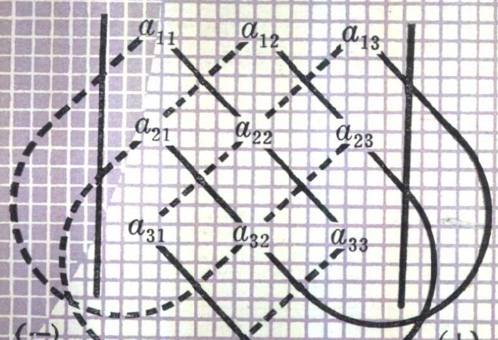
中等师范学校数学课本

代数与初等函数

第二册



人民教育出版社

封面设计：胡茂林

中等师范学校数学课本
（试用本）
代数与初等函数
第二册
周华辅　夏炎炎　邓国扬　编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市房山县印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　印张 4.75　字数 108,000
1982年5月第1版　1984年3月第3次印刷
印数 407,001—607,000
书号 K7012·0347　　定价 0.38 元

目　录

带*部分为选学内容。

第六章　线性方程组

一次方程又叫做线性方程，一次方程组又叫做线性方程组。

我们在初中阶段已经学会用消元法解二元和三元线性方程组。从理论上讲，任何多元线性方程组都可以用逐个消元的方法解出，由此可以推出解线性方程组的公式。但是，解三元和三元以上的线性方程组的公式很繁杂，不便于计算。为了解决这个问题，人们发明了用行列式解线性方程组的方法。下面我们来学习这种方法。

一　二元线性方程组和二阶行列式

6.1　二阶行列式

二元线性方程组的一般形式是：

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. & (2)\end{cases}$$

这里 b_1、b_2 是常数项，a_{ij} 叫做 x_j 的系数，它有两个下标，第 1 个下标 i 表示它在第 i 个方程，第 2 个下标 j 表示它是第 j 个未知量的系数。如 a_{12} 就是第一个方程中 x_2 的系数。

我们用加减消元法解这个方程组：

$$(1)\times a_{22}-(2)\times a_{12},$$

得

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}; \qquad (3)$$

$$(2)\times a_{11}-(1)\times a_{21},$$

得 $$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1. \tag{4}$$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$，就得到

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}. \end{cases} \tag{5}$$

这就是二元线性方程组（Ⅰ）的求解公式．将任何一个二元线性方程组化为一般形式后，只要 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$，就可以利用公式（5）求出它的解。

在公式（5）中，两个分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，其中只含有未知数的系数．把未知数的系数按照它们在方程组中原来的位置排列起来，即把四个数排成下面的形式，并在它的两旁各加一条竖线，用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{6}$$

来表示 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}. \tag{7}$$

符号（6）叫做二阶行列式。它含有两行、两列．横排的叫做行，竖排的叫做列．行列式中的数又叫做行列式的**元素**，a_{12}就是在第1行、第2列上的元素．从（7）式得知，二阶行列式是这样两个项的代数和：一个是在从左上角到右下角的对角线（又叫做行列式的**主对角线**）上两个元素的乘积，取正号；另一个是在从左下角到右上角的对角线（又叫做行列式的**副对角线**）上两个元素的乘积，取负号．（7）式右边的式子叫做这个二阶行列式的**展开式**。

同样地，如果用行列式表示公式（5）中的两个分子，

就有

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

二阶行列式的值可按上面的方法计算。

例 1　计算：$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times(-1)=-4+3=-1.$

例 2　计算：$\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ -b^2 & a-b \end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ -b^2 & a-b \end{vmatrix}=(a+b)(a-b)-(-b^2)\times 1$

$$=a^2-b^2+b^2=a^2.$$

例 3　计算：$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=\cos^2\theta-(-\sin^2\theta)=1.$

例 4　求证：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$.

证明：$\because$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\therefore\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

练　习

1. 计算下列行列式的值：

（1）$\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 14 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 6a-b & 2b \\ 3a & b \end{vmatrix}$；　（4）$\begin{vmatrix} a+b & a^2+ab+b^2 \\ a-b & a^2-ab+b^2 \end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix}$；　（6）$\begin{vmatrix} \log_a x & \log_a y \\ m & n \end{vmatrix}$.

2. 证明：

（1）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = 0$；

（4）$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

6.2　二元线性方程组

引进二阶行列式后，二元线性方程组（Ⅰ）的解的公式，可以表示成两个二阶行列式相除的形式：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases} \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0\right) \qquad (8)$$

为了简便起见，通常用 D、D_1、D_2分别表示（8）式中作为分母与分子的行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

于是方程组（Ⅰ）的解又可以表示成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \qquad (D \neq 0) \qquad (9)$$

行列式 D 是由方程组（Ⅰ）中未知数 x_1、x_2的系数组成的，叫做这个方程组的系数行列式。D 中 x_1的系数 a_{11}、a_{21} 换成方程组（Ⅰ）的常数项 b_1、b_2，就得到行列式 D_1；D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22}换成常数项 b_1、b_2，就得到行列式 D_2。

