SHUXUE YINGSHI ZHIDAO

公共管理硕士专业学位联考辅导丛书

MPA

数学

应试指导

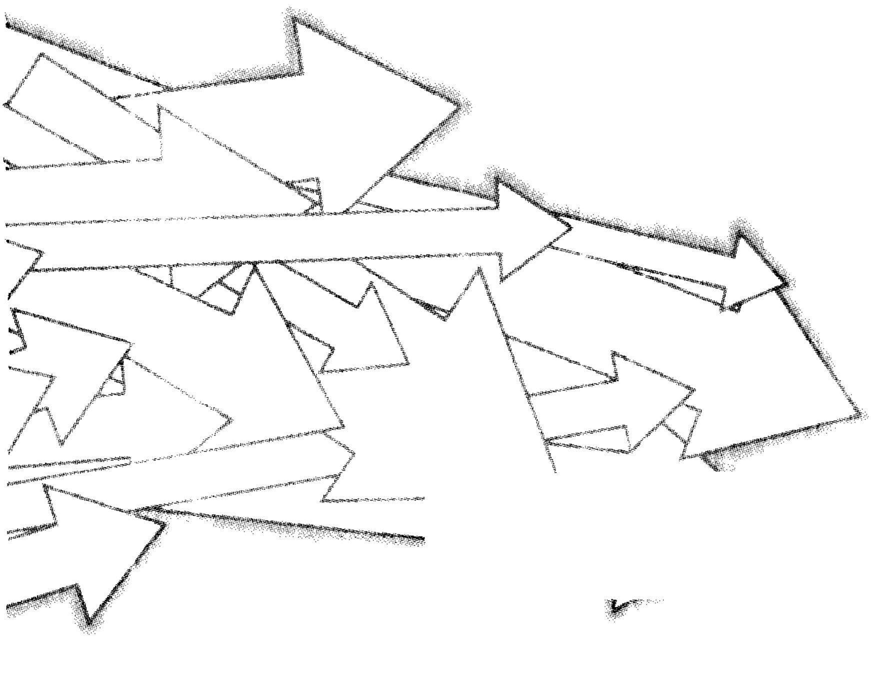
● 张伦传 编著

北京师范大学出版社

公共管理硕士专业学位联考辅导丛书

MPA 数学 应试指导

● 张伦传 编著



北京师范大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

MPA 联考辅导丛书．数学应试指南/张伦传编著．—北京:北京师范大学出版社,2001.9
ISBN 7-303-05897-4

Ⅰ.M…　Ⅱ.张…　Ⅲ.数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 051904 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号　邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:7.625　字数:191 千字
2001 年 9 月第 1 版　2001 年 9 月第 1 次印刷
印数:1～10 100 册　定价:12.00 元

前　　言

公共管理硕士(MPA)专业学位联考将首次在 2001 年 10 月实行全国统考. 考试科目为:政治理论、英语、管理学、行政学、数学与逻辑. 作为考试科目之一的数学,考试内容包括:初等数学、微积分学(含多元函数微分学)、概率论和数理统计初步三部分. 要求考生基础知识扎实,基本技能熟练,并能综合运用所考内容解决问题. 作为首次应试的考生,年龄普遍偏大,而且文科考生居多,因此数学科目对于他们来说无疑是个很大的障碍. 针对这一特点,本书力求循序渐进,知识点(考点)清楚到位,计算题注重方法训练,综合题注重逻辑推理能力的培养,精心选编的课后练习将起到巩固知识、提高能力和加深理解的作用. 特别指出,作为解题方法,本书力求水到渠成,避免刻意划分类型,使考生能活学活用. 可以相信本书将为考生架起一道通向成功的桥梁,"天堑变通途".

编者

2001 年 6 月

目　　录

第一章　初等数学

第一节　方程与不等式

考点分析

1. 求解一元二次方程.

2. 一元二次方程根与系数的关系.

3. 求解一元二次不等式.

复习指导

在求解一元二次方程之前，首先计算其判别式 Δ 的值，$\Delta \geqslant 0$ 时有实根，$\Delta < 0$ 时无实根. 利用求根公式求解一元二次方程是一个基本的方法，配方法及分解因式法可配合使用. 一元二次方程根与系数的关系是热点之一，注意应在 $\Delta \geqslant 0$ 的前提下来讨论它们的关系，否则，在实数范围内无意义. 求解一元二次不等式方法一般有两种：(1)若对应的一元二次方程的判别式 $\Delta \geqslant 0$，可用因式分解法处理；(2)若 $\Delta < 0$，可用抛物线法处理.

