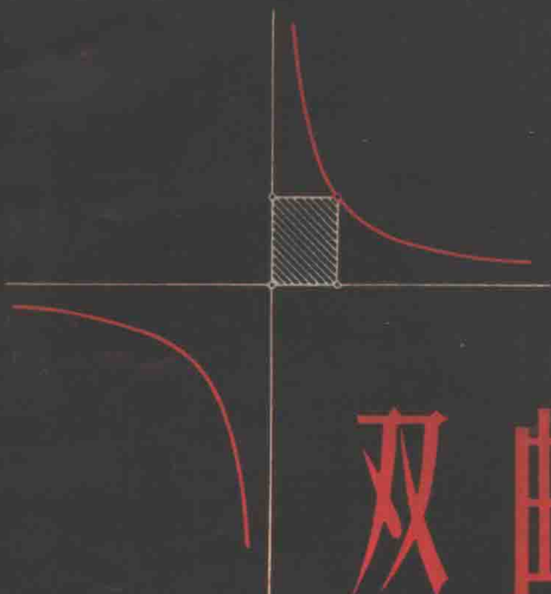
〔苏联〕В.Г.舍尔瓦托夫 著



# 双曲綫函数

科学技術出版社

数学通俗講話

# 双曲線函数

〔苏联〕B. Г. 舍尔瓦托夫著
程 德 鄰 譯

科学技術出版社

## 內容提要

本書用淺近的几何方法及分析观点說明双曲綫函数的基本性質和初步理論．适于中等学校教师、学生、高等学校学生及数学小組作参考之用。

数学通俗講話

**双曲綫函数**

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

原著者（苏联）В. Г. ШЕРВАТОВ

原出版者 ГОСТЕХИЗДАТ 1954 年版

譯者 程 德 鄰

*

科学技術出版社出版

（上海建國西路 336 弄 1 号）

上海市書刊出版業營業許可証出〇七九号

上海新華印刷厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

統一書號：13119 · 66

開本 850×1168 耗 1/32 · 印張 1 3/4 · 字數 38,000

一九五六年十二月第一版

一九五六年十二月第一次印刷 · 印数 1－11,500

定价：(10) 三角八分

# 序　　言

这本小册子的內容是所謂“双曲綫函数”的理論的初等叙述，双曲綫函数在許多方面是与通常的三角函数相类似的。在各种不同的物理学及技术科学的研究中常常遇到双曲綫函数。它也在罗巴契夫斯基的非歐几何学中起着重要的作用，因为它参与着这种几何学的所有三角关系(例如参考 A.II. 諾尔坚著的“罗巴契夫斯基几何学概論”1953 年莫斯科出版，該書第九章的內容是与这本小册子相近的)。但是，不涉及这些应用的双曲綫函数理論可能对中等学校的教师及学生会有很大的兴趣。因为双曲綫函数与三角函数間的类似性，可按新的方法闡明三角学的許多問題。

这本小册子由三章組成：第一章講述双曲旋轉以及它在研究双曲綫的性質方面的应用，它会引起一定的独特的兴趣。第二章占本書的主要地位，講述双曲綫函数的初等理論。第三章緊密的連系着 A. И. 馬尔庫舍維奇著的“面積与对数”，該書編为“数学通俗講話”第九輯；这一章建立起双曲綫函数的理論与对数理論間的联系。

双曲綫函数理論的另一种建立法不利用双曲旋轉，其內容見Д. И. 別列比勒金的論文“双曲綫函数的几何理論”，該文原載“数学教育”論文集第二期，OHTИ 1934 年莫斯科出版；可惜現时这种論文集很少介紹有关評論。还可以向讀者介紹 Б. Н. 杰隆及 Д. Н. 萊可夫合著的“解析几何学”第一部分，1948 年莫斯科出版。該書有丰富的与我們第一章所述的內容相接近的材料。

