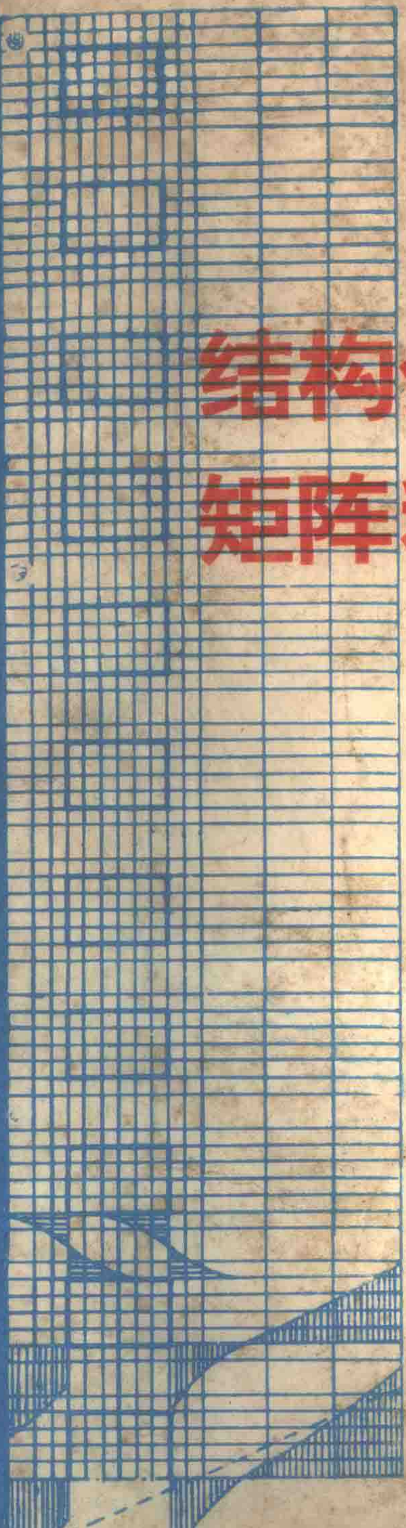


W·M·杰肯斯 著

结构分析的矩阵和数字计算机方法

中国人民解放军工程兵工程学院训练部科研处

结构分析的矩阵和数字计算机方法

〔英〕W.M.Jenkins著

章燕镇 译

周足望
吕新德 校

·1979·

译 者 的 话

有限单元法是在五十年代中期，由结构力学工作者为解决复杂的飞机强度计算问题而首先提出来的。近二十多年来，随着电子计算机的发展，在固体力学中已得到广泛的应用，并已向流体力学、热传导和电磁学等领域发展，成为工程设计与科研上的重要手段。

有限单元法是把连续介质分割成在有限个结点处连接起来的有限个小块（即单元），用它们来代替连续介质，然后以能量原理为基础，建立单元组合体的支配方程，并求解。有限单元法用矩阵来表示，所以公式十分简练，整个计算过程编成计算机程序，由计算机来完成运算。

有限单元法可用来解决固体力学中的大部分问题，并且不论结构形状和支承条件如何复杂，不论材料性能和外荷载如何变化，它都适用，这是任何其它经典方法所不及的。

正因为有限单元法有这些优点，所以国内外正在进行大量的理论研究和实际应用，论文的数量逐年成倍增长。许多大学的教科书中已把它列为讲授内容。本书就是一本英国的大学教科书。

华主席、党中央最近发出了向现代科学技术进军的号召并指示："为了提高我们中华民族的科学文化水平，有必要重申毛主席提出的向外国学习的口号。"我们必须善于吸收一切外国的好东西，把它统统拿过来，为我所用，把学习外国和自己的独创结合起来，以利于尽快地赶上和超过世界先进水平。为此，我们翻译了这本书，供教员及高年级学员在教学与科研中参考，这本书讲得比较通俗易懂，并给出了一些计算机程序和习题，对初学者掌握结构分析中的矩阵方法和计算机方法的要领，为进一步阅读有关有限单元法的专门著作是有帮助的。

