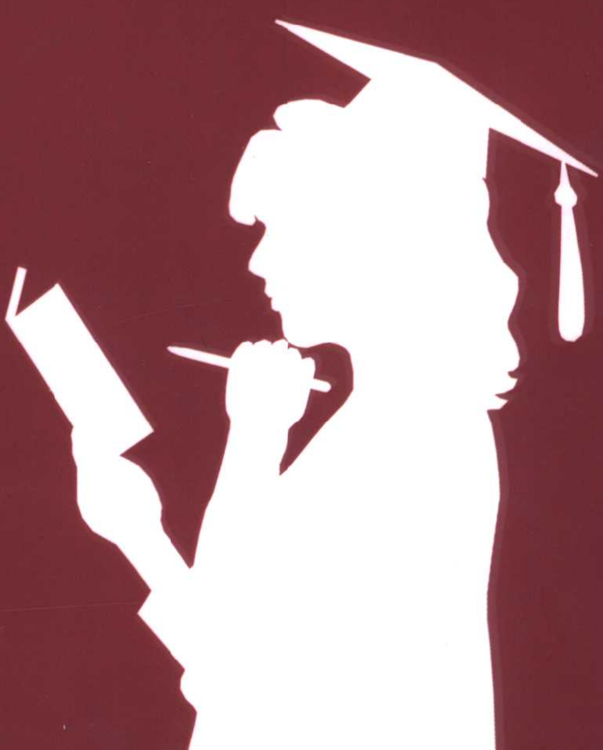
离散数学考研指导

计算机专业考研系列教材

胡新启 编著



清华大学出版社

计算机专业考研系列教材

离散数学考研指导

胡新启 编著

清 华 大 学 出 版 社

（京）新登字 158 号

内容简介

离散数学是各大专院校计算机专业的核心课程，也是很多高校招收计算机专业硕士研究生的必考科目之一。

本书围绕考研大纲，有针对性地对学习过程中的重点、难点进行了解答，引导学生系统、科学地理解离散数学的理论，掌握解题方式和方法。书中每章的开头都给出了该章的核心考点，并用“★”号数量来表示考试频度。此外，我们还在近几年各科研院所的考研试题前加上“▲”号，同时给出了详解或参考答案，使读者能够清晰地了解离散数学课程的主要内容和考试的重点，快速地把握解题的方法。

本书主要针对考研读者，但也适于作为计算机及相关专业的教学辅导材料，还可供参加计算机等级考试者使用。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学考研指导 / 胡新启编著. —北京：
清华大学出版社，2002
（计算机专业考研系列教材）
ISBN 7-302-06178-5

I. 离… II. 胡… III. 离散数学-研究生-入学考试
-自学参考资料 IV. 0158
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 105908 号

出版者： 清华大学出版社（北京清华大学学研大厦.邮编 100084）
http://www.tup.com.cn
印刷者： 北京市朝阳区科普印刷厂
发行者： 新华书店总店北京发行所
开　本： 787×1092　1/16　　印张：16.75　　字数：407 千字
版　次： 2003 年 1 月第 1 版　　2003 年 1 月第 1 次印刷
书　号： ISBN 7-302-06178-5/TP・3697
印　数： 0001~6000
定　价： 25.00 元

《计算机专业考研系列教材》丛书序

计算机专业是当今最热门也是发展最迅速的学科之一，很多学生为了进一步提高专业水平和应用能力，纷纷报考计算机专业研究生。据统计，近几年报考计算机软件与理论、计算机应用和计算机与通信专业硕士研究生的考生远远超过报考其他专业的考生，其中有相当一部分考生原来所学并非计算机专业，还有很多考生是工作多年的在职人员。为了方便报考者复习计算机专业课程，我们特地组织一批计算机专业教学第一线的教授和副教授（其中大多数编写者多年参与硕士研究生入学专业试卷命题工作）编写了本套丛书。丛书包括：

1. 《C程序设计考研指导》
2. 《数据结构考研指导》
3. 《操作系统考研指导》
4. 《编译原理考研指导》
5. 《计算机组成原理考研指导》
6. 《离散数学考研指导》

本丛书具有以下特点：

➤ 讲述全面而详实

本丛书全面涵盖各门专业课程的内容。不针对个别学校的命题特点，而是充分地讲授课程中的重点、难点和考点，并通过例题进行扩充与深化，使读者得以全面温习与提高，不留“死角”。