本書所估計到的讀者是中学数学小組的領導者和参与者。它

也可以用在高等学校的数学小組的活动中。第三章末尾比較困难的材料，学生可以不必閱讀。不过，本書那兒也不需要讀者具备任何超过中等学校教程范圍的知識。

在編寫本書时，И. М. 雅格洛姆的指示与帮助起了很大的作用。作者謹此表示誠懇的謝意。

舍尔瓦托夫（В. Г. Шерватов）

# 目　　次

# 第一章　双曲旋轉

## §1　向着直綫的压縮

几何作圖問題常常是应用向着一点压縮的变换（这个变换又称同位相似或中心相似的变换）來解答的．向着点 $O$（$O$ 称为压縮中心）压縮系数为 $k$ 的压縮使平面上每一点 $A$ 变成射綫 $OA$ 上的点 $A'$，且 $\frac{OA'}{OA}=k$，即 $OA'=k\cdot OA$（圖 1，$a$、б）．若压縮系数 $k$ 大于 1，則 $OA'>OA$（圖 1，б）；这种变换称为“从点 $O$ 擴張”．在向着点 $O$ 的压縮下，点 $O$ 本身保持原位．

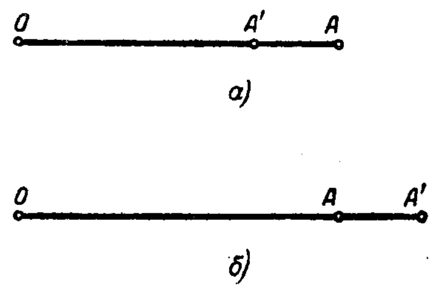


圖　1

在向着点 $O$ 的压縮下，任何圖形 $F$ 变成圖形 $F'$，它是依相似中心 $O$ 及相似系数 $k$ 与原來圖形相似的（圖 2）．若 $k<1$，圖形則縮小；若 $k>1$，圖形則放大．在向着一点的压縮下，每一条直綫变成直綫（圖 3$a$）；平行的直綫变成平行的直綫（圖 3б）．在向着一点的压縮下，每一个圓变成圓（圖 3в）．

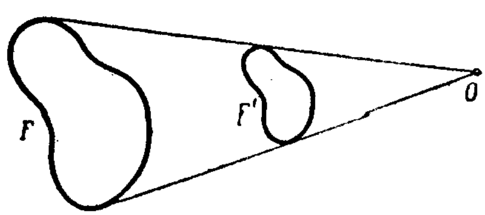


圖　2

在向着一点的压縮下，平面上一切綫段依压縮系数 $k$ 縮小（或放大）．同样，一切圖形的面積依比值 $k^2$——压縮系数的平方縮小

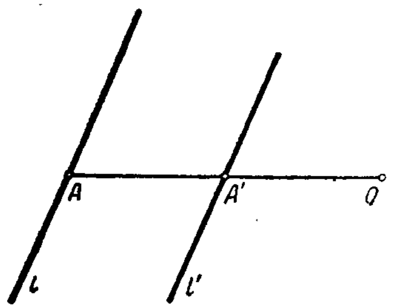



圖　3a

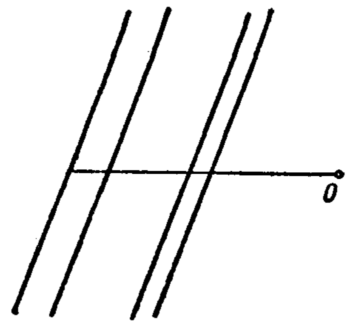



圖　3б

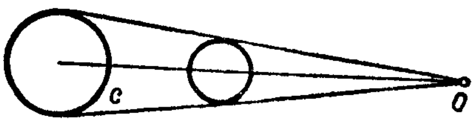



圖　3в

(或放大)。实际上，令 $F$ 为平面圖形。再考察平面的某种小的正方形網(圖 4 )。圖形 $F$ 的面積近似的等于包含在$F$內的正方形的个数与一个正方形面積的乘積；網的正方形愈小，其誤差也就愈小。选擇充分小的正方形，可以使誤差小于任何(无論如何小!)数 $\sigma$。在向着点的压縮下，正方形的網变成新的正方形的網，至于圖形 $F$ 則变成圖形 $F'$，且 $F'$ 包含有与原來 $F$ 所包含的正方形同样多的新網的正方形(若 $k<1$，圖形則縮小，若 $k>1$，則圖形放大)。$F'$ 的面積近似的等于包含在 $F'$ 內的正方形的个数与一个正方形面積的乘積。但每一个新的正方形的面積等于原來的正方形的面積与 $k^2$ 的乘積(因为正方形的边長擴大了 $k$ 倍)。所以 $F'$ 的面積等于 $F$ 的面積与 $k^2$ 的乘積。