原著中有些印刷和文字上的错误，译者发现了的，已作了改正。

本书的翻译工作，得到了训练部，科研处领导的大力支持，周足望同志作了全面的审校，吕新德、郭淑珍同志参加了校对和制图，特此表示感谢。

由于我们水平有限，翻译中定有不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

前　言

近十年来，结构分析方法的发展几乎全部受到数字计算机的冲击。虽然平衡条件和相容性原理以及力和位移之间的关系在所有方法中仍保持为基本的，然而它们引入各种数值程序的演算却得到充分的注意，为了获得一种合理的快速解法，需要从算术上的简便得到解放，使结构分析者能集中他的精力于处理大型复杂结构的更精确的方法上。在这一发展中的一个突出例子，就是“有限单元”法，它在近些年来迅速地得到了推广。数字计算机在应用有限单元法中是必不可少的。

在运用数字计算机时，一个高度地有组织的计算方法是必需的；所以解析法中的矩阵公式在全部发展中占有重要地位，采用矩阵法和数字计算机的优点有二：首先，存贮在矩阵中的数据是以数组的形式表达的，很适合于计算机；其次，矩阵代数的运算能给出极为便利的、予先准备好的标准程序的形式，而且可以在程序中以简练的指令进行运算。

数字计算机和矩阵方法被认为是一种在使用上很方便的工具。虽然矩阵方法对数字计算机是很有用的，但它对手算往往不是最好的办法，然而矩阵方法用手算的一些经验，对在上计算机之前精通这些方法，却是重要的。这里读者被认为已具有初步的矩阵代数的运算知识。很多大学的工程数学课程中包含有矩阵的适当的讲述。矩阵的加法、减法、乘法、转置和求逆的运算以及把矩阵分割成分块矩阵的技能等对读者来说都是需要的。

（译注：为了便于读者阅读，我们在本书的最后，附上矩阵代数的基础知识）

本书对结构分析中的矩阵方法和计算机方法做适当的，系统的论述，它适用于结构专业的高年级学生和研究生的水平。在很多大学的课程中，经典解析法和结构理论一般都在三年课程的第二年末就已经讲完了，最后一年的课程内容主要是讲授矩阵法的最新成就和数字计算机的应用，由于这个目的，期望本书能满足大学生的需要，还包括一些先进的资料和实际应用上的例题以满足研究生和见习工程师的要求。

论述不可能是尽善尽美的或特别先进的，但对希望研究更进一步的专门知识的读者，本书可作为更高深的书籍如齐基威茨(Zienkiewicz)[42]和赤门依斯基(Przemieniecki)[31]的参考书。

结构分析的矩阵法大体上可分为柔度法和刚度法；这两种方法的基本概念都在第一章中讨论。第二、三章是专门研究柔度法，第四、五章是研究刚度法的。这两种方法都是在前一章里先概述基本方法，再在后一章里讲进一步的应用和提高。第六章专门讲有限单元法，并想起到介绍这种重要的和迅速发展着的方法的作用。

第七章主要研究数字计算机和程序编制，随后研究带矩阵解的数值方法这一重要课题。带矩阵在用数字计算机的结构分析的领域里占有重要位置，且希望有一些有效的计算机程序去解一般对称的带矩阵。为此目的，在本章的末尾给出两种完善的程序，一种是用ALGOL语言的和另一种是用FORTRAN语言的。

第八章挑选了几个计算机应用的例题，这里是想提出几种特殊结构类型的组织方法的途径。

本书的一些习题，是使读者能取得运用方法的经验。这里有意使矩阵法可以用来求解。但必须知道，这种方法并不是手算中最好的办法。习题的答案附在书的末尾。作者对允许从考试卷子中收集一些问题用做本书的习题，向伯兰福特(Bradford)大学和土木工程学会表示感谢。

本书中的许多材料是作者在伦敦大学、皇家(King's)学院和伯兰福德大学对最后一年级学生和研究生讲课时用的讲义。著者对曾邦助校对稿件和核验例题的，现在的和以前的同事和同学表示感谢，特别是对J.M.Siddall，A.G.Bellamy，D.J.Lax和D.H.Little表示感谢。第六章中各向同性的平行四边形挠曲单元的发展是J.M.Siddall写的。高斯消去法的FORTRAN带矩阵解的程序是引自著者从前的研究助手J.M.Towers编写的原本的EMA程序。

