 4

以下将轉而証明爱格特的取权規定是严格的。但在証明中为了避免更多的麻煩起見，我們相信由网形分割所产生的边长恒等条件与原来的基綫条件或边条件完全等价，在証明中宁可省略这种复杂关系，仍保持原来的条件方程式形式，而側重于所增加的方向恒等条件及其相应的按爱格特規定所应取的权。

整网內所有的条件，例如角条件、边条件、多边形条件、拉伯拉斯条件及基綫条件等等，虽然一般地可以写为

$$\left.\begin{array}{l}[av]-w_a=0\,,\\ [bv]-w_b=0\,,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [rv]-w_r=0\,。\end{array}\right\}\qquad(1)$$

其中 v 为直接观測值的改正数，w 为条件方程式的常数項。但我們也可以把它分为 I''，II'' 两大組，并将大組 I'' 又分为 $I''a.$，$I''b.$，……$I''r.$ 各小組，由是可以写为

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\underline{I''a.} & [a^1v^a]+[\bar{a}^1\bar{v}]-w_1^a=0 \\
 & [a^2v^a]+[\bar{a}^2\bar{v}]-w_2^a=0 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hline
\underline{I''b.} & [b^1v^b]+[\bar{b}^1\bar{v}]-w_1^b=0 \\
 & [b^2v^b]+[\bar{b}^2\bar{v}]-w_2^b=0 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hline
 & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\hline
\underline{I''i.} & [i^1v^i]+[\bar{i}^1\bar{v}]-w_1^i=0 \\
 & [i^2v^i]+[\bar{i}^2\bar{v}]-w_2^i=0 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hline
 & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\hline
\underline{I''r.} & [r^1v^r]+[\bar{r}^1\bar{v}]-w_1^r=0 \\
 & [r^2v^r]+[\bar{r}^2\bar{v}]-w_2^r=0 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hline\hline
\underline{II''.} & [z^{1\cdot a}v^a]+[z^{1\cdot b}v^b]+\cdots\cdots+[z^{1\cdot r}v^r]+[\bar{z}^1\bar{v}]-w_1^z=0 \\
 & [z^{2\cdot a}v^a]+[z^{2\cdot b}v^b]+\cdots\cdots+[z^{2\cdot r}v^r]+[\bar{z}^2\bar{v}]-w_2^z=0 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\right\} \qquad (2)
$$

v^a 表示只屬于 a 小組的改正数（a 是上标，不是乘冪），余类推；$\bar{v}$ 是各組共有的改正数，故改正数有

$$
v_e^i \text{ 及 } \bar{v}_e, \quad i=a,\ b,\ c,\ \cdots\cdots
$$
$$
e=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots
$$

若将上列第 II'' 大組的第一式詳細写出，則有

$$
\begin{aligned}
& z_1^{1\cdot a}v_1^a+z_2^{1\cdot a}v_2^a+z_3^{1\cdot a}v_3^a+\cdots\cdots \\
& +z_1^{1\cdot b}v_1^b+z_2^{1\cdot b}v_2^b+z_3^{1\cdot b}v_3^b+\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& +z_1^{1\cdot r}v_1^r+z_2^{1\cdot r}v_2^r+z_3^{1\cdot r}v_3^r+\cdots\cdots \\
& +\bar{z}_1^1\bar{v}_1+\bar{z}_2^1\bar{v}_2+\bar{z}_3^1\bar{v}_3+\cdots\cdots-w_1^z=0
\end{aligned}
$$

这些条件是就整网組成的，也就是說，任一点上的某一方向，只有一个方向改正数。我們由这些条件方程式作出其法方程式，因为各小組的条件方程式都是同种类的，故不必写出一切法方程式，而只写出其惟一的一般形式，例如只写出 $I''i.$ 小組的第一条件之法方程式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&[\bar{i}^1\bar{a}^1]K_{a.1}+[\bar{i}^1\bar{a}^2]K_{a.2}+[\bar{i}^1\bar{a}^3]K_{a.3}+\cdots\cdots\\
&+[\bar{i}^1\bar{b}^1]K_{b.1}+[\bar{i}^1\bar{b}^2]K_{b.2}+[\bar{i}^1\bar{b}^3]K_{b.3}+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\{[i^1i^1]+[\bar{i}^1\bar{i}^1]\}K_{i.1}+\{[i^1i^2]+[\bar{i}^1\bar{i}^2]\}K_{i.2}+\{[i^1i^3]+[\bar{i}^1\bar{i}^3]\}K_{i.3}+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+[\bar{i}^1\bar{r}^1]K_{r.1}+[\bar{i}^1\bar{r}^2]K_{r.2}+[\bar{i}^1\bar{r}^3]K_{r.3}+\cdots\cdots\\
&+\{[i^1z^{1.i}]+[\bar{i}^1\bar{z}^1]\}K_{z.1}+\{[i^1z^{2.i}]+[\bar{i}^1\bar{z}^2]\}K_{z.2}+\\
&\qquad\qquad+\{[i^1z^{3.i}]+[\bar{i}^1\bar{z}^3]\}K_{z.3}+\cdots\cdots-w_1^i=0
\end{aligned}\right\}\quad(3)
$$