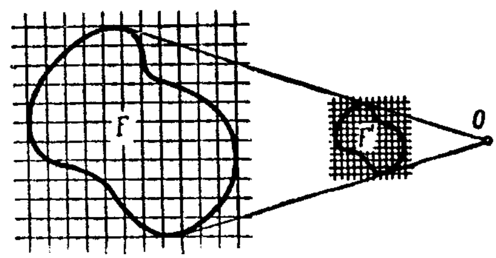



圖　4

我們來分析一下下面作圖題的解答作为向着一点的压縮的应

用例子：在已知直角三角形 $ABC$ 內作一內接矩形 $BDEF$，矩形兩边之比为已知(圖 5)。

首先照已知的边的比例作任意矩形 $BD'E'F'$，使頂点 $D'$，$F'$ 分別落在 $AB$，$BC$ 边上。$BE'$ 連綫交三角形 $AC$ 边于 $E$ 点。容易看出，以 $B$ 为压縮中心，$k=\dfrac{BE}{BE'}$ 为压縮系数的压縮，可將矩形 $BD'E'F'$ 变成所求的矩形 $BDEF$。所以，利用向着一点的压縮，很容易作出所求的矩形❶。

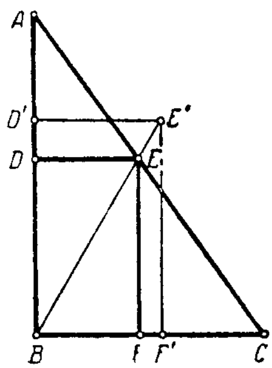


圖 5

有时，在几何中更便于应用的是另一种变換——向着直綫的压縮，向着直綫 $o$ (称为压縮軸)，压縮系数为 $k$ 的压縮，使平面上每一点 $A$ 变成在直綫 $o$ 的垂綫 $PA$ 上的点 $A'$，且 $\dfrac{PA'}{PA}=k$ 或 $PA'=k\cdot PA$ (圖 6, $a$、б)。若压縮系数 $k$ 大于 1，則 $PA'>PA$ (圖 6, б)；这种变換称为"从 $o$ 擴張"。在向着直綫 $o$ 的压縮下，直綫 $o$ 上的一切点保持原位。

在向着直綫的压縮下，圖形 $F$ 变成新的圖形 $F'$，已与圖形 $F$ 不相似了(圖 7)。

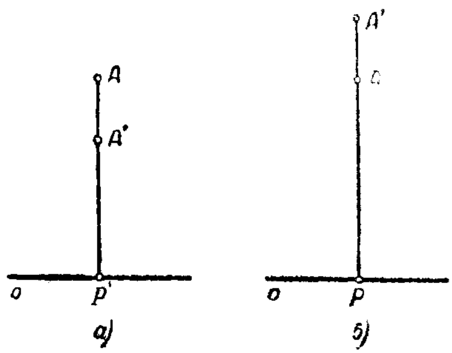


圖 6

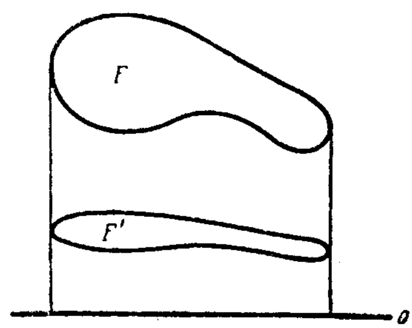


圖 7

---

❶ 如果已知的三角形 $ABC$ 不是直角三角形，也可以类似的解答这个問題，但我們不在这里討論

向着直綫的压縮具有下列类似于向着一点的压縮的性質．就是：

$a$）在向着直綫的压縮下，每一条直綫变成直綫．

若直綫 $l$ 平行于直綫 $o$ 且相距为 $d$，则直綫 $l$ 变成直綫 $l'$，$l'$ 也平行于 $o$，且与 $o$ 相距为 $kd$（圖 8$a$）．