特别感谢著者的研究助手G.C.de Jesus，他对初稿的准备邦助很多。提了不少有价值的追议和邦助，包括用却连斯基法解带阵的程序。

最后，感谢Sylvia Wilman小姐担负腾写手稿的繁重工作。

W.M.Jenkins

单　　位

在数字例题和习题中，采用新的SI米制（B.S.3736：1964国际单位制(SI)）。在这一制度中，长度和质昇的基本单位分别是米(m)和千克(kg)，力的单位是牛顿(N)，它是作用于质昇为1千克的物体使其获得1米/平方秒的加速度的力，对结构计算来说，牛顿太小(0.225磅力)，很不方便，通常用千牛顿(kN)（1000N，225磅力)。

当重力载作用在结构上，则要求把材料的重昇单位从公斤/米^{3}变换到牛顿/米^3，所需的关系是

1公斤（kgf）=9.81牛顿(N)(精确值9.80665)

所有其他作用的力可直接引用N或kN。

其他单位采用：

弯矩	kNm
应力	N/mm^2
扬氏模数	kN/mm^2
(30×10^6磅力/吋^2 = $207kN/mm^2$)	
惯性矩	mm^4

毫米取自米制，比厘米用得多，因为它与米互是10的±3次幂的关系。

下列变换数对不熟悉国际单位制的读者来说是有用的：

英制	国际单位制	相互关系
1吋	25.4mm	0.0394
1呎	0.3048m	3.2808
1磅力	4.448N	0.2248
1磅力/吋^2	$6.895\times10^{-3}N/mm^2$	145.03
1磅力/呎^2	$47.88\times10^{-3}kN/m^2$	20.89
1吨力/吋^2	$15.44N/mm^2$	0.0648
1吨力/呎^2	$107.3kN/m^2$	9.32×10^{-3}
1磅力吋	$113\times10^{-6}kNm$	8.85×10^3
1吨力吋	$253\times10^{-3}kNm$	3.95
1磅力呎	$1.36\times10^{-3}kNm$	736
1吨力呎	$3.04kN$	0.329

符　　号

A, B	位移变换矩阵
D	弹性矩阵
f	单元柔度矩阵
F	结构柔度矩阵
k	单元刚度矩阵
K	结构刚度矩阵
m_0	应用荷载的静定弯矩分布
M	弯矩
M_x	扭矩
M^{T}	转置矩阵
N	轴力
Q	应力矩阵
r, s	结点位移矩阵
R	应用荷载矩阵
S, Y	单元结点力矩阵
T	变换矩阵
U	应变能
u, U	基本结构位移
V, v_i	剪力
x, X	多余力
θ	转角
ν	波桑比
u, v, w	线位移
〔　〕	矩形矩阵
{ }	列矩阵（写为'行'式）
⌈　⌋	对角线矩阵

Matrix and Digital Computer Methods

in Structural Analysis

W.M.Jenkins

McGraw—Hill Publishing Company Limited 1969

目　录

第一章　基本概念

结构设计过程的实质部分是确定给定结构在作用力和其他因素，如温度改变和支座移动等影响下的反应。而结构的反应是以结构的应力或应变状态的变化来描述的。应力的内部分布引起'应力合成'的作用如弯矩、剪力、推力、扭矩等，并把它们统称为'力'。考虑结构的变形时，可以把注意力集中在发生于结构的各分离点上的线位移或角位移。

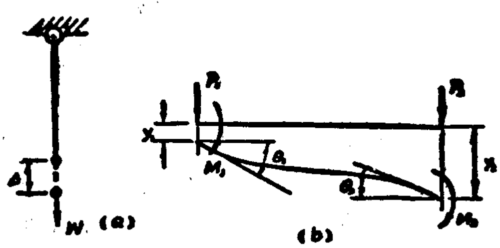
在刚架结构中，用在结构上选定的称为'结点'的点上的一些力和位移来描述应力和变形的状态，是既有帮助又方便的，这些点通常是各杆的端部或结合点，这样就引出了结构单元的概念，譬如结构的部件，柱和梁。结构单元的状态在力一位移的关系中，通常是已知的或者求起来也不太困难。在第六章，有些复杂的单元需要考虑，尽管确定这样一些单元的力——位移关系要经过练习，但对典型单元来说，也只要一次就能完成的。

