

中学数学



SANJIAOJITITUYINDAO

三角解题引导

湖北人民出版社

三角解题引导

车新发 编
杨 挥 审

三角解题引导

车新发编 杨 挥审

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行
湖北省新华印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 9.625 印张 220,000 字

1981 年 9 月第 1 版 1981 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—30,300

统一书号：7106·1590 定价：0.79 元

出版说明

为了满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学参考的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学会组织编写了这套《中学数学》：《代数解题引导》、《初等几何解题引导》、《解析几何解题引导》、《三角解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》(I、II)。

今后，我们将组织力量继续编写适合中学生课外学习和中学教师教学参考的读物。希望这套书和广大读者见面以后，能听到各方面的热情批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善。

一九八〇年四月

ALC 107

目 录

第一章 三角函数及其基本性质	1
一、概述	1
二、例题	5
三、习题	17
四、习题解答	22
第二章 加法定理及其推广	41
一、概述	41
二、例题	44
三、习题	69
四、习题解答	82
第三章 解三角形	154
一、概述	154
二、例题	157
三、习题	179
四、习题解答	188
第四章 反三角函数和三角方程	242
一、概述	242
二、例题	246
三、习题	259
四、习题解答	265

第一章 三角函数及其基本性质

一、概 述

衡量角度的大小，通常除用度、分、秒表示的六十分制外，还有弧度制等。弧度制是置角的顶点于圆心，以所张的单位圆弧长表示角度。弧度的单位叫径。

直角三角形中，三条边的六种比与锐角的变化一一对应，坐标系中，置角的顶点于原点，始边于正X轴，取逆时针方向为正向，终边上任一点的横坐标、纵坐标及该点到原点的距离，这三者的六种比与角的变化相对应，角变比值变，角定比值定，因此，这些比值为角的函数。通常具体表达如下：

	直角三角形表达的 锐角三角函数	坐标系表达的任意 角三角函数
正 弦	$\sin A = \frac{a}{c}$	$\sin \alpha = \frac{y}{r}$
余 弦	$\cos A = \frac{b}{c}$	$\cos \alpha = \frac{x}{r}$
正 切	$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$
余 切	$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$

续 表

	直角三角形表达的 锐角三角函数	坐标系表达的任意 角三角函数
正 割	$\sec A = \frac{c}{b}$	$\sec \alpha = \frac{r}{x}$
余 割	$\csc A = \frac{c}{a}$	$\csc \alpha = \frac{r}{y}$

此外，也常用单位圆的三角函数线进行表达。锐角三角函数有表可查，但其定义域限于锐角。锐角三角函数可看作任意角三角函数的特例。

根据三角函数的定义可得

1. 三角函数的符号，依终边所在的象限而定。

α $f(\alpha)$	第 I 象限	第 II 象限	第 III 象限	第 IV 象限
$\sin \alpha$ $\csc \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$ $\sec \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$ $\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

2. 同角三角函数间有如下关系：

倒数关系：

$$\sin \alpha \csc \alpha = 1; \cos \alpha \sec \alpha = 1; \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

商的关系:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

平方关系:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha;$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \csc^2 \alpha.$$

3. 诱导公式反映了 $k \cdot 90^\circ \pm \alpha$ (k 为整数) 与 α 的三角函数间的关系. 当 k 为偶数时, 等于 α 的同名三角函数, 加上把 α 看作锐角时, 原角所在象限内原函数的符号; 当 k 为奇数时, 等于 α 的相应的余函数, 加上把 α 看作锐角时, 原角所在象限内的原函数的符号. 即通常所说的“奇变偶不变, 符号看象限”. 借助这, 任意角三角函数皆可化作相应的锐角三角函数, 查表求值. 如

$$\operatorname{tg} 930^\circ = \operatorname{tg} (10 \times 90^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\begin{aligned} \sin(-1485^\circ) &= -\sin 1485^\circ = -\sin(17 \times 90^\circ - 45^\circ) \\ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