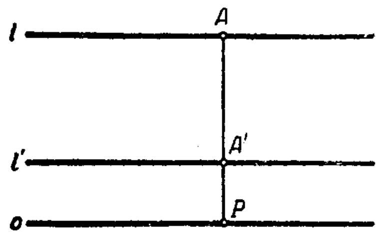



圖 8$a$

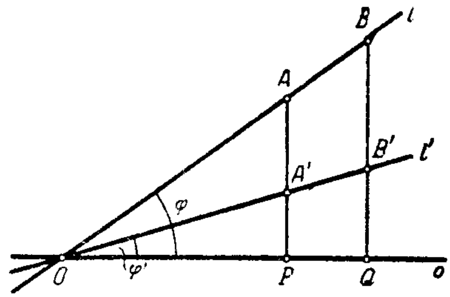



圖 8б

設直綫 $l$ 不平行于直綫 $o$，而与 $o$ 相交于 $O$ 点（圖 8б）．在向着直綫 $o$ 的压縮下，$O$ 点保持原位．設 $A$ 是直綫 $l$ 上任意一点（不同于 $O$ 点），在向着直綫 $o$ 的压縮下，点 $A$ 变成点 $A'$；$PA'=k\cdot PA$．取直綫 $l$ 上另一点 $B$；若 $B'$ 是从 $B$ 向下所作直綫 $o$ 的垂綫 $BQ$ 与直綫 $OA'$ 的交点，则 $\frac{B'Q}{BQ}=\frac{A'P}{AP}=k$（这个結果可以从相似三角形 $OQB$ 及 $OPA$，$OQB'$ 及 $OPA'$ 得到），或

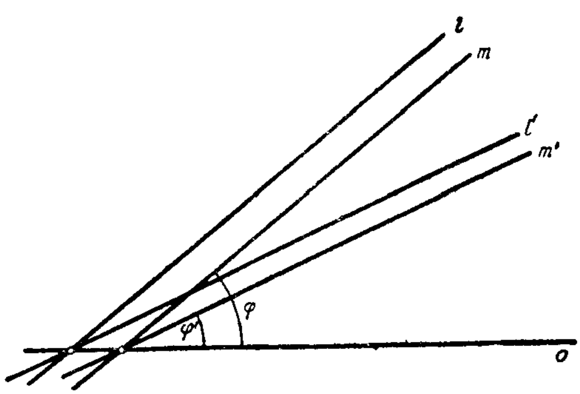



圖 9

$QB'=k\cdot QB$。由此可見，在向着直綫 $o$ 的压縮下，$B$ 点变成 $B'$点。因为 $B$ 是直綫 $l$ 上任意一点，所以直綫 $l$ 在向着直綫 $o$ 的压縮下变成直綫 $OA'$（当然就是用 $l'$ 表示的直綫）。

б）在向着直綫的压縮下，平行的直綫变成平行的直綫。

設直綫 $l$ 及 $m$ 互相平行，那末它們之間就沒有公共点。則由它們压縮而得的直綫 $l'$ 及 $m'$ 同样沒有公共点（假如它們有公共点，那只有当直綫 $l$ 与 $m$ 有公共点时才有可能）；可見，直綫 $l'$ 与 $m'$ 也是互相平行的（圖 9）❶。

в）在向着直綫的压縮下，在一条直綫上的綫段之比，保持不变。

实际上，$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$ 根据平行綫及相交綫束的性質可以得到（圖 10）。