结构分析者用这些单元来组成一种结构状态的完整图形。他利用单元的特性去组合成结构的数学模型，并描述它们在组合条件中的特性。一旦这一点做好了，整个结构在一组应用荷载或其他扰动下的反应就能确定了。在以各个单元组合成结构的过程中，几何相容性的条件是必须满足的，即在荷载作用下，诸单元的变形必须是这样的，即在组集点彼此是吻合的。还要补充一点，静力平衡条件也必须满足。在所有作用在单元上的力（包括外荷载，支反力和来自邻近单元的力）的作用下，每一个单元都必须是处于平衡状态。

这就是说，结构分析的目的是根据构件的已知力一位移特性，并在满足所有相容性和平衡条件下，去确定结构的应力或变位状态的。

1.1　力——位移的关系

对标准的结构单元来说，力——位移关系是已知的。但对另外一些单元，则要根据单元的已知几何形状和材料的弹性属性来建立这个关系。这些关系可以从已知位移求力或从已知力来求位移。



$$R=\{W\};\quad r=\{\triangle\}\qquad R=\begin{Bmatrix}P_1\\M_1\\P_2\\M_2\end{Bmatrix};\qquad r=\begin{Bmatrix}Y_1\\\theta_1\\Y_2\\\theta_2\end{Bmatrix}$$

图1.1　力和相应的位移向量

两种简单的结构单元表示如图1.1，图上有力向量和相应的位移向量，如果力向量以R表示和位移向量以r表示，那么一般有以下关系式

$$R=kr \tag{1.1}$$

式中矩阵k包含力一位移关系中的位移系数，这些关系也可以表达成相反的形式：

$$r=fR \tag{1.2}$$

式中矩阵f包含位移——力关系中结点力的系数，于是k和f之间的关系为：

$$k=f^{-1} \tag{1.3}$$

力向量R可以包括许多不同类型的力，如弯矩、扭矩、剪力和轴力等，而位移向量r则包括在力的相应位置上的相应位移。例如力向量的第i个位置上的力是结构单元中位置j上的一个力矩M_j，那么位移向量第i个位置上的位移将是θ_j，j点的转角和M_j是同一方向的。

线性关系：如果(1.1)和(1.2)式中矩阵k和f的系数与应用荷载无关，且是常量，则力——位移关系是线性的。于是，几组荷载的总效应就可以由各个荷载效应的简单叠加来求得。这叫做叠加原理。绝大多数的结构问题在力和位移之间是呈线性关系的，所以叠加原理在这些情况下是有效的。一种例外的情况是结构的变形不再认为是很小的，并且有限变位的效果必须计算在内。这种情况出现在柱理论中，在那里轴向荷载引起的弯矩是支柱横向变位的函数。

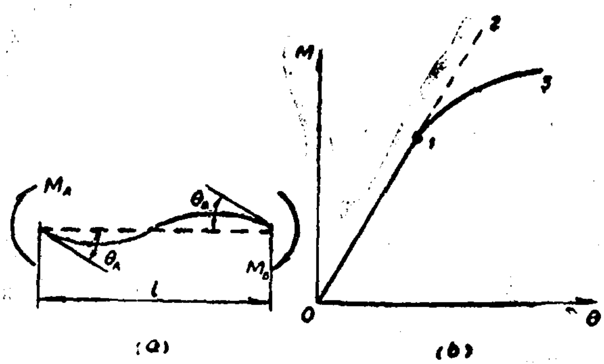


图1.2 线性和非线性的力矩——转角关系

结构单元的特性对一定限度内的荷载，可以是线性的，随后是非线性的，这一情况在钢梁中出现于加载至塑性或非弹性的范围。如果图1.2a所示的梁具有图1.2b表示的力矩—转角关系：在0至1之间是线性的，随后是非线性的。在0——1线性范围内，力矩—转角的关系是

$$\begin{pmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{pmatrix}=\frac{l}{6EI}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_A\\ M_B\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

在1—3非线性范围内，相应的关系可写成以下形式

$$\begin{pmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{pmatrix}=\frac{l}{6EI}\left\{\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p_A & p_{AB}\\ p_{BA} & p_B\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}M_A\\ M_B\end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

系数p_A、p_B、p_{AB}和p_{BA}叫做'塑性柔度系数'，它们是端力矩M_A和M_B的函数。它们从线性关系0—1—2引起1—3线的偏离。非线性结构比线性结构解起来困难得多，因为，一般来说，方程的直接求解是不大可能的，需要采用迭代法去解。