几何图形的直观, 有助于函数性质的了解. 三角函数 $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$ 的图象及性质如下:

1. 图 象

$$y = \sin x$$

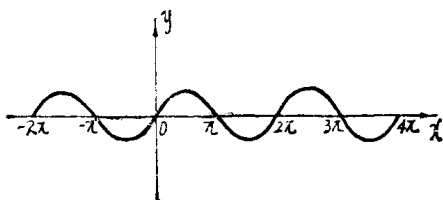


图 1-1

$$y = \cos x$$

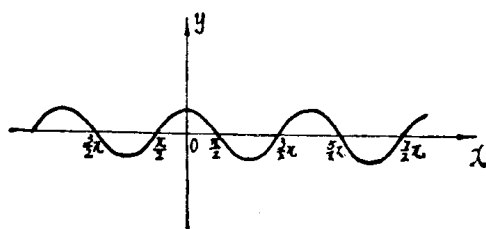


图 1—2

$$y = \operatorname{tg} x$$

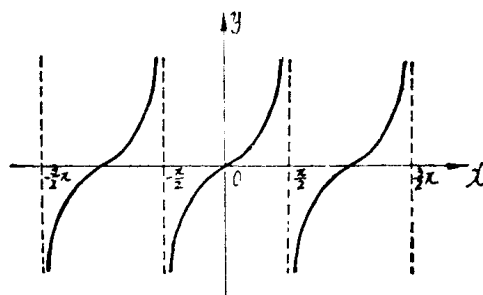


图 1—3

$$y = \operatorname{ctg} x$$

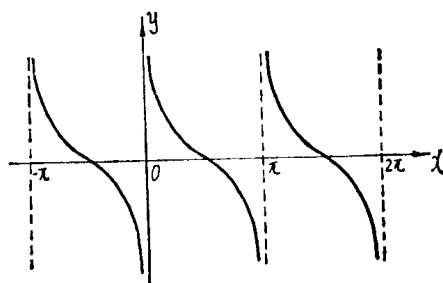


图 1—4

2. 基本性质

	定义域	值 域	增 减 性		奇偶性	周期性
			递增区间	递减区间		
$y = \sin x$	全体实数	$-1 \leq y \leq 1$	$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$	奇函数	2π
$y = \cos x$	全体实数	$-1 \leq y \leq 1$	$(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$	$2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$	偶函数	2π
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k 为整数)	全体实数	$k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$		奇函数	π
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq k\pi$ (k 为整数)	全体实数		$k\pi < x < (k+1)\pi$	奇函数	π

二、例 题

本章例题除涉及三角函数求值、化简、恒等式论证、运用诱导公式等外，并注意了一些综合问题。如：带附加条件的三角等式的证明；三角函数不等式的证明；消去法；三角函数求极值等。

1. 已知 $\operatorname{tg} \alpha = m$ ，求 $\sin \alpha$ 。

〔分析〕 由于 m 是文字，需就 $m=0$ ， $m>0$ ， $m<0$ 分别进行讨论。

〔解〕 当 $m=0$ 时， $\alpha = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)，故 $\sin \alpha = 0$ 。

当 $m > 0$ 时, 置顶点于原点, 始边在 x 轴正向的角 α , 其终边在一、三象限. 故当此终边在第一象限时

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2},$$

在第三象限时

$$\sin \alpha = -\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}.$$

当 $m < 0$ 时, α 的终边在二、四象限. 故当 α 终边在第二象限时

$$\sin \alpha = -\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2},$$

在第四象限时

$$\sin \alpha = \frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}.$$

2. 已知 $\sin \theta = \frac{a-b}{a+b}$ ($0 < a < b$), 求 $\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \cos^2 \theta}$ 的值.

〔分析〕 本题除涉及已知某三角函数值求其它三角函数值外, 还牵涉根式, 因此还须注意算术根.