难点分析

方程即含有未知数的等式，因此在解方程的过程中要注意恒等变形，即形变而实不变；求解分式方程或无理方程(即根号下含有未知数)时要注意验根. 求解不等式要注意准确施用不等式的基本性质；另外，几个重要的不等式，比如 $a^2+b^2 \geqslant 2ab(a,b \in \mathbf{R})$，要注意等号成立的充要条件.

下面通过例题来演绎.

1. 一元二次方程及其解法

形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程称为一元二次方程. 判别式 $\Delta=b^2-4ac$. 当 $\Delta<0$ 时,上述方程无实根;$\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实根;$\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实根,即

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

例 1 求解方程:① $x^2+5x+3=0$;② $-2x^2-4x+6=0$.

解 ①因 $\Delta=5^2-4\times 1\times 3=13>0$,故由求根公式得

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2\times 1}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2},$$

即
$$x_1=\frac{-5-\sqrt{13}}{2},\ x_2=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}.$$

②因 $\Delta=(-4)^2-4\times(-2)\times 6=64>0$,故

$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{64}}{2\times(-2)}=\frac{4\pm 8}{-4},$$

即
$$x_1=1,\ x_2=-3.$$

②另解:

利用分解因式法:

$$-2x^2-4x+6=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)(x+3)=0,$$

由此得 $x_1=1,x_2=-3$.

(“$\Leftrightarrow$”为“等价”符号,即恒等变形;“$\Rightarrow$”为“推出”符号,下同)

例 2 当 k 取何值时,方程 $\left(k+\frac{1}{2}\right)x^2+kx-1=0$:(1)有两个不等的实根;(2)有两个相等的实根;(3)没有实根.

解 (1)要使该方程有两个不等的实根,首先必须 $k+\frac{1}{2}\neq 0$,即必须为一元二次方程,同时,判别式

$$\Delta=k^2-4\left(k+\frac{1}{2}\right)(-1)=k^2+4k+2>0.$$

整理得

$$\begin{cases}k+\frac{1}{2}\neq 0,\\ k^2+4k+2>0,\end{cases}$$

解得　　$k>-2+\sqrt{2}$ 且 $k\neq-\frac{1}{2}$ 或 $k<-2-\sqrt{2}$.

(2)依题意，必须满足

$$\begin{cases}k+\frac{1}{2}\neq 0,\\ \Delta=k^2+4k+2=0.\end{cases}$$

解得　　$k_1=-2+\sqrt{2}$，$k_2=-2-\sqrt{2}$.

(3)我们知道，当 $k+\frac{1}{2}=0$，即 $k=-\frac{1}{2}$ 时，原方程即 $-\frac{1}{2}x-1=0$，得 $x=-2$，有解. 故为使该方程无解，必须满足

$$\begin{cases}k+\frac{1}{2}\neq 0,\\ \Delta=k^2+4k+2<0,\end{cases}$$

解得　　$-2-\sqrt{2}<k<-2+\sqrt{2}$ 且 $k\neq-\frac{1}{2}$，

用集合的形式表示即：

$$\left\{k\mid -2-\sqrt{2}<k<-2+\sqrt{2},k\neq-\frac{1}{2},k\in\mathbf{R}\right\}.$$

注　关于求解一元二次不等式参见例 10.

2. 一元二次方程根与系数的关系

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，$(a\neq 0)$的根的判别式 $\Delta\geqslant 0$，此时该方程有两实根 x_1,x_2，则(即韦达定理)

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

例 3 已知方程 $x^2-3x-10=0$ 的一个根是 5，求另一根.

解 设另一根为 x_1，因该方程有实根，故由韦达定理得 $x_1\cdot 5=-10$，得 $x_1=-2$.

例 4 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2+4x+2=0$ 的两实根，并设 $x_1\leqslant x_2$. 不解方程求下列各值：(1)$x_1^2-x_2^2$；(2)$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；(3)$\frac{1}{x_1^3}-\frac{1}{x_2^3}$.

解 因 $x_1+x_2=-4$，$x_1\cdot x_2=2$，故

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2&=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\\&=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_2\\&=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=(-4)^2-4\times 2\\&=16-8=8,\end{aligned}$$

注意到 $x_1\leqslant x_2$，由上得

$$x_1-x_2=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2\\&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=(-4)^2-2\times 2=16-4=12.\end{aligned}$$

从而可得：

$$\begin{aligned}(1)\ x_1^2-x_2^2&=(x_1-x_2)(x_1+x_2)\\&=-2\sqrt{2}\times(-4)=8\sqrt{2};\end{aligned}$$

$$(2)\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-4}{2}=-2;$$

$$\begin{aligned}(3)\ \frac{1}{x_1^3}-\frac{1}{x_2^3}&=\left(\frac{1}{x_1}\right)^3-\left(\frac{1}{x_2}\right)^3\\&=\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2^2}\right)\\&=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\cdot\left(\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2x_2^2}+\frac{1}{x_1x_2}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{12}{2^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

下面的例 5 是利用韦达定理求最值的一个典型例题.