互等定理：设有一端支撑的悬臂梁，如图1.3所示，当单位垂直荷载作用于A时，A点的位移是f_{11}和B点的转角是f_{21}，当单位力矩作用于B时，B点的转角是f_{22}和A点的垂直位移是f_{12}。如果荷载和变形间的关系是线性的，则可用叠加原理，即两个力同时作用于梁上，其结

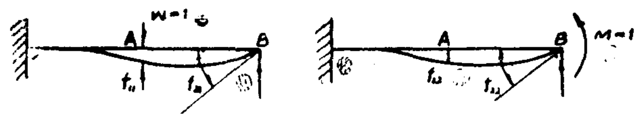


图1.3 柔度影响系数

果将是B点的转角为（$f_{22}+f_{21}$），而A点的位移是（$f_{11}+f_{12}$）。显然，这里力的作用顺序是无关紧要的，总的功和最后的结果都是一样的。先作用W，然后作用M，所作的功是

$$\tfrac{1}{2}Wf_{11}+\tfrac{1}{2}Mf_{22}+Wf_{12} \qquad (1.6)$$

如果变换顺序，先作用M，然后是W，所作的功是：

$$\tfrac{1}{2}Mf_{22}+\tfrac{1}{2}Wf_{11}+Mf_{21} \qquad (1.7)$$

（1.6）和（1.7）式相等，得：

$$Wf_{12}=Mf_{21} \qquad (1.8)$$

因此，对于单位值的W和M，其位移关系为：

$$f_{12}=f_{21} \qquad (1.9)$$

（1.8）式是对于这两个力的情况下的马克斯威尔互等定理。对于任意个力的形式是

$$P_1q_1+P_2q_2+\cdots\cdots+P_nq_n=Q_1p_1+Q_2p_2+\cdots+Q_np_n \qquad (1.10)$$

上式中，一组力P在Q力相应位置上产生位移p，和另一组力Q于P力的相应位置上产生位移q。

1.2 平 衡

结构在力的作用下，其各部分都必须是平衡的。平衡条件的总数需依结构划分的单元数和采用的单元类型来定，通常把作用在结构的结点上或接合点上的力，以若干个平衡条件的式子来表示是有利的。如图1.4的A点表示为一个二维结构上的典型结点，即对A来说是平衡的话，则在两个相互垂直方向（$X.Y$）上的力(P)的总和，以及在$X—Y$平面内的力矩(M)的总和必须是零，即

$$\Sigma P_X = 0$$
$$\Sigma P_Y = 0$$
$$\Sigma M_{XY} = 0 \qquad (1.11)$$

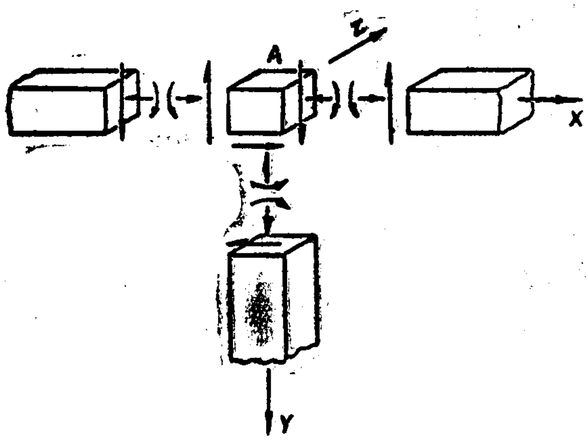


图1.4 在X—Y平面的应力合力

在各种情况中，总和必须包括所有作用力在X，Y方向的分力和在$X—Y$平面内的所有作用力矩。

由线单元组成的刚架结构的分析中，并不计较A点的大小，这是由于考虑到在结构上它是一个点，是杆的中心轴线的交会处，但是，点本身的设计，倒是需要计算其实际尺寸的。

在三维结构中，如空间刚架，在以若干个平衡条件来表示时，须考虑其他的力，这些力是垂直于$X—Y$平面的，Z方向上的力，以及在$Y—Z$平面内的力矩和在$Z—X$平面内的力矩，于是存在着六个平衡条件：

$$\Sigma P_X = 0$$
$$\Sigma P_Y = 0$$
$$\Sigma P_Z = 0$$
$$\Sigma M_{XY} = 0 \qquad (1.12)$$
$$\Sigma M_{YZ} = 0$$
$$\Sigma M_{ZX} = 0$$