〔解〕 因 $0 < a < b$, 所以

$$\sin \theta = \frac{a-b}{a+b} < 0, \text{ 从而有}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \cos^2 \theta} &= \sqrt{\frac{\cos^4 \theta}{\sin^2 \theta}} = \frac{\cos^2 \theta}{-\sin \theta} = \sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} = -\frac{4ab}{a^2-b^2}. \end{aligned}$$

3. 已知 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{60}{169}$, 且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 求 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值.

〔分析〕 根据已知条件和恒等式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 运用韦达定理, 可求出 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值. 因

$$1 \pm 2\sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2,$$

故在 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 、 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 、 $\sin \alpha \cos \alpha$ 三个式子中，已知其中某一个式子的值，则其余二式的值不难求出。因此，本题以先求出 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 及 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值为宜。

〔解〕 由 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{60}{169}$ 得

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{289}{169},$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{49}{169}.$$

又已知 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，故 $\sin \alpha > \cos \alpha > 0$ ，所以

$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{17}{13}, \\ \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{7}{13}, \end{cases}$$

解之即得 $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ， $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ 。

4. 已知 $\sin \alpha = a \sin \beta$ ， $\operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \beta$ ，求 $\cos \alpha$ 和 $\sin \beta$ 的值(这里 a, b 满足条件 $|b| \geq |a| > 1$ 或 $|b| \leq |a| < 1$)。

〔分析〕 由两等式消去 β ，便得到一个只含有 α 的三角函数的等式，从而可求出 $\cos \alpha$ 的值；若消去 α ，便可求出 $\sin \beta$ 的值。

〔解〕 由 $\sin \alpha = a \sin \beta$ ， $\operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \beta$ 得

$$\csc \beta = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

而

$$\csc^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \beta = 1,$$

所以

$$\left(\frac{a}{\sin \alpha}\right)^2 - \left(\frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 = 1,$$

$$a^2 - b^2 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha,$$

$$(b^2 - 1) \cos^2 \alpha = a^2 - 1,$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{a^2 - 1}{b^2 - 1}}.$$

用同样的方法可求得

$$\sin \beta = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 - 1}}.$$

$\sin \beta$ 的值还可以由 $\sin \beta = \frac{1}{a} \sin \alpha$ 求出:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{a^2 - 1}{b^2 - 1} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 - 1},$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 - 1}},$$

$$\sin \beta = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 - 1}}.$$

5. 化简 $\left(\sqrt{\frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}} - \sqrt{\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}}\right) \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}} - \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{1 - \cos \phi}}\right).$

[解] 原式 = $\left(\sqrt{\frac{(1 - \sin \phi)^2}{1 - \sin^2 \phi}} - \sqrt{\frac{(1 + \sin \phi)^2}{1 - \sin^2 \phi}}\right) \cdot$
 $\left(\sqrt{\frac{(1 - \cos \phi)^2}{1 - \cos^2 \phi}} - \sqrt{\frac{(1 + \cos \phi)^2}{1 - \cos^2 \phi}}\right)$
 $= \frac{(1 - \sin \phi) - (1 + \sin \phi)}{\sqrt{\cos^2 \phi}} \cdot$
 $\frac{(1 - \cos \phi) - (1 + \cos \phi)}{\sqrt{\sin^2 \phi}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2 \sin \phi}{|\cos \phi|} \cdot \frac{-2 \cos \phi}{|\sin \phi|} \\
&= \frac{4 \sin \phi \cos \phi}{|\cos \phi| |\sin \phi|} = \frac{4 \sin 2\phi}{|\sin 2\phi|} \\
&= \begin{cases} 4, & \text{当 } k\pi < \phi < k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 时} \\ -4, & \text{当 } k\pi + \frac{\pi}{2} < \phi < (k+1)\pi \text{ 时 } (k \text{ 为整数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

6. 求证 $\frac{1 + \sec x + \operatorname{tg} x}{1 + \sec x - \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$