г）在向着直綫的压縮下，所有圖形的面積按同一比值（等于压縮系数 $k$）改变。

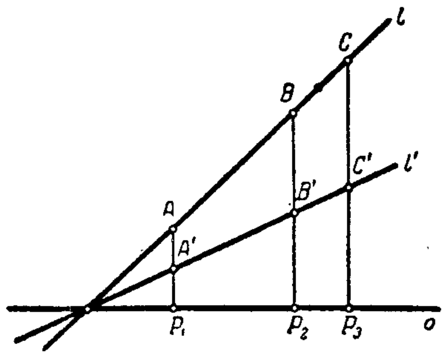



圖 10

考察圖形 $F$ 及小的正方形網，則得 $F$ 的面積近似的等于包含在 $F$ 里面的正方形的个数与一个正方形的面積的乘積（圖 11）。我們假定網綫方向之一平行于压縮軸。在压縮下，正方形的網轉变成个数相等的矩形網，每个矩形的面積等于正方形的面積乘 $k$（正方形的一边仍旧沒有变，

---

❶ 若 $\varphi$ 及 $\varphi'$ 分別为由直綫 $l$ 及 $l'$ 与压縮軸 $O$ 所組成的角，从圖 86 易知

$$\operatorname{tg}\varphi'=\frac{PA'}{PO}=\frac{k\cdot PA}{PO}=k\cdot\frac{PA}{PO}=k\operatorname{tg}\varphi.$$

由此可見，与直綫 $o$ 相交組成同一样的角 $\varphi$ 的平行直綫变成平行的直綫（与直綫 $o$ 相交組成同样的角 $\varphi'$）

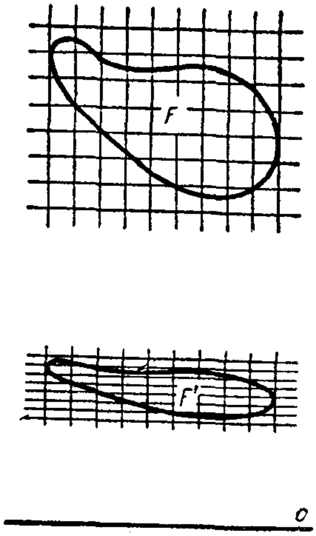



圖 11

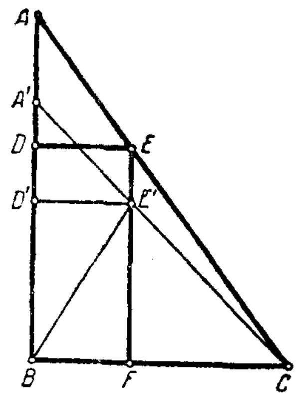



圖 12

第二边的長度擴大了$k$倍).其次可以推得在向着一点.压縮系数为$k$的压縮下,所有圖形的面積改变$k^2$倍,其証明也相同(見第2頁).

我們來分析一下下列作圖題的解法作为向着直綫的压縮的应用例子❶：在已知直角三角形 $ABC$ 内作一内接矩形 $BDEF$，使其兩边之積 $BD \cdot BF = d^2$（卽矩形的面積已知）(圖 12)。为了解答上述問題，我們將三角形 $ABC$ 向 $BC$ 边，按压縮系数 $k=\frac{BC}{BA}$ 進行压縮;則該三角形变成等腰直角三角形 $A'BC$,其中$BA'=k \cdot BA = \frac{BC}{BA} \cdot BA = BC$,其面積等于 $kS$（此处 $S$ 是三角形$ABC$的面積)。在这个压縮之下,矩形 $BDEF$ 变成矩形 $BD'E'F$，其面積等于$kd^2$（由于性質 r）。現在我們必須在等腰直角三角形 $A'BC$ 内作一内接矩形 $BD'E'F$，其面積等于 $kd^2$。

这个不难得到,因为

$$S_{BFE'D'} = S_{\triangle BCA'} - (S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'})$$

因此

$$S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'} = S_{\triangle BCA'} - S_{BFE'D'} = kS - kd^2.$$

❶ 可与第 3 頁的問題比較一下

但是，另一方面

$$S_{\triangle FCE'}+S_{\triangle A'D'E'}=\frac{1}{2}FE'^2+\frac{1}{2}D'E'^2=\frac{1}{2}(FE'^2+D'E'^2)$$
$$=\frac{1}{2}BE'^2$$