➤ 阐述简洁明了

不同于本、专科教材，本丛书旨在使考生花较少的时间温习各门课程的内容，因此，不过多地解释简单的术语，尽可能地高度概括和总结基本概念，使读者将主要精力集中在解题过程中。

➤ 重点突出解题思路

本丛书重点介绍解题的方式方法，不仅授人以“鱼”，更授人以“渔”。书中所选的例题和习题大多是计算机专业研究生入学考试试题（题目前标有“▲”号），并配上详解，具有很强的实战性。

➤ 强调内容的综合与提高

一般的教科书，按照内容的先后顺序按部就班地介绍。这种方式有助于初学者学习，但不便于综合复习，而考研题一般都具有很强的综合性，往往一道题涉及一本书中的好几个概念。本丛书打破了普通教材这种局限性，将相关的概念有机地融于一体，从而提高考生的解题能力。

➤ 答疑解惑

本丛书所选择的例题和习题大部分都具有较高的难度，书中不仅给出了答案，而且详细介绍解题思路和解题过程，有助于澄清概念和纠正误区。

尽管目前已有一些考研类参考书，但专门针对考研的系列教材还很少，本丛书希望在这方面作一些探索和尝试，起到抛砖引玉的作用。敬请广大读者和同行不吝赐教。

丛书编委会
2002年10月

前　言

古人云：书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。作者从孩提时代开始到完成学士、硕士、博士学业至今，都是在书山之中漫游，深深体会到学习的快乐与苦涩，深感教材的重要，并常为能找到一本好教材而欣喜不已。面对当前的考研热潮，作者在自己多年教学和参加离散数学命题、阅卷的基础上，收集了部分重点高校（北京大学、南京大学、复旦大学、上海交通大学、东北大学、上海大学、西安交通大学、武汉大学、武汉水利电力大学、北京航空航天大学、北京理工大学、大连理工大学、重庆大学、华中科技大学等）以及中科院计算所、软件所等近几年的考研真题，掌握了大量的一手资料。作者对这些考研真题进行了全面、系统的分析整理，编著成册。

本书不能完全算一本教材，它要求读者已经学习过离散数学的基本内容，因为本书对大部分基本的离散数学知识仅作了概括性描述，并较少地使用例题来加以解释说明，而只是针对考研中经常出现的真题进行分析讲解。

本书围绕考研大纲，有针对性地对学习过程中的重点、难点进行了解答，引导学生系统、科学地理解离散数学的理论，掌握解题方式和方法。书中每章的开头都给出了该章的核心考点，并用“★”号数量来表示考试频度。书中每章首先简要介绍了主要内容，列举了一些重要概念和主要结论，并在近几年各科研院所的考研试题前加上“▲”号，同时给出了详解或参考答案，使读者能够清晰地了解离散数学课程的主要内容和考试重点，快速地把握解题的方法。按教学大纲，本书共分9章：第1章集合论，讨论了集合的定义、运算及相关运算性质、幂集、笛卡尔积、基本计数原理等；第2章二元关系，讨论了关系的定义及表示、关系的运算（复合与求逆）、关系的基本类型、关系的闭包、等价关系、相容关系等；第3章函数，讨论了函数的定义、复合函数、反函数及集合的基数；第4章代数系统，主要给出了代数系统的定义和性质、半群、群及子群、陪集等的定义和性质及其判定等；第5章格，讨论了格的两种等价定义、几种特殊的格、布尔代数等；第6章图论，讨论了图的基本定义、图的连通性及图的矩阵表示、最短路径、欧拉图和哈密尔顿图、平面图、图的着色等；第7章树，讨论了树的几种等价定义、根树、最小生成树、最优二元树等；第8章命题逻辑，讨论了命题及其符号化、命题公式及其真值、范式、重言式与自然推理；第9章谓词逻辑，讨论了谓词逻辑命题的符号化、谓词公式及其真值、前束范式、重言蕴含式与推理规则等。

尽管本书是专为考研的读者编写的，但也适合作为计算机及相关专业本科生“离散数学”课程的提高教材。

付汉斌参与了本书部分章节的编写，赵迎媛女士承担了全书的文字录入，在此表示深深的感谢。由于水平所限，尽管编者不遗余力，书中仍可能存在错误和不足之处，敬请读者批评指正。读者若有问题或需要考研试题，请与作者联系，联系方式：huxinqifox@163.com。

