莫绍揆
王元元 著

计算机科学丛书

可计算性理论

科学出版社

计算机科学丛书

可计算性理论

莫绍揆　王元元　著

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书包括数理逻辑的递归论和形式语言论两部分内容．一至八章为递归论部分，详尽地研究了初等函数、原始递归函数、递归函数及各类算子，充分地讨论了 Turing 机与 Turing 可计算性概念．九、十两章为形式语言论部分，系统地介绍了各种形式语言及相应的语言识别器——各类自动机．作为递归论内容的深入，本书还概要地介绍了递归集、递归枚举集及递归度的概念；作为上述两部分内容的应用，第十一章还讨论了判定问题．

本书可作为高等院校计算机专业及有关专业的教材，也可供计算机科学和数学工作者阅读、参考．

计算机科学丛书

可计算性理论

莫绍揆　王元元 著

责任编辑　那莉莉

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1987年12月第一版　开本：850×1168 1/32

1987年12月第一次印刷　印张：10 3/4

印数：0001—3,200　字数：281,000

ISBN 7-03-000061-7/TP・6

统一书号：15031・888

定价：3.05 元

前　　言

本书的内容包括数理逻辑的递归论与形式语言论．这两部分内容很重要，应用极广，与电子计算机的关系尤为密切，很值得我们仔细研究．

首先，极容易看出，如不考虑电子计算机在空间（存贮单元数）和时间（计算时间）上受客观事物的限制，那就可以说，凡递归函数都可用电子数字计算机来计算；反之，能够用电子数字计算机计算的，也必然是递归函数．因此，计算机的本领可以用递归函数来刻划．可以说，递归性是使用计算机的前提，凡不具递归性的函数，不管速度多快的计算机也是无法进行计算的．现在又提出了现实可计算性的概念．粗略地说，它意指：当计算函数 $f(n)$ 时，如果所使用的存贮单元（空间）的上确界、计算步骤（时间）的上确界可以用 n 的多项式来表示，那么 $f(n)$ 便是现实可计算的，否则（比如说，其上确界为 2^n）便说是非现实可计算的．对于非现实可计算的函数，由于其所需存贮单元太多，所需计算时间太长，因此人们无法现实地计算．由此便牵涉到计算复杂性、化归问题、不可解度等等，这些都是递归论的内容，且与计算机的使用有密切的关系．如果使用 Church 论点，凡可计算的函数都是递归函数，那么我们还可进一步说，凡可计算的函数都可用计算机计算．今后对于计算机的改进，将限于容量的增大和速度的加快，而无法作进一步的突破（把计算机所不能计算的函数变为可计算的）了．

其次，使用计算机时必须先进行程序设计．由于人工设计非常困难，因此应该设法使程序自动化，这样便导致了各种各样的算法语言．人们在解题前先把计算程序用比较接近自然语言的算法语言写出．在程序自动化中，必须使得计算机能够分析出算法语言的形式结构，从而得出语义而自动作出相应的程序设计．这便

要求用自动机来识别算法语言的形式结构，如此等等. 此外，程序的正确性如何检查、程序如何优化等等，也都直接或间接地与算法语言结构的研究有关.

这两部分的内容很多，这里不能详述. 本书只能就其比较基本的部分(包括判定问题)略作介绍. 至于进一步的内容，如化归问题、不可解度、谓词和集合的分层、计算复杂性、封闭性问题等等，都不再涉及，读者可参阅有关书籍.

本书基本上是自足的，并备有一定数量的习题.

本书由莫绍揆与王元元合著. 莫绍揆给出全书的大纲，并执笔撰写第六章，其余几章由王元元执笔，全稿均经莫绍揆修改. 若尚有不妥之处，敬请读者指正.

中国科学院陶仁骥研究员审阅了本书的原稿并提出了许多宝贵的修改意见，在此谨向他致以深切的谢意.