例 5 设 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $x^2+kx+k+1=0$ 的两个实根.求 ${x_1}^2+{x_2}^2$ 的最小值,并求出当 ${x_1}^2+{x_2}^2$ 最小时 k 的值.

解 因 k 是待定系数,故为使该方程有实根,必须

$$\Delta=k^2-4\times1\times(k+1)=k^2-4k-4\geqslant0,$$

而且其实根随 k 的变化而变化.由 $k^2-4k-4\geqslant0$,解得

$$k\geqslant2+2\sqrt{2}\text{ 或 }k\leqslant2-2\sqrt{2}.$$

在此前提下利用韦达定理得,$x_1+x_2=-k$, $x_1\cdot x_2=k+1$,故

$$\begin{aligned}{x_1}^2+{x_2}^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=k^2-2(k+1)\\&=k^2-2k-2.\end{aligned}$$

下面利用抛物线法求其最小值.为此,令 $y=k^2-2k-2$,k 看成自变量,如图 1-1 所示.

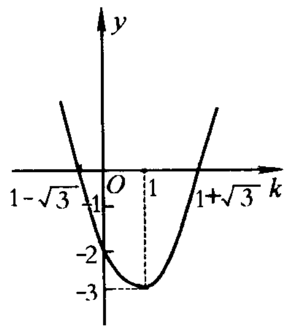


图 1-1

从图象中看出,若 k 自由取值,即 $k\in\mathbf{R}$ 时,抛物线顶点的纵坐标最小.但注意到本题的 k 必须符合条件 $k\geqslant2+2\sqrt{2}$ 或 $k\leqslant2-2\sqrt{2}$,故而令 $k=2+2\sqrt{2}$ 或 $k=2-2\sqrt{2}$,代入 $y=k^2-2k-2$,对应的最小者即为所求.实际计算后知当 $k=2-2\sqrt{2}$ 时,y(即 ${x_1}^2+{x_2}^2$)有最小值

$$y_{最小}=(2-2\sqrt{2})^2-2(2-2\sqrt{2})-2=6-4\sqrt{2}.$$

3. 方程(或方程组)应用题举例

利用方程或方程组解应用题关键是如何寻找不变量. 几个典型公式应熟记:

(1)路程=时间×速度;

(2)工作量=工作效率×工作时间;

(3)溶液的质量分数=溶质的量÷溶液总量×100%.

例 6(选择题) 某企业今年一月份产值为 500 万元,二月份产值比一月份减少了 10%. 从三月份起又逐月上升,四月份产值达到 648 万元. 则三、四月份的月平均增长率为(　　).

(A)10%　　(B)20%　　(C)15%　　(D)30%

解 设三、四月份的月平均增长率为 x. 因三月份是在二月份的基础上增长的,故应先求出

二月份产值:$500\times(1-10\%)=450$;

三月份产值:$450+450\cdot x=450(1+x)$;

四月份产值:$450(1+x)+450(1+x)\cdot x$

$$=450(1+x)\cdot(1+x)=450(1+x)^2.$$

由题意得等式:

$$450(1+x)^2=648,$$

即 $$(1+x)^2=\frac{36}{25},$$

得 $$1+x=\pm\frac{6}{5},\ x=-1\pm\frac{6}{5}.$$

负值不合题意应舍去. 故 $x=-1+\frac{6}{5}=\frac{1}{5}=20\%$. 选(B).

例 7(选择题) 甲、乙、丙三人合作一项工程所需的时间比甲单独完成少用了 6 小时,比乙单独完成少用了 1 小时. 又丙单独完成所用时间是三人合作所用时间的 2 倍,则甲单独完成用(　　)小时.

(A)$\frac{20}{3}$小时　　(B)$\frac{7}{3}$小时　　(C)$\frac{8}{3}$小时　　(D)$\frac{4}{3}$小时

解　设三人合作共需 x 小时完成. 依题意得，甲单独完成需 $(x+6)$ 小时，乙单独完成需 $(x+1)$ 小时，丙单独完成需 $2x$ 小时. 故

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}.$$

整理得，
$$3x^2+7x-6=0,$$
即
$$(3x-2)\cdot(x+3)=0,$$
解得
$$x_1=\frac{2}{3},\ x_2=-3\text{(舍去)}.$$
从而甲单独完成需要 $\frac{2}{3}+6=\frac{20}{3}$ 小时，选(A).