上面研究了 $D\neq 0$ 时方程组的解的情况，现在再来讨论 $D = 0$ 的情况。

1．$D=0$，但 D_1，D_2 中至少有一个不等于零．不妨设 $D_1\neq 0$，即$b_1a_{22}-b_2a_{12}\neq 0$，这时，无论 x_1取什么值，

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \qquad (3)$$

都不成立，即方程（3）无解，因此方程组(Ⅰ)也无解。

2．$D=D_1=D_2=0$，即 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，$b_1a_{22}-b_2a_{12}$，$a_{11}b_2-a_{21}b_1$ 都等于零。因为方程（1）、（2）中未知数的系数不能都等于零，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则由 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=0$，$a_{11}b_2-a_{21}b_1=0$，可得 $a_{22}=\dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}$，$b_2=\dfrac{a_{21}b_1}{a_{11}}$，因此方程（2）成为 $a_{21}x_1+\dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}x_2=\dfrac{a_{21}b_1}{a_{11}}$，即 $a_{21}(a_{11}x_1+a_{12}x_2)=a_{21}b_1$，所以方程（1）的解就是方程（2）的解。因为方程（1）有无穷多解，所以方程组(Ⅰ)有无穷多解。

综合以上的讨论，可以得出：

二元线性方程组（未知数的系数不全为零）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

当 $D\neq 0$ 时有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}; \end{cases}$$

当$D=0$，但 D_1、D_2 中至少有一个不等于零时，无解；

当 $D=D_1=D_2=0$ 时，有无穷多解。

例 1　用行列式解方程组：

$$\begin{cases} 2x+3y-8=0, \\ x-2y+3=0. \end{cases}$$

解：先把方程组化为：

$$\begin{cases} 2x+3y=8, \\ x-2y=-3. \end{cases}$$

计算，

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}=2\times(-2)-1\times3=-7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 3\\-3 & -2\end{vmatrix}=8\times(-2)-(-3)\times3=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\1 & -3\end{vmatrix}=2\times(-3)-1\times8=-14.$$

$$\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\qquad \frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

所以方程组有唯一解

$$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$$

例 2　解关于x、y的方程组：

$$\begin{cases}mx+y=m+1,\\x+my=2m.\end{cases}$$

解：$D=\begin{vmatrix}m & 1\\1 & m\end{vmatrix}=m^2-1=(m+1)(m-1),$

$$D_1=\begin{vmatrix}m+1 & 1\\2m & m\end{vmatrix}=m(m+1)-2m=m^2-m$$

$$=m(m-1),$$

$$D_2=\begin{vmatrix}m & m+1\\1 & 2m\end{vmatrix}=2m^2-(m+1)=2m^2-m-1$$

$$=(2m+1)(m-1).$$

（1）当$m\neq\pm1$时，$D\neq0$，方程组有唯一解

$$\begin{cases}x=\dfrac{m}{m+1},\\[2ex]y=\dfrac{2m+1}{m+1}.\end{cases}$$

（2）当 $m=-1$时，$D=0$，$D_1=2\neq0$．方程组无解。

（3）当 $m=1$ 时，$D=0$，$D_1=D_2=0$，方程组有无穷多解（$x=t$，$y=2-t$，t 可取任意值）。

练　习

1．用行列式解下列方程组：

（1）$\begin{cases}7x-8y=10,\\6x-7y=11;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}5x+11y-8=0,\\4x+15y+6=0.\end{cases}$

2．不解方程组，判定下列方程组有唯一解，无解，还是有无穷多解：

（1）$\begin{cases}2x+3y=7,\\5x-2y=1;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}6x+9y=7,\\4x+6y=2;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}4x-3y=5,\\8x+6y=22;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}5x-15y=10,\\3x-9y=6.\end{cases}$

3．解下列关于 x、y 的方程组：

（1）$\begin{cases}x+(m-1)y=1,\\(m-1)x+y=2;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}4x+my=m,\\mx+y=1.\end{cases}$

习　题　一

1．写出下列行列式的展开式，并化简：

（1）$\begin{vmatrix}\sin\alpha-\sin\beta & \cos\alpha+\cos\beta\\ \cos\alpha-\cos\beta & \sin\alpha+\sin\beta\end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix}x-1 & x^3\\ 1 & x^2+x+1\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix}1-\sqrt{2} & 2-\sqrt{3}\\ 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{2}\end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix}\log_a b & 1\\ 2 & \log_b a\end{vmatrix}$．

2．用行列式解方程组：

（1）$\begin{cases}13x-7y-10=0,\\19x+15y-2=0;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}\dfrac{7}{s}+\dfrac{9}{t}=3,\\\dfrac{17}{s}+\dfrac{7}{t}=5.\end{cases}$

3. 用行列式解关于 x、y 的方程组：

（1）$\begin{cases}x\cos A-y\sin A=\cos B,\\x\sin A+y\cos A=\sin B;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}x\cos A+y\sin A=\sin A,\\x\sin A+y\cos A=-\cos A.\end{cases}$ $\left(A\neq\dfrac{2k+1}{4}\pi,\ k\in Z\right)$