1.3 相容性

结构的各组成部分必须以相互协调的方式变形，也就是说，诸部分在加载的所有阶段上，都必须连续地接合在一起。再看图1.4的A点，在三维的情况下，节点可以沿X、Y、Z方向移动，和绕X、Y、Z轴转动，节点的这六个位移必须与连接在节点上的各个杆的位移相吻合。如果1.4图所示的三个杆中的二个被移开了，结点A就成为余下的一个杆的末端了，也就不需要相容条件了，所以每增加一个杆，需有六个相容条件。如果在一个结点上有n个刚性连接杆，则相容条件的总数是6（n—1）个。在二维情况下，相应的相容条件数是3(n—1)。

应力合力和放松* (*Stress resultants and releases*)

分为力矩、轴力和剪力的杆的内部作用力，是由所研究截面上的应力分布引起的，叫做应力合力。如果结构是按这种方法设计的，即对各种形式的荷载，这些应力合力中的一个是零，那么也就是说结构中被引进了一个放松。放松的一些例子如图1.5。一次放松*允许在一

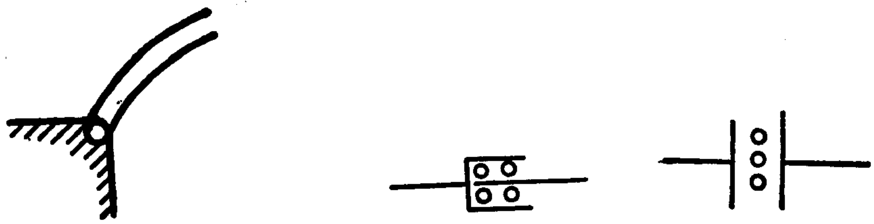


图1.5 放松的例子

结构中的两部分之间出现一个线的或角的不连续。不论何时，在交会于一个结点上的两杆件之间引进一次放松，则相容条件数就减少一个。

1.4 超静定和超动定

如一个结构的相容条件由于引进放松而逐步的减少，这时可能达到一种状态，即再进一步引进一个放松，结构就将变成一种不能支撑荷载的机构了。这种状态的结构叫做静定结构。它的结点力可直接从与结点力有关的平衡条件来计算。一旦放松被取消，结构将恢复原来的条件，更多的结点力也产生了，为确定这些结点力，相容条件也少不了。相反地，一个结构不管其平衡条件，从相容条件就可以求得结点位移的，叫做‘动定结构’。固端梁就是动定的，因为从支承的相容条件，可以知道梁端的转角。

设结构如1.6a图所示，其中结点A、C和D是与刚性基础铰接的，通过地层的基础间的连续性是以嵌进附加的两根杆AD和CD来表达的。如果支承A、C和D被看作是固定的，如图1.6b，则结构除了结点B的位移外，都是动定的。如果结点B被约束得只能转动而不能垂直或水平移动，如图1.6b，结构超动定的度数n_k就是一。这种想像的约束实际上是存在的。就

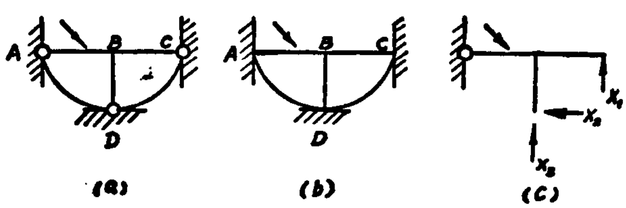


图1、6

好象是杆件被假设为有无限大的伸长刚度。于是，约束被定义为这样的装置，它约束某一结点的位移，如同在相应位移等于零的另一结点一样。这样，如图1.6a的结构所示，三个力矩放松被引入在A、C和D，由于不能从相容条件得到在这些结点上展现的转角，因此超动定的度数从一增到四，这种结果一般表述为

$$n_k = 3(n-1) - c + r \qquad (1.13)$$

*译注：在有些结构力学中，‘放松’这个词叫做‘去掉联系’或‘解除约束’，意义是一样的。

式中n是结点数，c是约束数和r是放松数。在三维结构中，（$n-1$）的系数变成六个，因为在任意型式的结点存在着六个位移。在一结构中的超动定位移，就是已知的自由度。