作者

1985 年 2 月于南京

计 算 机 科 学 丛 书

编 委 会

目　　录

第一章 引 论

1.1 集 合

本书的展开并不以集合论为基础，因为这样做不会给可计算性理论本身和研究这一理论的人带来多少好处．但是，为了叙述便利，为了使读者在阅读本书时参阅其它建基于集合论的可计算性理论文献的方便，我们边使用一些最基本的集合论概念和术语．

1.1.1 集合及其表示方法

集合是具有某种性质的一些客体聚集而成的总体．通常用大写的拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合；用小写的拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的客体，并称之为集合的**成员**或**元素**．元素对于集合的隶属关系用希腊字母"$\in$"表示．例如，"a 是集合 A 的元素"表示为 $a\in A$，反之则表示为 $a\notin A$．

具体集合的表示方法主要有两种：

(1) **列举法** 将集合的元素罗列在左、右花括号之间以表示这个集合．例如：

1) 数字符号的集合$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$．

2) 真值集合$\{T,F\}$，其中 T，F 分别表示命题的真 (True)、假 (False)．

(2) **概括法** 将集合中元素共有的特征性概括为一个语句以表示这个集合．例如：

1) 自然数集合 $N=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$ 可表示为：

$$N=\{x\mid x\ \text{是自然数}\}$$

2) 素数集合可表示为：

$$\{x\mid x\ \text{是自然数，且}\ x\ \text{仅以 1 和自身为因子}\}$$

一般地，我们用 $\{x|P(x)\}$ 表示一个集合，其中 $P(x)$ 是刻划 x 的特性的一个语句(也称谓词，见本章 1.3 节)．换言之，任何客体 x 在集合 $\{x|P(x)\}$ 之中，当且仅当 $P(x)$ 成立．

此外，我们还有一种归纳地定义一个性质的方法．先规定若干客体具有所定义的性质，然后规定一些规则，它们在作用于已知具有该性质的客体时，产生具有同种性质的客体．例如，非负偶数性质可以归纳地定义如下：

(1) (基础条款) 0 是非负偶数．

(2) (归纳条款)如果 x 是非负偶数，那么 $x+2$ 也是非负偶数．

(3) (终极条款)除上述两条款确认的客体外，没有别的东西是非负偶数．

事实上，这种归纳定义过程正是通过确定概念的外延来定义一个性质，因此它同时也确定了一个集合．上例确定了非负偶数的集合 E．当然，E 的归纳定义过程也可写为：

(1) (基础条款) $0\in E$．

(2) (归纳条款)如果 $x\in E$，则 $x+2\in E$．

(3) (终极条款) 除此之外，E 中没有别的客体．

前两个条款保证了这一方法的完备性，即指出 E 中所有元素．第三个条款则保证这一方法的纯粹性，使这样表示的集合 E 中没有任何本不属于它的客体．前两个条款可分别由若干(有限)条文组成．我们约定，在以后的行文中，第三个条款可省略不写．

关于集合的下列概念是常用的．

定义 1.1 没有任何元素的集合称为**空集**，记为 ϕ．

定义 1.2 集合 A，B 称为是**相等**的，记为 $A=B$，如果集合 A，B 具有完全相同的成员．

据定义 1.2：

(1) $\{1,2\}=\{2,1\}=\{1,2,2\}=\{x|x^2-3x+2=0\}$．

(2) 空集是唯一的．

定义 1.3 集合 A 称为集合 B 的**子集**，记为 $A\subseteq B$，如果集合

A 的元素都是集合 B 的元素．集合 A 称为集合 B 的**真子集**，记为 $A \subset B$，如果 $A \subseteq B$，而 $A \neq B$．

下列事实是明显不过的．

定理 1.1 对任何集合 A，B，C，有

(1) $\phi \subseteq A$．

(2) $A \subseteq A$．

(3) 如果，$A \subseteq B$，$B \subseteq A$，那么 $A = B$．

(4) 如果 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，那么 $A \subseteq C$．

(5) 如果 $A = B$，$B = C$，那么 $A = C$．

我们还会碰到下面几个集合论的术语：

定义 1.4 集合 A 称为**有穷集合**，如果 A 中元素的个数是一个自然数；集合 A 称为**可数无穷集合**，如果集合 A 和自然数集合 N 的成员一一对应；否则，集合 A 称为**不可数无穷集合**． 我们用 $|A|$ 表示有穷集合 A 的元素个数．