再写出第 II'' 大組內的第二个法方程式如下:

$$
\left.\begin{aligned}
&\{[z^{2.a}a^1]+[\bar{z}^2\bar{a}^1]\}K_{a.1}+\{[z^{2.a}a^2]+[\bar{z}\ \bar{a}^2]\}K_{a.2}+\{[z^{2.a}a^3]+[\bar{z}^2a^3]\}K_{a.3}+\cdots\\
&+\{[z^{2.b}b^1]+[\bar{z}^2\bar{b}^1]\}K_{b.1}+\{[z^{2.b}b^2]+[\bar{z}^2\bar{b}^2]\}K_{b.2}+\{[z^{2.b}b^3]+[\bar{z}^2\bar{b}^3]\}K_{b.3}+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\{[z^{2.i}i^1]+[\bar{z}^2\bar{i}^1]\}K_{i.1}+\{[z^{2.i}i^2]+[\bar{z}^2\bar{i}^2]\}K_{i.2}+\{[z^{2.i}i^3]+[\bar{z}^2\bar{i}^3]\}K_{i.3}+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\{[z^{2.r}r^1]+[\bar{z}^2\bar{r}^1]\}K_{r.1}+\{[z^{2.r}r^2]+[\bar{z}^2\bar{r}^2]\}K_{r.2}+\{[z^{2.r}r^3]+[\bar{z}^2\bar{r}^3]\}K_{r.3}+\cdots\\
&+\{[z^{2.a}z^{1.a}]+[z^{2.b}z^{1.b}]+\cdots\cdots+[z^{2.r}z^{1.r}]+[\bar{z}^2\bar{z}^1]\}K_{z.1}\\
&+\{[z^{2.a}z^{2.a}]+[z^{2.b}z^{2.b}]+\cdots\cdots+[z^{2.r}z^{2.r}]+[\bar{z}^2\bar{z}^2]\}K_{z.2}\\
&+\{[z^{2.a}z^{3.a}]+[z^{2.b}z^{3.b}]+\cdots\cdots+[z^{2.r}z^{3.r}]+[\bar{z}^2\bar{z}^3]\}K_{z.3}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-w_2^z=0
\end{aligned}\right\}\quad(4)
$$

其中

$$[i^1i^2]=\sum_e i_e^1i_e^2,\quad [z^{2.a}a^2]=\sum_e z_e^{2.a}a_e^2。$$

若我們設想（2）式內的 $\bar{v}$ 即为各小組內网形分割处的方向改正数，亦即包含于方向恒等条件內的方向改正数。又設想虽依分割网形（例如第4图）上所記的方向改正数以組成条件方程式，并将分割方向上各組內不同的改正数作成方向恒等条件，但基綫条件及以中点为极的边条件都仍保持原来的形式，而不以边长恒等条件来代替。由是（2）式內的条件完全不变，只是增加了方向恒等条件。但为了作出方向恒等条件，则各組內所包含的 $\bar{v}$ 又不可不按其所在的小組而記之为 $\bar{v}^a$，$\bar{v}^b$……。于是現在的条件方程式如下:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\underline{I'a.} & [a^1v^a]+[\bar{a}^1\bar{v}^a]-w_1^a=0\\
& [a^2v^a]+[\bar{a}^2\bar{v}^a]-w_2^a=0\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\hline
\underline{I'b.} & [b^1v^b]+[\bar{b}^1\bar{v}^b]-w_1^b=0\\
& [b^2v^b]+[\bar{b}^2\bar{v}^b]-w_2^b=0\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\hline
& \vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\
\hline
\end{array}\right\}\quad(5)
$$

I′i.

$$[i^1 v^i] + [\bar{i}^1 \bar{v}^i] - w_1^i = 0$$

$$[i^2 v^i] + [\bar{i}^2 \bar{v}^i] - w_2^i = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

I′r.

$$[r^1 v^r] + [\bar{r}^1 \bar{v}^r] - w_1^r = 0$$

$$[r^2 v^r] + [\bar{r}^2 \bar{v}^r] - w_2^r = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

II′.