（此处利用三角形 $A'BC$ 与三角形 $A'D'E'$ 及 $E'FC$ 相似，則得三角形 $A'D'E'$ 及 $E'FC$ 也是等腰的）。所以，我們可得

$$\frac{1}{2}BE'^2=ks-kd^2.$$

現在知道了綫段 $BE'$ 的長度，我們不难找到 $E'$ 点，然后卽刻可以在三角形 $A'BC$ 内作出矩形 $BD'E'F$，以及在三角形 $ABC$ 内作出矩形 $BDEF$。

这个問題的解答依数量 $d$ 为轉移，可能有两个，一个或一个都沒有。

这个問題不利用向着直綫的压縮的几何解答尙不知道❶

与向着一点的压縮相反，向着直綫的压縮沒有將圓变成圓。在向着直綫的压縮下，圓变成另外的曲綫，称为橢圓（圖 13）。利用向着直綫的压縮的性質 a～r 可以引出一系列的橢圓的几何性質，但是，这已超出这本小册子的范圍了。

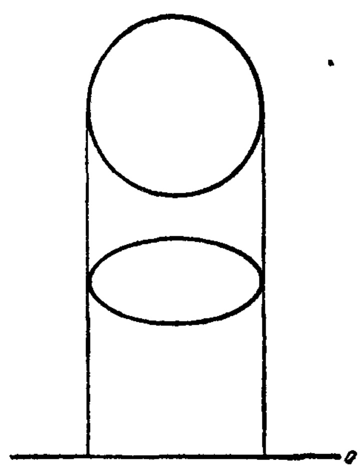


圖 13

## §2 双曲旋轉

今后主要的是叙述反比圖形，卽如下方程式的曲綫：

$$y=\frac{a}{x} \text{ 或 } xy=a$$

这种曲綫称为双曲綫。如圖 14。

顯然，当 $x$ 的絕对値愈大时，$y$ 的絕对値就愈小，或相反：若

---

❶ 如果已知的三角形 $ABC$ 不是直角三角形，也可以类似的解答这个問題，但我們不在这里討論

$x\to\infty$，則 $y\to 0$；若 $y\to\infty$，則 $x\to 0$。这在几何上表示双曲綫无限的接近于坐标軸，但永远也不能与坐标軸相交（由方程式 $xy=a$ 得知，无論是 $x$，无論是 $y$ 都不能等于零）。

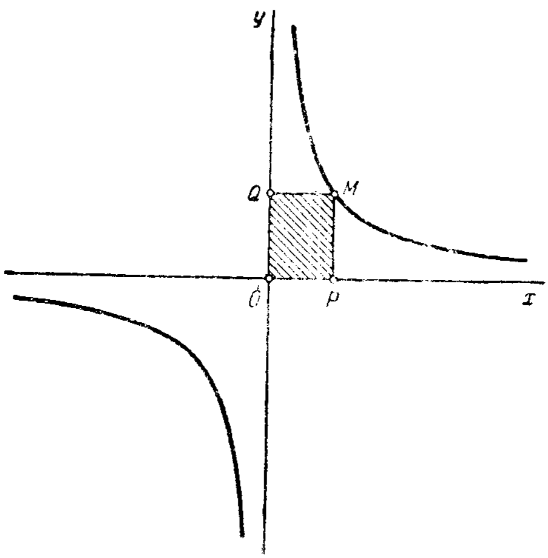



圖 14

当某曲綫无限接近于直綫但不达到直綫，这样的直綫称为該曲綫的漸近綫。所以，坐标軸是双曲綫的漸近綫。

双曲綫由兩条支綫組成，当 $a>0$ 时，圖形在第一象限（$x$ 与 $y$ 同为正数）与第三象限（$x$ 与 $y$ 同为負数）。

方程式 $xy=a$ 有簡單的几何意义：过双曲綫上任意一点 $M$ 引坐标軸的平行綫与坐标軸組成的矩形 $MQOP$（圖 14）的面積等于 $a$，卽矩形的面積与点 $M$ 的选擇无关。实际上，顯然，$OP=x$，$PM=y$，則