实数集，甚至它的真子集如闭区间 [0,1] 是不可数无穷集合．Cantor 在证明这一事实时，创造了一种有力的论证方法：**对角线方法**．他反过来假设[0, 1]是可数无穷集合，从而可将[0, 1]中的全体成员排成一列无穷小数(与自然数全体一一对应)：

$$
\begin{array}{ll}
0. & 0.\,x_{00}\ x_{01}\ x_{02}\ \cdots \\
1. & 0.\,x_{10}\ x_{11}\ x_{12}\ \cdots \\
2. & 0.\,x_{20}\ x_{21}\ x_{22}\ \cdots \\
3. & 0.\,x_{30}\ x_{31}\ x_{32}\ \cdots \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

然后他构造数 $x = 0.\,x_0x_1x_2\cdots$，使得

$$x_i = \begin{cases} 0 & 当\ x_{ii} \neq 0 \\ 1 & 当\ x_{ii} = 0 \end{cases}$$

显然 $0 \leqslant x \leqslant 1$，但 x 不同于上述排列中的任何一个数，即 x 不在 $[0, 1]$ 中．结果出现矛盾．

在本书中，我们对"对角线方法"的兴趣远远超出利用这一方法所得到的上述事实．

1.1.2 集合的运算

集合的并、交、差、幂运算分别定义如下：

定义 1.5 集合 A 和 B 的并集 $A \cup B$：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ 或\ x \in B\}$$

定义 1.6 集合 A 和 B 的交集 $A \cap B$：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ 且\ x \in B\}$$

定义 1.7 集合 A 和 B 的差集 $A - B$（或 B 的对于 A 的补集）：

$$A - B = \{x \mid x \in A \ 且\ x \notin B\}$$

定义 1.8 集合 A 的幂集 $\rho(A)$：

$$\rho(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

容易证明关于这些运算的一些性质．

定理 1.2 对任意集合 A，B，C，有

(1) $A \cup A = A$，$A \cap A = A$．

(2) $A \cup \phi = A$，$A \cap \phi = \phi$．

(3) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$．

(4) $A - B \subseteq A$，$A - \phi = A$．

(5) 如果 $A \subseteq B$，$C \subseteq D$，那么 $A \cup C \subseteq B \cup D$，$A \cap C \subseteq B \cap D$．

(6) 下列三个事实等价：

$$A \subseteq B，A \cup B = B，A \cap B = A．$$

(7) $A \cap (B - A) = \phi$，$A \cup (B - A) = A \cup B$．

(8) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$，

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$，

[证] 我们仅证明上述(8)的第一式，其余留给读者完成.

设 x 是 $A-(B\cup C)$ 中任一元素，那么 $x\in A$, $x\notin B\cup C$，因而 $x\in A$，但 $x\notin B$, $x\notin C$. 由于 $x\in A$ 而 $x\notin B$, $x\in A-B$; 同理，$x\in A-C$，因此 $x\in(A-B)\cap(A-C)$. 我们得知

$$A-(B\cup C)\subseteq(A-B)\cap(A-C).$$

反之，设 x 是 $(A-B)\cap(A-C)$ 中任一元素，那么 $x\in A-B$, $x\in A-C$，从而有 $x\in A$, $x\notin B$, $x\notin C$，即 $x\in A$, $x\notin B\cup C$，因此 $x\in A-(B\cup C)$. 我们又证得

$$(A-B)\cap(A-C)\subseteq A-(B\cup C).$$

综上所述(8)成立。　　证毕.

定理 1.3 集合的并、交运算都满足交换律和结合律，并且并运算对交运算可分配，交运算对并运算也可分配，即

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

证明并不困难，这里从略.