$$[z^{1.a} v^a] + [z^{1.b} v^b] + \cdots\cdots + [z^{1.r} v^r] + [\bar{z}^1 \bar{v}^b] - w_1^z = 0$$

$$[z^{2.a} v^a] + [z^{2.b} v^b] + \cdots\cdots + [z^{2.r} v^r] + [\bar{z}^2 \bar{v}^b] - w_2^z = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(6)

III′1.

$$\bar{v}_1^a - \bar{v}_1^b = 0$$

$$\bar{v}_1^a - \bar{v}_1^c = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{v}_1^a - \bar{v}_1^i = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{v}_1^a - \bar{v}_1^r = 0$$

III′2.

$$\bar{v}_2^a - \bar{v}_2^b = 0$$

$$\bar{v}_2^a - \bar{v}_2^c = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{v}_2^a - \bar{v}_2^i = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{v}_2^a - \bar{v}_2^r = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

III′e.

$$\bar{v}_e^a - \bar{v}_e^b = 0$$

$$\bar{v}_e^a - \bar{v}_e^c = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{v}_e^a - \bar{v}_e^i = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{v}_e^a - \bar{v}_e^r = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

(7)

$$\left.\begin{aligned}&\underline{III'_n.}\ \bar{v}_n^a-\bar{v}_n^b=0\\&\bar{v}_n^a-\bar{v}_n^c=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\bar{v}_n^a-\bar{v}_n^i=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\bar{v}_n^a-\bar{v}_n^r=0\end{aligned}\right|$$

相应于改正数 $\bar{v}_e^i$（$i=a$，b，c，……r，$e=1, 2, \cdots\cdots$）的权为

$$\bar{p}_e^i$$

根据爱格特的规定，分布在所有各小組 a，b，……r 中的这些权的总和不可不为 1，故对于各 e 则有

$$\sum_{i=a}^{r}\bar{p}_e^i=1,\quad e=1,\ 2,\ \cdots\cdots \tag{8}$$

若 I' 組内的小組数为 ρ，則 III' 組内 III'_e 小組的条件方程式数为（$\rho-1$）。相应于改正数

$$v_e^i\qquad (i=a,\ b,\ \cdots\cdots r;\ e=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

的权我們命之为 1。

因为有恒等条件（7）式的关系，故（6）式末项的总和都可写为 $\bar{v}^b$ 之和，亦可写为其它的 $\bar{v}_e^i$（$i=a$，b，……r）之和。

我們并可把（5）式写为如下之形式：

$$\left.\begin{aligned}&\underline{I\,a.}\ [a^1v^a]+[\bar{a}^1\bar{v}^b]-w_1^a=0\\&[a^2v^a]+[\bar{a}^2\bar{v}^b]-w_2^a=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\underline{I\,b.}\ [b^1v^b]+[\bar{b}^1\bar{v}^b]-w_1^b=0\\&[b^2v^b]+[\bar{b}^2\bar{v}^b]-w_2^b=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\quad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\&\underline{I\,i.}\ [i^1v^i]+[\bar{i}^1\bar{v}^b]-w_1^i=0\\&[i^2v^i]+[\bar{i}^2\bar{v}^b]-w_2^i=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\quad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\&\underline{I\,r.}\ [r^1v^r]+[\bar{r}^1\bar{v}^b]-w_1^r=0\\&[r^2v^r]+[\bar{r}^2\bar{v}^b]-w_2^r=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

以上所得的（9），（6），（7）三組条件依上述的权分配办法作出其法方程式，相应于（9），（6）两式的联系数仍与（3），（4）式內相同，依次为 $K_{a.1}$，$K_{a.2}$，……，$K_{b.1}$，$K_{b.2}$，……$K_{i.1}$，$K_{i.2}$……$K_{r.1}$，$K_{r.2}$ 及 $K_{z.1}$，$K_{z.2}$……，相应于（7）式的联系数依次記为 $\overline{K}_{b.1}$，$\overline{K}_{c.1}$，……，$\overline{K}_{b.2}$，$\overline{K}_{c.2}$，……，$\overline{K}_{b.n}$，$\overline{K}_{c.n}$，……，$\overline{K}_{r.n}$。