$$S_{MQOP}=OP\cdot PM=x\cdot y=a.$$

若称矩形 $MQOP$ 为点 $M$ 的坐标矩形，則可以說：位于第一和第三象限內的点，如果它的坐标矩形的面積是常数，則它的几何軌迹是双曲綫。

双曲綫有对称中心：双曲綫的兩支彼此关于坐标原点 $O$ 对称。由关于 $O$ 点对称的坐标矩形 $MQOP$ 及 $M'Q'OP'$（圖 15）有相等的面積可以得到这种論断的証明。双曲綫同时有兩根对称軸，就是坐标角的平分綫 $aa$ 及 $bb$（圖 16）。实际上，关于 $aa$ 对称的

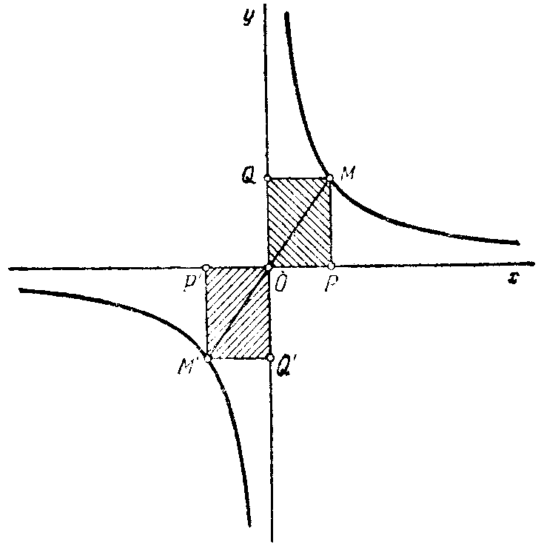



圖 15

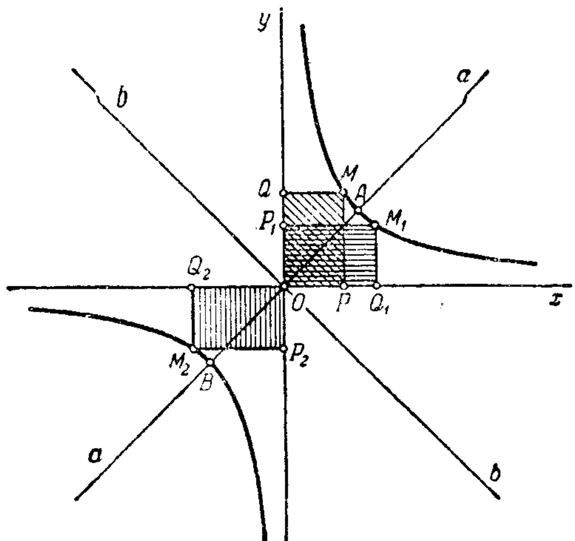



圖 16

坐标矩形 $MQOP$ 及 $M_1Q_1OP_1$ 有相等的面積；关于 $bb$ 对称的坐标矩形 $MQOP$ 及 $M_2Q_2OP_2$ 也有相等的面積．对称中心 $O$ 及对称軸 $aa$ 和 $bb$ 常常簡称为双曲綫的中心及軸；双曲綫与軸 $aa$ 相交的交点 $A$ 及 $B$，称为双曲綫的頂点．