4. 判断 m 取什么值时，下列方程组有唯一解：

（1）$\begin{cases}(m^2-1)x-(m+1)y=m+1,\\m^2x-(m+1)y=m-1;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}x-(m^2-5)y=-1,\\(m+1)x-(m+1)^2y=1.\end{cases}$

5. 解下列关于 x、y 的方程组：

（1）$\begin{cases}ax+(2a-1)y=a^2+2a-1,\\x+ay=2a;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}mx+y=-1,\\3mx-my=2m+3.\end{cases}$

6. 已知方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\end{cases}\quad(a_{21}a_{22}b_2\neq0),$$

求证：

（1）在 $\dfrac{a_{11}}{a_{21}}\neq\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$ 时，方程组有唯一解；

（2）在 $\dfrac{a_{11}}{a_{21}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ 时，方程组无解；

（3）在 $\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_1}{b_2}$ 时，方程组有无穷多解。

二　三元线性方程组和三阶行列式

6.3　三阶行列式

把九个数排成下面的形式，并在它的两旁各加一条竖线，如

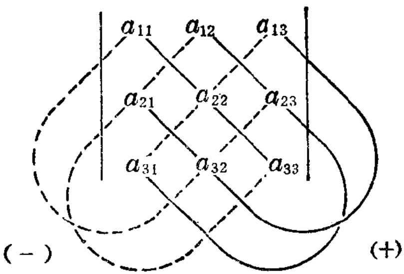
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

用它来表示

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$
$$-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}. \qquad (2)$$

（1）式叫做三阶行列式，（2）式叫做三阶行列式的展开式。三阶行列式有三行三列。

三阶行列式可以按下图展开：



实线上三个元素的积取正号，虚线上三个元素的积取负号，得出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

这种展开三阶行列式的方法叫做对角线法则.

例 用对角线法则计算下面行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

解: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 3\times 1\times(-2) + (-2)\times 0\times 1 + 2\times(-2)\times 3$$

$$-2\times 1\times 1 - (-2)\times(-2)\times(-2) - 3\times 0\times 3$$

$$= -6 + 0 - 12 - 2 + 8 - 0 = -12.$$

练 习

1. 用对角线法则计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

2. 用对角线法则展开下列行列式，并化简:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ m & n & l \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$.

6.4 三阶行列式的性质

用对角线法则计算三阶行列式的值比较麻烦，利用行列式的性质，可以使计算简化。下面我们就以三阶行列式为例，研究行列式的主要性质。

性质 1　把行列式的各行变为相应各列（就是第 i 行变为第 i 列，$i=1, 2, 3$），行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

证明：按对角线法则分别把上式两边的行列式展开，它们都等于

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$
$$-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23},$$

所以等式成立。

由性质 1 可知，对于行列式的行成立的性质，对于列也一定成立；反过来也是对的。因此，下面的各条性质，我们只证明行和列中的一种情况。

性质 2　把行列式的两行（或两列）对调，所得行列式与原行列式的绝对值相等，符号相反。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

这个性质也可用对角线法则展开来证明。

性质 3　如果行列式某两行（或两列）的对应元素相同，那么这个行列式的值等于零.

证明：假设行列式 D 有两行（或两列）的对应元素相同，将这两行（或两列）进行对调，根据性质 2，对调后的行列式应等于 $-D$；而实际上对调后的行列式与原行列式相同，所以有 $D=-D$，移项得 $2D=0$，即 $D=0$。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}=0。$$

性质 4　把行列式的某一行（或一列）的所有元素同乘以某个数 k，等于用数 k 乘以原行列式. 例如

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

证明：将上式左边的行列式展开后，所得各项都含有因子 k，将公因子 k 提出，作为另一个因式的多项式与右边行列式的展开式相同。

推论 1　行列式的某一行（或一列）有公因子时，可以把公因子提到行列式外面.

例 1　计算 $D=\begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{vmatrix}$.

解：第一行各元素乘以 2，第二行乘以 3，第三行乘以 6，相应地以 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$ 乘整个行列式，得

$$D=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\times 4=\frac{2}{3}。$$

推论 2　如果行列式某一行（或一列）的所有元素都是零，那么行列式的值等于零。

我们可以取 $k=2$，用它乘行列式D中全为零的行（或列）的各元素，原行列式不变，根据性质 4．它的值应是原行列式的两倍，也就是 $D=2D$，所以 $D=0$。如

$$\begin{vmatrix}-8 & \frac{1}{5} & 9\\ 0 & 0 & 0\\ \sqrt{3} & 7 & 3\end{vmatrix}=0.$$

实际上，行列式的每一行和每一列都有一个元素作为因数出现在行列式展开式的每一项中，如果行列式有一行或一列的元素都是零，那么它的展开式的所有项就都含有因数零了。

性质 5　如果行列式某两行（或两列）的对应元素成比例，那么行列式的值等于零。

例如，根据性质 4 的推论 1 和性质 3，可以得出

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\cdot 0=0.$$