此时我們还是不必把一切法方程式完全写出来，而只写出与（3），（4）两式相似的法方程式如下：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left[\frac{\bar{i}^1\bar{a}^1}{\bar{p}b}\right]K_{a.1}+\left[\frac{\bar{i}^1\bar{a}^2}{\bar{p}b}\right]K_{a.2}+\cdots\cdots\\
&+\left[\frac{\bar{i}^1\bar{b}^1}{\bar{p}b}\right]K_{b.1}+\left[\frac{\bar{i}^1\bar{b}^2}{\bar{p}b}\right]K_{b.2}+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left\{[i^1i^1]+\left[\frac{\bar{i}^1\bar{i}^1}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{i.1}+\left\{[i^1i^2]+\left[\frac{\bar{i}^1\bar{i}^2}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{i.2}+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left[\frac{\bar{i}^1\bar{r}^1}{\bar{p}b}\right]K_{r.1}+\left[\frac{\bar{i}^1\bar{r}^2}{\bar{p}b}\right]K_{r.2}+\cdots\cdots\\
&+\left\{[i^1z^{1.i}]+\left[\frac{\bar{i}^1\bar{z}^1}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{z.1}+\left\{[i^1z^{2.i}]+\left[\frac{\bar{i}^1\bar{z}^2}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{z.2}+\left\{[i^1z^{3.i}]+\left[\frac{\bar{i}^1\bar{z}^3}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{z.3}+\cdots\\
&-\frac{\bar{i}_1^{-1}}{\bar{p}_1^b}\overline{K}_{b.1}-\frac{\bar{i}_2^{-1}}{\bar{p}_2^b}\overline{K}_{b.2}-\cdots\cdots-\frac{\bar{i}_e^{-1}}{\bar{p}_e^b}\overline{K}_{b.e}-\cdots\cdots-\frac{\bar{i}_n^{-1}}{\bar{p}_n^b}\overline{K}_{b.n}-w_1^i=0
\end{aligned}
\right\}\quad(10)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left\{[z^{2.a}a^1]+\left[\frac{\bar{z}^2\bar{a}^1}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{a.1}+\left\{[z^{2.a}a^2]+\left[\frac{\bar{z}^2\bar{a}^2}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{a.2}+\cdots\cdots\\
&+\left\{[z^{2.b}b^1]+\left[\frac{\bar{z}^2\bar{b}^1}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{b.1}+\left\{[z^{2.b}b^2]+\left[\frac{\bar{z}^2\bar{b}^2}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{b.2}+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left\{[z^{2.i}i^1]+\left[\frac{\bar{z}^2\bar{i}^1}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{i.1}+\left\{[z^{2.i}i^2]+\left[\frac{\bar{z}^2\bar{i}^2}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{i.2}+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left\{[z^{2.r}r^1]+\left[\frac{\bar{z}^2\bar{r}^1}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{r.1}+\left\{[z^{2.r}r^2]+\left[\frac{\bar{z}^2\bar{r}^2}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{r.2}+\cdots\cdots\\
&+\left\{[z^{2.a}z^{1.a}]+[z^{2.b}z^{1.b}]+\cdots\cdots+[z^{2.r}z^{1.r}]+\left[\frac{\bar{z}^2\bar{z}^1}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{z.1}\\
&+\left\{[z^{2.a}z^{2.a}]+[z^{2.b}z^{2.b}]+\cdots\cdots+[z^{2.r}z^{2.r}]+\left[\frac{\bar{z}^2\bar{z}^2}{\bar{p}b}\right]\right\}K_{z.2}+\cdots\cdots\\
&-\frac{\bar{z}_1^2}{\bar{p}_1^b}\overline{K}_{b.1}-\frac{\bar{z}_2^2}{\bar{p}_2^b}\overline{K}_{b.2}-\cdots\cdots-\frac{\bar{z}_e^2}{\bar{p}_e^b}\overline{K}_{b.e}-\cdots\cdots-\frac{\bar{z}_n^2}{\bar{p}_n^b}\overline{K}_{b.n}-w_2^z=0
\end{aligned}
\right\}\quad(11)
$$

我們还要写出相应于 III'^{e} 小組条件方程式的法方程式。命

$$
\left.
\begin{aligned}
\Psi_e=&-\frac{\bar{a}_e^1}{\bar{p}_e^b}K_{a.1}-\frac{\bar{a}_e^2}{\bar{p}_e^b}K_{a.2}-\cdots\cdots\\
&-\frac{\bar{b}_e^1}{\bar{p}_e^b}K_{b.1}-\frac{\bar{b}_e^2}{\bar{p}_e^b}K_{b.2}-\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-\frac{\bar{i}_e^1}{\bar{p}_e^b}K_{i.1}-\frac{\bar{i}_e^2}{\bar{p}_e^b}K_{i.2}-\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-\frac{\bar{r}_e^1}{\bar{p}_e^b}K_{r.1}-\frac{\bar{r}_e^2}{\bar{p}_e^b}K_{r.2}-\cdots\cdots\\
&-\frac{\bar{z}_e^1}{\bar{p}_e^b}K_{z.1}-\frac{\bar{z}_e^2}{\bar{p}_e^b}K_{z.2}-\cdots\cdots,\quad e=1,\ 2,\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\}\quad(12)
$$