1.1.3 集合的笛卡儿积

我们把形如 $\langle a, b\rangle$ 并且满足条件

$$\langle a_1, b_1\rangle=\langle a_2, b_2\rangle \text{ 当且仅当 } a_1=a_2,\ b_1=b_2$$

的客体称为**序偶**. 称 $\langle\langle a,b\rangle, c\rangle$ 为**三元矢**，缩写为 $\langle a,b,c\rangle$. 一般地，称 $\langle\langle a_1,\cdots,a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$ 为 **n 元矢**，其中 $\langle a_1,\cdots,a_{n-1}\rangle$ 是 $n-1$ 元矢的缩写，$\langle\langle a_1,\cdots,a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$ 又缩写为 $\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$，或 $(a_1,\cdots,a_n)$，甚至缩写为 $a_1,\cdots,a_n$，或 $\boldsymbol{a}$. $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 称为 n 元矢 $\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ 的**第 i 分量**.

很清楚，两个 n 元矢相等的充要条件是它们的各分量分别对应相等. 现在，我们来定义集合的笛卡儿积.

定义 1.9 集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的**笛卡儿积**记为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n,$$

定义如下：

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}$$

我们约定 $\langle x\rangle = x$，因而本定义在 $n=1$ 时也是适用的. 这样，集合 A 也可看作是一个集合的笛卡儿积. 我们还约定

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\ 个}(n\ 是正整数).$$

1.1.4 关系及其图示

定义 1.10 n 元矢的集合 R 称为集合 $A_1, \cdots, A_n$ 上的一个 **n 元关系**，这时有

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

由于本书一般只涉及二元关系，因此关系一词总指二元关系.

n 元关系也常用概括法来表示，例如：

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x \in N, y = 2x\}$$

表示自然数与它的二倍间的对应关系. 一般地

$$R = \{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \mid P(x_1, \cdots, x_n)\}$$

表示一个 n 元关系，其中 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 是关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个语句（n 元谓词），$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \in R$ 当且仅当 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 这一语句为真.

我们有一种表示有穷集合 A 上的关系 $R(R \subseteq A^2)$ 的直观手段——**有向图**. 用一个小圈，称之为**结点**，表示集合 A 的元素，用从 x 结点到 y 结点的有向边，称为**弧**或**边**，表示 $\langle x, y\rangle \in R$. 例如，$R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$ 是集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系，R 可用有向图表示(图 1.1).

这里，有从结点 a 到结点 a 的一条弧，这样的弧称为**环**. 结点 a 和 c 有两条弧相连，我们称这种有几条弧相连的两个结点是**连通的**；而当这些弧首尾相接时，称这两个结点间有一条**通路**（**路径**）. 弧的条数称为通路的**长度**，例如 a 和 c 两结点间有长度为 2, 3, 4, …的通路.

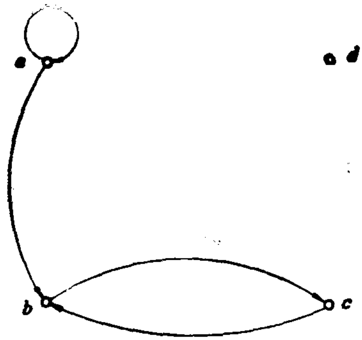

图 1.1

我们归纳地定义一种特别的有向图——**树**.

(1) 一个孤立的结点是树，并称该结点为**树根**.

(2) 如果 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 是树，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 分别是它们的树根，那么有向图 T_{n+1} (如图1.2所示)也是树，t_{n+1} 为其树根.

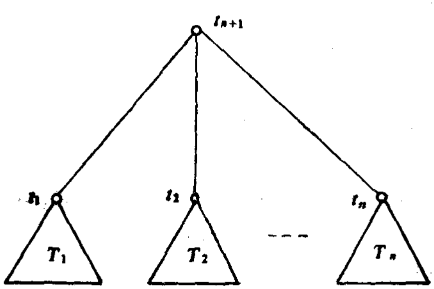

图 1.2

在树中，不是任何边的起点的结点都称为**树叶**(或**叶**). 在同一条边上，终点称为起点的**儿子**，起点称为终点的**父亲**. 在一条通路上，终点称为起点的**子孙**，起点称为终点的**祖先**. 由树的定义，不难想象，一个结点可能有多个儿子、子孙，但只有一个父亲.

有向图、有向树的应用是广泛的. 本书中经常用到它们，但一般不涉及其很深的理论，这里只介绍有关它们的一些术语.