目　录

第 1 章　集合论

核心考点：幂集、补集、差集、对称差；集合的基本运算和集合代数的基本公式；基本计数原理。
考试频度：★

1.1 集合及其表示

1.1.1 集合的定义及常用记号

集合是没有给出精确定义的基本的数学概念，通常用大写英文字母表示集合，如A，B，X 等。组成一个集合的不再细分的个体，称为元素，用小写英文字母表示元素，如a,b,c等。若a是集合A中的元素（或成员、元），则称a属于集合A，记作 $a \in A$；用 $x \notin X$ 表示元素x不在集合X中。当 $a_1 \in A, a_2 \in A, \cdots, a_n \in A$ 时，常简写为 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$。

集合由它的元素所决定，集合简称集。集合中的元素具有如下性质：

- 确定性。对一个具体的集合来说，其元素是确定的，一个元素或者在此集合中，或者不在此集合中，两者必居其一，这与模糊集合不同。不清晰的对象构成的集合不在本书讨论范围之内。
- 无重复性。集合中的元素彼此不同，没有重复的元素，这与后面图论中涉及的多重集合不同，那里因为特殊的原因允许有重复的元素。例如，$\{1,2,1\} = \{1,2\}$。
- 无序性。集合中的元素无顺序。例如，$\{1,2,3\} = \{2,3,1\}$。
- 抽象性。集合中的元素是抽象的，甚至可以是集合。例如，$A = \{1, \alpha, \{1\}\}$。

经常用到的几个集合有：

N　自然数集
Z　整数集
Q　有理数集
R　实数集
C　复数集

不含任何元素的集合称为空集，用$\varnothing$（或$\{\}$）表示。在所讨论的问题中，所涉及到的全体对象构成的集合称为全集（也称为论域），通常用U（或E）表示。由于全集随着研讨问题的不同而不同，因此全集是相对惟一的，而非绝对惟一。

集合中元素的个数可以是有限的，也可以是无限的，前者所对应的集合称为有限集，后者所对应的集合称为无限集。若A是有限集，用$|A|$表示A中元素的数目，也称为集合的基数，记为card(A)。无限集的基数在第3章讨论。显然有：$|\varnothing|=0$。

1.1.2 集合的表示方法

集合的表示方法一般有两种，即列举法和描述法。

列举法是列出集合中的所有元素，其间用逗号相隔，放在花括号内，如$A=\{1,2,3\}$，$B=\{\{a\},b,\text{春，夏，秋，冬}\}$。有限集都可用列举法表示。

对于某些有规律的无限集，如其元素与自然数可建立一一对应关系的集合，也可使用列举法表示，例如$C=\{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$。这种表示一定得让人能看出其元素间的规律。

描述法是把集合中的元素应当满足的条件描述出来的方法。如：$B=\{n^2\mid n\in N\}$，$C=\{x\mid x\in R,\text{且}-1<x<1\}$等。

上面两种表示法中，列举法适用于元素不太多或元素的规律比较明显、简单的情况，而描述法则刻画了集合中元素的共同特征。

有时也提到表示集合的另一种方法：归纳定义的方法，如自然数集N可定义为：

（1）$0\in N$；

（2）若$n\in N$，则$n+1\in N$。

实际上，第8章中的命题公式和第9章的谓词公式就是用归纳定义给出的。

虽然此处给出了几种集合的表示方法，但这一说明并不是十分准确的，并且我们也并不十分在意到底用的是何种表示方法，例如也可通过集合的运算$X=A\cup(B-C)$来表示集合X，或通过其他方式来表示等。

1.1.3 子集，集合的相等

集合的包含与相等是集合间的两种基本关系，也是集合论中的两个基本概念。

定义1.1 设有A,B两集合，若B中的每个元素都是A中的元素，称B是A的子集，也称B被A包含，或A包含B，记为$B\subseteq A$或$A\supseteq B$。若B是A的子集，且A中至少有一个元素不属于B，则称B为A的真子集，记为$B\subset A$或$A\supset B$，称为B真包含于A。

由定义可知：$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$，特别地，有$\varnothing\subseteq\varnothing$。