設有双曲綫 $xy=a$．向 $x$ 軸按压縮系数 $k$ 進行平面压縮．在这个压縮下，双曲綫 $xy=a$ 变成双曲綫 $xy=ak$，因为每一点的横坐标 $x$ 保持不变，但縱坐标 $y$ 却被 $y\cdot k$ 所替代（圖 17）．然后，向 $y$ 軸按压縮系数 $\frac{1}{k}$ 再進行一次压縮．在这个压縮下，双曲綫 $xy=ak$ 变成双曲綫 $xy=\frac{ak}{k}=a$；任意一点的縱坐标 $y$ 在这个新的向軸的压縮下沒有改变，但横坐标变为 $\frac{x}{k}$．因此，我們看到，經依次的向 $x$ 軸按压縮系数 $k$ 再向 $y$ 軸按压縮系数 $\frac{1}{k}$ 進行平面压縮后，双曲綫 $xy=a$ 化到原狀．依次進行兩次向着直綫的平面压縮所組成的变换称为双曲旋轉．“双曲旋轉”这个題标是与双曲綫上的全部的点在这个变换下“沿曲綫滑动”的事实相連系的；如圖 17，点 $M$ 首先变到点 $M_1$，然后点 $M_1$ 又变到点 $M'$．即最后双曲旋轉將双曲綫上的点 $M$ 变到在同一双曲綫上的 $M'$．这个情況类似于圓周旋轉——双曲綫好像在“轉”．

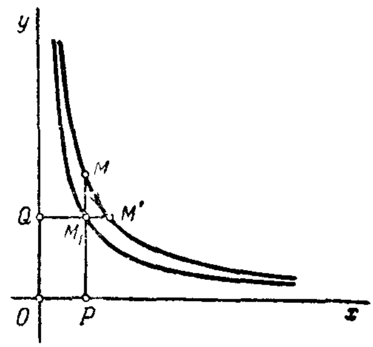


圖 17

双曲旋轉有下列性質：

а）在双曲旋轉下，每一条直綫变成直綫（§1 性質 а 的推論）．

б）在双曲旋轉下，坐标軸（双曲綫的漸近綫）变成自己（因为它們在組成双曲旋轉的兩次压縮中的每一次压縮下都变成自己）．

в）在双曲旋轉下，平行的直綫变成平行的直綫（§1 性質 б

的推論)。

г) 在双曲旋轉下,同一条直綫上的綫段之比保持不变(§1性質 в 的推論)。

д) 在双曲旋轉下,圖形的面積保持不变(因为在第一次向着直綫的压縮下,所有圖形的面積乘以 $k$,但在第二次压縮下——除以$k$。見§1性質 г)。

很值得注意的是:利用双曲旋轉,可以使双曲綫上每一点变成双曲綫同一支上的任意别的点。实际上,第一次压縮使双曲綫 $xy=a$ 上的点 $(x, y)$ 变成双曲綫 $xy=ak$ 上的点 $(x, ky)$;第二次压縮使双曲綫 $xy=ak$ 上的点 $(x, ky)$ 变成原双曲綫 $xy=a$ 上的点 $(\frac{x}{k}, ky)$ (参考圖 17)。因此,由于双曲旋轉的結果使点$(x, y)$变成点$(\frac{x}{k}, ky)$。由此可見,利用适当的双曲旋轉可以使双曲綫上的点 $(x, y)$ 变成同一双曲綫上的任意别的点 $(x_1, y_1)$:为此只須选擇 $k$ 使得 $x_1=\frac{x}{k}$或 $k=\frac{x}{x_1}$。

## §3 双曲綫的几种性質

利用双曲旋轉可以証明一系列很有趣的双曲綫的几何性質。不过我們須先定义什么叫做双曲綫的弦和切綫。

与双曲綫相交于兩点的直綫称为双曲綫的割綫。以双曲綫上的兩点作为端点的割綫綫段称为双曲綫的弦。双曲綫的割綫(弦也是这样)有兩类:第一类的割綫僅与双曲綫的一支相交;而第二类的割綫則与双曲綫的兩支相交(圖 18$a$)。考察第一类的任何割綫。在平行于割綫的直綫中,有与双曲綫相交于兩点的;有完全不与双曲綫相交的;最后,其中兩条与双曲綫只有一个公共点的直綫称为双曲綫的切綫(圖 18б)[1]。在双曲旋轉下,双曲綫的弦 $UV$ 变

[1] 双曲綫的切綫同时可以定义为:与双曲綫有一个公共点而不平行于漸近綫的直綫(任何平行于漸近綫的直綫与双曲綫相交于一点,但不是切綫)