例 8(选择题)　某人用 14 万元买了 A,B 两种股票. 已知 A 的价格是 B 的 3 倍，B 的股数是 A 的 2 倍，现在 A 种每股增值 20%，乙种每股增值 5%. 当他卖掉这两种股票后，获利(　　)万元.

(A)1　　(B)2　　(C)2.5　　(D)3

解　设购买乙种股票的股数为 x，则甲种股数为 $2x$；再设乙种股票原来每股价格 y 万元，则甲种原来每股价格 $3y$ 万元. 依题意得
$$(2x)\cdot(3y)+x\cdot y=14,$$
解得 $xy=2$，此为原来购买乙种股票所用款项，从而购买甲种股票花了 $14-2=12$ 万元. 再由题意得他获利为
$$12\times20\%+2\times5\%=2.5\text{(万元)}.$$
选(C).

注　在求解有关工作量(或工程量)问题时，把整个工作量记为整体 1 是关键(实际上，您可以任记为整体 $a(a\neq0)$，因等式两边每一项的分子中均可提取 a，约分后即成为整体 1)(参见例 7). 在例 8 中有两个未知数，但只有一个方程，x，y 是解不出来的，事

实上也没有必要解出 x,y. 我们只需求出 xy，即买乙股的价格，进而可求出买 A 股的价格. 所以我们一定要认真审题，具体问题具体分析.

4. 一元二次不等式及其解法

不等式的基本性质：

(1)若 $a>b,b>c$，则 $a>c$.

(2)若 $a>b$，则对于任何 $c\in\mathbf{R}$，有 $a+c>b+c$.

(3)设 $a>b$，若 $c>0$ 则 $ac>bc$；若 $c<0$ 则 $ac<bc$.

几个重要的不等式：

(1)对于任何实数 a，有 $a^2\geqslant 0$；$a^2=0\Leftrightarrow a=0$.

(2)对于任何 $a,b\in\mathbf{R}$，有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$；$a^2+b^2=2ab\Leftrightarrow a=b$. 由此得，对于两个非负实数 a,b，有$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，等号成立当且仅当 $a=b$. $\frac{a+b}{2}$叫做 a,b 两数的算术平均值；$\sqrt{ab}$叫做 a,b 两数的几何平均值.

(3)对于任何实数 a,b，有 $\left||a|-|b|\right|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

(4)设 $a\geqslant 0$，则

$$|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a;$$

$$|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\geqslant a \text{ 或 } x\leqslant -a.$$

例 9(选择题)　设 $a>b,c>d$，则正确的是(　　).

(A)$a-c>b-d$　　(B)$a-d>b-c$

(C)$ac>bd$　　(D)$ad>bc$

解　因 $c>d$，故 $-c<-d$，即 $-d>-c$. 又因 $a>b$，故 $a-d>b-c$. 选(B).

例 10(选择题)　若对于任意实数 x，不等式 $|x+7|\geqslant m+2$ 恒成立，则实数 m 应满足(　　).

(A)$m\geqslant -2$　(B)$m>-1$　(C)$m\leqslant -2$　(D)$m\geqslant -1$

解 利用基本事实:正数大于负数.为使$|x+7|\geqslant m+2$恒成立,因$|x+7|\geqslant 0$,故必须$m+2\leqslant 0$,得$m\leqslant -2$,选(C).

例 11 求解下列不等式:(1)$x^2-4x+3<0$;(2)$x^2+5x+6>0$;(3)$x^2+5x+2>0$.

解 (1)因$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$,故

$$x^2-4x+3<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)<0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1<0, \\ x-3>0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x-1>0, \\ x-3<0. \end{cases}$$

第一个不等式组无解,由第二个不等式组解得$1<x<3$.

(2)因$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$,故

$$x^2+5x+6>0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3)>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0, \\ x+3>0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x+2<0, \\ x+3<0. \end{cases}$$

由第一个不等式组解得$x>-2$;由第二个不等式组解得$x<-3$.故原不等式的解为$x>-2$或$x<-3$.