据定义有：

$$B\subseteq A\Leftrightarrow \forall x\in B,\text{有}x\in A。\tag{1.1}$$

$$B\subset A\Leftrightarrow \forall x\in B,\text{有}x\in A;\text{且}\exists x_0\in A,x_0\notin B。\tag{1.2}$$

由此可得出：$B\nsubseteq A\Leftrightarrow \exists x_0\in B,x_0\notin A$。

若两个集合A和B没有公共元素，称A和B是不相交的。

注意：要会区分 $\subseteq$ 与 $\in$。$A\in B$ 表示集合 A 是集合 B 的一个元素；$A\subseteq B$ 表示集合 A 中的每个元素都是集合 B 中的元素。$\in$ 是一个最基本的概念，$\subseteq$ 由 $\in$ 定义而得。例如

（1）$\{a\}\not\subseteq\{\{a\},b\}$，但 $\{a\}\in\{\{a\},b\}$。
（2）$\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a\}\}$，但 $\{a,b\}\notin\{a,b,\{a\}\}$。

由集合间的包含关系可以定义两集合的相等。

定义1.2 若两集合 A 与 B 包含的元素相同，称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。也解释为：若 A 是 B 的子集且 B 是 A 的子集，称 A 与 B 相等，即

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\text{且}B\subseteq A。\tag{1.3}$$

这一定义很重要。以后要证明两个集合相等，只需证明两集合互为子集或互相包含即可。这是证明集合相等的基本思路和依据。从这个定义可以推证，两集合相等当且仅当它们有完全相同的元素。在第2章“二元关系”中，很多地方涉及到证明两关系相等，因为关系实际上是一种特殊的集合，因此也可以用这种方法来证明。

若 A 与 B 不相等，则 $B\not\subseteq A$ 和 $A\not\subseteq B$ 至少有一个发生。

注意：$\{a\}\neq\{\{a\}\}$，因为两个集合中元素不同，一个是 a，另一个是 $\{a\}$。

称集合 A 的子集 $\varnothing$ 和 A 为 A 的平凡子集；任何集合是全集的子集。

由定义易得：空集是惟一的。

1.1.4 集合的幂集

定义1.3 设 A 是一集合，A 的所有子集构成的集合称为 A 的幂集，记为 $P(A)$（或 $\rho(A),2^A$）。即 $P(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$。

【例1.1】 （1）$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$；
（2）$P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；
（3）$P(\{a,\varnothing\})=\{\varnothing,\{a\},\{\varnothing\},\{a,\varnothing\}\}$；
（4）▲设 $A=\{\varnothing,a,\{a\}\}$，则 A 的幂集

$$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{a\}\},\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{a\}\},\{a,\{a\}\},\{\varnothing,a,\{a\}\}\}。$$

根据幂集的定义，因为 $\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$，显然有以下事实：

（1）$\varnothing\in P(A)$；
（2）$A\in P(A)$。

定理1.1 若 A 是有限集，则有 $|P(A)|=2^{|A|}$。

证 设 $|A|=n$，则 A 的子集只能含有0个、1个、…、n 个元素。A 的恰含 $i(0\le i\le n)$ 个元素的子集个数为 C_n^i，即从 n 个不同的元素中取 i 个元素的不同组合数，所以 A 的所有子集数为：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$，从而 $|P(A)|=2^{|A|}$。

为便于在计算机中表示有限集，可对集合中的元素编定一种次序，在集合与二进制数间建立对应关系：设全集$U=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则

- 对于任意 $S\subseteq U$，使S与一个n位二进制数 $b_1b_2\cdots b_n$ 对应，其中 $b_i=1$ 当且仅当 $a_i\in S$；
- 对于一个n位二进制数 $b_1b_2\cdots b_n$，使之对应一个集合 $S=\{a_i|b_i=1\}$。

这样，含n个元素的集合的子集个数与n位二进制数的个数相同，这也说明了定理的正确性。

1.2 集合的运算及其性质

1.2.1 集合的基本运算

给定集合A和B，可以通过集合的并$\cup$，交$\cap$，相对补$-$，绝对补$^{-}$，对称差$\oplus$等运算产生新的集合，这也是表示集合的一种方法。