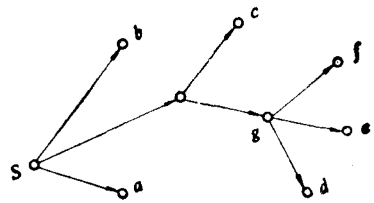

图 1.3

[例 1.1]

图 1.3 中的树以 S 为根，a,b,c,d,e,f 是叶，g 有儿子 d,e,f. □

有关集合论和图论的基础知识读者可在任何一本离散数学教程中读到，例如参考文献[2].

习　　题

1. 假定亚当和夏娃创造了人，试用归纳法定义全体人的集合（包括亚当、夏娃和所有古人）.

2. 证明定理 1.2、定理 1.3.

3. 将 Cantor 证明（[0,1]是不可数无穷集）的细节补出. 你是否能说出"对角线方法"的另一应用?

4. 用归纳法定义 N 上的关系 R,

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x < y\}$$

5. 设 R 是集合 $A = \{2,3,4,6,8\}$ 上的整除关系，即

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x \mid y\}$$

画出表示对应 R 的有向图，指出各结点之间的路径.

1.2 函　　数

1.2.1 函数

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 到集合 B 的 n 元函数 f 通常是指一个运算(或映射)，使得对任意的 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n$，有唯一的 $y \in B$ 为运算 f 实施于 $x_1, \cdots, x_n$ 的结果，记为 $f(x_1, \cdots, x_n) = y$，其中 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 表示 f 实施于 $x_1, \cdots, x_n$ 的结果.

更形式地，函数的定义可如下叙述：

定义 1.11 设 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 是集合的笛卡儿积，B 是集合，称 f 是 $A_1, \cdots, A_n$ 到 B 的一个 n 元函数，如果对于 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 中的每一 n 元矢 $(x_1, \cdots, x_n)$，有且仅有 B 中元素 y 与它对应，这个 y 为运算 f 实施于 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的结果，记为：

$$f(x_1, \cdots, x_n) = y$$

这里 $x_1, \cdots, x_n$ 称为自变量，$f(x_1, \cdots, x_n)$ 称为 f 在 $x_1, \cdots, x_n$ 处的(**函数**)**值**，$f(x_1, \cdots, x_n) = y$ 则表示 f 在 $x_1, \cdots, x_n$ 处的(函数)值是 y.

从函数定义来看，函数是一种"运算"，因此简单地用 f 表示函数在意义上是不完全的，只有当 f 附带有可放置运算对象（自变量)的"空位"时，f 作为函数的地位才清晰．例如 $f(-,-)$ 表示二元函数．但是这种表示形式与习惯表示相差较远．为了解决上述困难，我们引入表示空位的符号 $e_1, e_2, \cdots$，等等．必要时我们将使用具有空位符号的式子 $f(e_1, \cdots, e_n)$ 表示 n 元函数．例如我们说对数函数 log，也说对数函数 $\log e$．我们也允许用通常的变元充任诸 e 的角色，而把 $f(e_1, \cdots, e_n)$，$f(x_1, \cdots, x_n)$ 等称为函数命名式．

需要十分强调的是，要严格区别 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的两种不同意义．一是表示函数 f 在 $x_1, \cdots, x_n$ 处的值．这时 $x_1, \cdots, x_n$ 可以是变元，可以是指定的数值，还可以是一个复杂的式子．例如 $\log x$，$\log 3$，$\log x^3$ 分别表示 x，3，和 x^3 处的常用对数值．二是表示函数 f 的命名式．这时 $x_1, \cdots, x_n$ 只能是不同的变元，例如 $\log x$ 表示对数函数，而 $\log 3$ 和 $\log x^3$ 已经不再表示对数函数了．上述区别是重要的，但并不难做到，通常从上下文便可判定 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是指哪一种含义．如果需要，我们将在表示第一种意义时用"值 $f(x_1, \cdots, x_n)$"来加以区别．

定义 1.12 设 f 是 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 到 B 的函数，称 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 为函数 f 的**定义域**，记为 $\mathrm{Dom}(f)$，即

$$\mathrm{Dom}(f) = A_1 \times \cdots \times A_n.$$