(3)$x^2+5x+2>0$对应的一元二次方程为

$$x^2+5x+2=0.$$

因
$$\Delta=5^2-4\times 1\times 2=17>0,$$

解得
$$x_1=\frac{-5+\sqrt{17}}{2},\ x_2=\frac{-5-\sqrt{17}}{2},$$

故原不等式等价于

$$\left(x-\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right)>0.$$

注意到$x_1>x_2$,类似于(2)即得

$$x>\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\text{或}x<\frac{-5-\sqrt{17}}{2}.$$

注 通过例11看出,若一元二次不等式对应的一元二次方程的根的判别式$\Delta\geqslant 0$,可用分解因式法或求根公式法(本质上是一样的)转化为相应的二元一次不等式组来处理.转化的依据是如下

基本事实:同号相乘(或相除)得正;异号相乘(或相除)得负.

对于 $\Delta<0$ 的情况见下面的例 12.

例 12 求解下列不等式:(1)$x^2-4x+5>0$;(2)$2x^2+1<x$.

解 (1)因 $\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=-4<0$,对于这种情况我们利用抛物线法处理.即令 $y=x^2-4x+5$,它在平面直角坐标系中对应一条抛物线,又因二次项系数 $a=1>0$,故抛物线开口向上(注:若 $a<0$,则开口向下).$\Delta<0$ 表明方程 $x^2-4x+5=0$(即 $y=0$)无实根,即 y 恒不为 0.换个说法,亦即抛物线 $y=x^2-4x+5$ 与横轴(即 x 轴)没有交点.注意到 $a=1>0$ 即开口向上,故 $y=x^2-4x+5$ 恒大于 0,即 x 可取任何实数值,从而解为 $\mathbf{R}$.

(2)整理得 $2x^2-x+1<0$.因

$$\Delta=(-1)^2-4\times2\times1=-7<0,$$

又 $a=2>0$,即对应抛物线开口向上,类似于(1)的讨论,$y=2x^2-x+1$ 应恒大于 0,故该不等式是一个矛盾不等式,即 x 无解,或记为空集 $\varnothing$.

再加强一下,即:

例 13 若不等式 $ax^2+2ax-4<2x^2+4x$ 对于任何 $x\in\mathbf{R}$ 均成立,求实数 a 的取值范围.

解 整理得

$$(a-2)x^2+(2a-4)x-4<0.$$

因本题要求应对任何 $x\in\mathbf{R}$ 均成立,故用抛物线法来处理.令

$$y=(a-2)x^2+(2a-4)x-4,$$

若 $a\neq2$,此即表示一条抛物线,为符合本题条件必须:

$$\begin{cases}a-2<0,\\ \Delta=(2a-4)^2-4(a-2)(-4)<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a<2,\\ (a-2)(a+2)<0.\end{cases}$$

解得 $-2<a<2$.

另外，当 $a=2$ 时，原不等式即为 $-4<0$，恒成立，故 a 的取值范围应为 $-2<a\leqslant 2$，用区间的形式写即 $(-2,2]$.

注 方程和不等式不仅是个考点，而且是很重要的工具. 比如后面求函数定义域问题实际上就化归为求解不等式或不等式组来处理. 如所周知，恒等变形(或称恒等变换)是非常重要的数学思想和方法，实际上就是方程的观点.

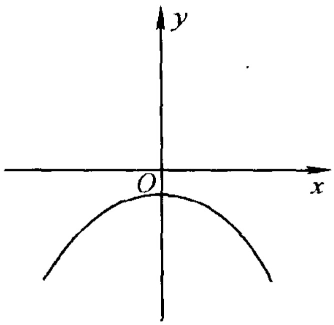


图 1-2

练 习 1

一、选择题

1. 设 x_1,x_2 是方程 $2x^2-x-3=0$ 的两个根，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=$ (　　).

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{3}$　　(C) $-\frac{3}{2}$　　(D) $-\frac{2}{3}$

2. 一水池有甲、乙两水管，甲管注入，从乙管流出. 若甲、乙两水管同时开放，则 30 小时可注满水池；若先开甲管 3 小时，然后甲、乙两管同时开放 6 小时，则刚好注入水池的一半. 则甲管单独开放注满水池需要(　　)小时.

(A)10 小时　　(B)8 小时　　(C)15 小时　　(D)12 小时

3. 若 $a<b<0$，则下列不等式中一定成立的是(　　).

(A) $a^2<ab<b^2$　　(B) $a^2>ab>b^2$

(C) $a^2<b^2<ab$　　(D) $a^2>b^2>ab$

4. 若 $x>0,y>0$ 且 $x+y\leqslant 4$，则下列各式成立的是(　　).

(A) $\sqrt{xy}\geqslant 2$　　(B) $\frac{1}{xy}\geqslant 1$　　(C) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 1$　　(D) $\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$