图1.6b的结构，当包括基础杆AD和CD时，就组成为两个封闭环，完全切开每个环的一个结构杆，倘若不是同一杆的话，则结构即被变为悬臂梁的静定问题了，在此情况下，被一个切口所放松的合成应力的数目有三个。在三维结构情况下是六个，所以图1.6b结构的超静定度数n_s是$3\times$环数$=6$。在A、C和D处以铰的形式引入三个放松，于是图1.6a结构的n_s减至3，选择适当的多余力$X_{1.2.3}$示于图1.6c*。

环数和杆数M和结点数n之间的关系可用拓扑学原理来建立并给出：

$$\text{环数}=\frac{6}{3}(M-n+1) \tag{1.14}$$

系数6是用于三维情况的，系数3是二维情况的，这样，超静定的度数表示为

$$n_s=\frac{6}{3}(M-n+1)-r \tag{1.15}$$

例题1.1 试确定图1.7a，b和e所示结构的超静定和超动定度数。

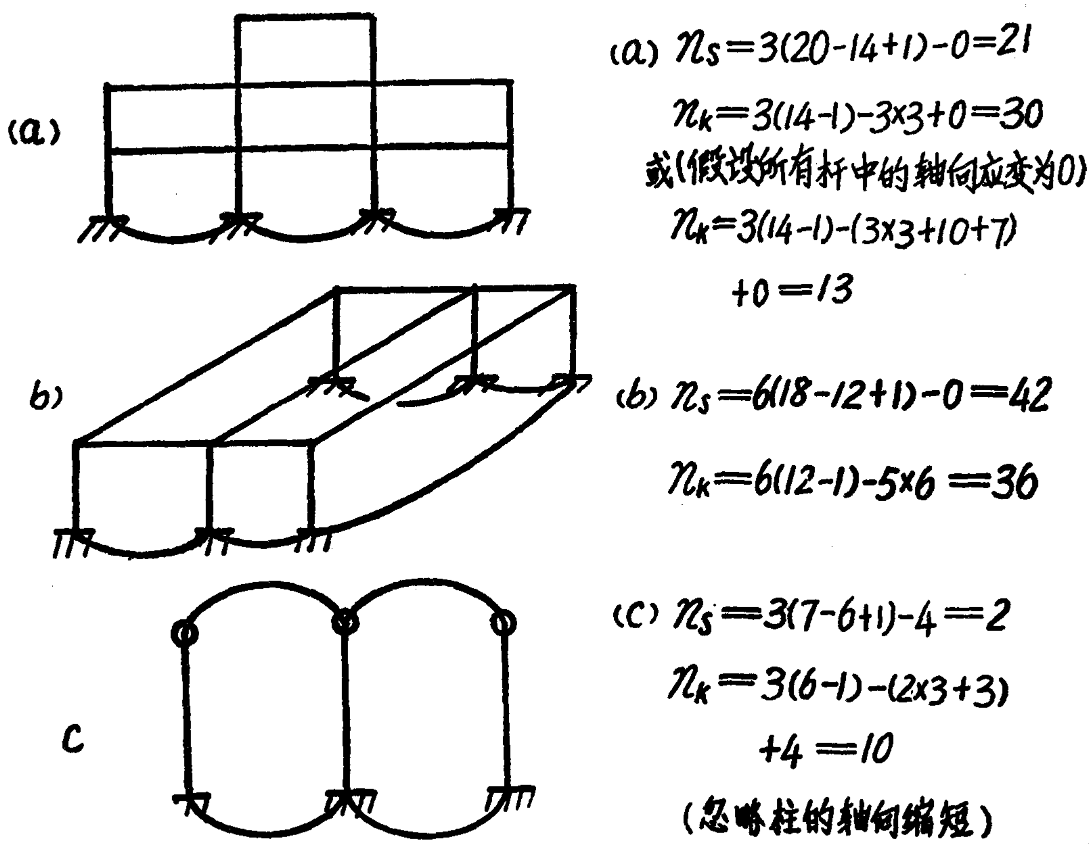


图1.7　　例1.1

---

*译注：图1.6（C）上的多余力的选法有误，因为它的基本结构不是静定结构。