定义1.4 任意两集合A与B的并是一个集合，它由所有至少属于A或B之一的元素所构成，记为 $A\cup B$。

任意两集合A与B的交是一个集合，它由所有属于A且属于B的元素所构成，记为 $A\cap B$。

任意两集合A与B的差是一个集合，它由所有属于A但不属于B的元素所构成，记为$A-B$（或$A\backslash B$），也称为B相对A的补集。

任意两集合A与B的对称差（也称为环和）是一个集合，它由所有属于A不属于B和属于B不属于A的元素所构成。记为 $A\oplus B$（有教材记为 $A\Delta B$）。

集合A的补集是一个集合，它由所有不属于A的元素所构成，记为$\overline{A}$（或$\sim A$、A^c、A'等），也称为A的绝对补集。

对任意两集合A与B，若 $A\cap B=\varnothing$，即A与B没有公共的元素，则称A与B不相交。

由以上定义，有

$A\cup B=\{x\,|\,x\in A或x\in B\}$。

$A\cap B=\{x\,|\,x\in A且x\in B\}$。

$A-B=\{x\,|\,x\in A且x\notin B\}$。

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$。

$\overline{A}=\{x\,|\,x\in U且x\notin A\}$。

【例1.2▲】 设 $A=\{0,\{0\}\}$，计算 $P(A)-\{0\}$，$P(A)\oplus A$。

【解】 因 $P(A)=\{\varnothing,\{0\},\{\{0\}\},\{0,\{0\}\}\}$，故 $P(A)-\{0\}=\{\varnothing,\{\{0\}\},\{0,\{0\}\}\}$。

因 $P(A)-A=\{\varnothing,\{\{0\}\},\{0,\{0\}\}\}$，$A-P(A)=\{0\}$，故

$$P(A)\oplus A=(P(A)-A)\cup(A-P(A))=\{\varnothing,0,\{\{0\}\},\{0,\{0\}\}\}。$$

1.2.2 文氏图

集合之间的相互关系和运算可以用文氏图（John Venn）形象描述，它有助于我们理解相关问题，有时对解题也很有帮助。它的优点是形象直观、易于理解，缺点是理论基础不够严谨，因此只能用于说明，不能用于证明。

在文氏图中，用矩形代表全集U，矩形内部的点表示全集中的全体元素，用（椭）圆或其他闭曲线代表U的子集，其内部的点表示不同集合的元素，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示。

1.2.3 运算的基本性质

集合的运算具有下面一些基本性质。

定理1.2 对于全集U的任意子集A，B，C，有表1-1所示的算律（这些算律在不同教材中可能名称、性质等会有所不同）。

表1-1

幂等律	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
结合律	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
交换律	$A\cap B=B\cap A$	$A\cup B=B\cup A$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap U=A$
零律	$A\cup U=U$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
双补律	$A\cup\overline{A}=U$	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
德摩根律	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
(De Morgan)	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$	$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$	$A\cup(A\cap B)=A$
对合律	$\overline{\overline{A}}=A$	

除了上面的性质外，关于集合的差与对称差，还有下面一些性质。

定理1.3 设A,B,C为任意集合，有

（1）$A-B=A\cap\overline{B}$。

我们通常用此式将差运算转化为其他的集合运算。

（2）$A-B=A-(A\cap B)$。

（3）$A\cup(B-A)=A\cup B$。

（4）$A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$。

（5）$(B-A)\cap A=\varnothing$。

（6）$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$。

（7）$A\oplus B=B\oplus A$。

（8）$A\oplus\varnothing=A$；$A\oplus A=\varnothing$；$A\oplus U=\overline{A}$；$A\oplus\overline{A}=U$。

（9）$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

（10）$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$。

下面给出（9），（10）的证明：

证 对于（9），
$$\begin{aligned}A\oplus(B\oplus C)&=(A\cap(\overline{B\oplus C}))\cup((B\oplus C)\cap\overline{A})\\&=(A\cap\overline{(B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B})})\cup(((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}))\cap\overline{A})\\&=(A\cap((\overline{B}\cup C)\cap(\overline{C}\cup B)))\cup(B\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\\&=(A\cap((\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap C)))\cup(B\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\\&=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C)\cup(B\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\text{。}\end{aligned}$$

这是一个关于A，B，C对称的式子，同样可以证明：

$$(A\oplus B)\oplus C=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C)\cup(B\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\text{。}$$

故结论得证。

对于（10），可用集合相等的定义证明（请读者自己完成），也可利用性质（6）证明，下面不直接使用（6），利用集合运算性质证明。

$$\begin{aligned}(A\cap B)\oplus(A\cap C)&=\left(A\cap B\cap\overline{A\cap C}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{A\cap B}\right)\\&=\left(A\cap B\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\right)\cup\left(A\cap C\cap(\overline{A}\cap\overline{B})\right)\\&=\left(A\cap B\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)\\&=\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)\\&=A\cap\left((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B})\right)\\&=A\cap(B\oplus C)\text{。}\end{aligned}$$

故结论得证。

☞ **说明**：但$A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$不一定成立，如$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a\}$，$C=\{b\}$，则右边为空集，而左边为非空集。

【例1.3▲】 试证明：如果$A\oplus B=A\oplus C$，则$B=C$。

此题可用定义证明，但比较烦琐，也可借助于对称差所满足的性质来证明。

证法1：用集合相等的定义证明。对任意的$x\in B$：

（1）若$x\in A$，则$x\in A\cap B$，从而$x\notin A\oplus B=A\oplus C$。由$x\in A$和$x\notin A\oplus C$，可得$x\in A\cap C$，得$x\in C$；

（2）若$x\notin A$，则$x\in B-A$，从而$x\in A\oplus B=A\oplus C$。由$x\notin A$和$x\in A\oplus C$，可得$x\in C$。

即$B\subseteq C$。

同理可证：$C\subseteq B$，得证$B=C$。

证法2：由于对称差满足结合律，由$A\oplus B=A\oplus C$，有$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$，

即 $(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$，由性质（6），得 $\varnothing\oplus C=\varnothing\oplus B$，故 $B=C$。

【例1.4】 A,B 是两个集合，给出 $A\oplus B=B$ 成立的充分必要条件，并证明你的结论。

【解】 因 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$，从而由 $A\oplus B=B$，有 $A-B=\varnothing$ 且 $B-A=B$。而 $A-B=\varnothing$ 等价于 $A\subseteq B$，从而有 $A=\varnothing$，并且显然当 $A=\varnothing$ 时有 $A\oplus B=B$，故 $A=\varnothing$ 为 $A\oplus B=B$ 的充分必要条件。

说明一个集合为另一集合的子集是我们经常遇到的问题。借助于已知的结论，可以证明下面结论等价，我们有时可以直接使用这些结论：

（1） $A\subseteq B$；（2） $A\cup B=B$；（3） $A\cap B=A$；（4） $\overline{B}\subseteq\overline{A}$；
（5） $A-B=\varnothing$；（6） $A\cap\overline{B}=\varnothing$；（7） $\overline{A}\cup B=U$。

1.2.4 广义并和广义交

两个集合的并和交可以推广到n个集合的并和交：

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\text{；}\quad \bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\text{。}$$

上面定义中若 $n=1$，规定 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1$，$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1$。

并和交的运算还可推广到无穷集合的情形，设J为一非空指标集，有

$$\bigcup_{j\in J}A_j=\{x\mid\exists j_0\in J,x\in Aj_0\}\text{；}\quad \bigcap_{j\in J}A_j=\{x\mid\forall j\in J,x\in A_j\}\text{。}$$

上面的运算也满足德摩根律：

（1） $\overline{\bigcup\limits_{j\in J}A_j}=\bigcap\limits_{j\in J}\overline{A_j}$；

（2） $\overline{\bigcap\limits_{j\in J}A_j}=\bigcup\limits_{j\in J}\overline{A_j}$。

定义1.5 若集合A的元素都是集合，则把A的所有元素的元素组成的集合称为A的广义并，记作 $\cup A$；把A的所有元素的公共元素组成的集合称为A的广义交，记作 $\cap A$。

取广义交时，要求 $A\neq\varnothing$，否则 $\cap A=U$。

【例1.5▲】 A是集合，A的元素也是集合，$P(A)$是A的幂集，定义 $\cup A=\{x|\exists y\in A,x\in y\}$。

（1）计算 $\cup\{\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,f\}\}$。
（2）证明：$\cup P(A)=A$。
（3）请问：$P(\cup A)=A$？

【解】

（1）依定义，有：