〔分析〕 关于三角恒等式的论证，不仅要善于对同角三角函数间进行相互转化，而且还要注意 1 与三角函数间的相互转化。

$$\begin{aligned}
\text{〔证〕} \quad &\frac{1 + \sec x + \operatorname{tg} x}{1 + \sec x - \operatorname{tg} x} = \frac{\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \sec x + \operatorname{tg} x}{1 + \sec x - \operatorname{tg} x} \\
&= \frac{(\sec x + \operatorname{tg} x)(\sec x - \operatorname{tg} x + 1)}{1 + \sec x - \operatorname{tg} x}, \\
&= \sec x + \operatorname{tg} x = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.
\end{aligned}$$

7. 求证 $\frac{2(\cos \theta - \sin \theta)}{1 + \sin \theta + \cos \theta} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}.$

$$\begin{aligned}
\text{〔证〕} \quad &\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\
&= \frac{\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta - \sin^2 \theta}{(1 + \sin \theta)(1 + \cos \theta)} \\
&= \frac{(\cos \theta - \sin \theta)(1 + \sin \theta + \cos \theta)}{1 + \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \cos \theta} \\
&= \frac{2(\cos \theta - \sin \theta)(1 + \sin \theta + \cos \theta)}{2 + 2(\sin \theta + \cos \theta) + 2\sin \theta \cos \theta} \quad \text{〔注〕} \\
&= \frac{2(\cos \theta - \sin \theta)(1 + \sin \theta + \cos \theta)}{1 + 2(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta + \cos \theta)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2(\cos \theta - \sin \theta)(1 + \sin \theta + \cos \theta)}{(1 + \sin \theta + \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{2(\cos \theta - \sin \theta)}{1 + \sin \theta + \cos \theta}.$$

〔注〕 此时将分子、分母同乘以 2，一方面可使分子出现 2，另一方面可将分母化为 $(1 + \sin \theta + \cos \theta)^2$ 。

8. 已知 $\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin x} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} x}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta$, 求证 $\cos x = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.

〔分析〕 要证 $\cos x = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$, 即要证 $\operatorname{tg} \alpha \cos x - \operatorname{tg} \beta = 0$, 亦即要证 $(\operatorname{tg} \alpha \cos x - \operatorname{tg} \beta)^2 = 0$.

〔证〕 依已知条件有

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\sin x \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta,$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha (\csc^2 x - 1) + \operatorname{tg}^2 \beta (\operatorname{ctg}^2 x + 1)$$

$$- 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos x \csc^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 \beta \csc^2 x - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos x \csc^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 \beta - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos x = 0,$$

$$(\operatorname{tg} \alpha \cos x - \operatorname{tg} \beta)^2 = 0,$$

即 $\operatorname{tg} \alpha \cos x - \operatorname{tg} \beta = 0$

所以

$$\cos x = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

9. 已知 $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$,

求证 $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$.

〔证〕 将已知等式两边同乘以 $a+b$, 得

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{b}{a} \sin^4 x + \frac{a}{b} \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2,$$

$$b^2 \sin^4 x - 2ab \sin^2 x \cos^2 x + a^2 \cos^4 x = 0,$$

$$b \sin^2 x = a \cos^2 x,$$

$$\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b}.$$

设 $\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b} = \lambda$ ^[注], 代入原等式之中, 得

$$\lambda = \frac{1}{a+b}.$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} &= \sin^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{a} \right)^3 + \cos^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{b} \right)^3 \\ &= \sin^2 x \cdot \lambda^3 + \cos^2 x \cdot \lambda^3 \\ &= \lambda^3 = \frac{1}{(a+b)^3}. \end{aligned}$$

[注] 这里设其比值等于 λ , 可简化后面的计算. 数学中, 当几个比值相等时, 常这样处理.

10. 设 k 是 4 的倍数加 1 的自然数, 若以 $\cos x$ 表示 $\cos kx$ 时, 有 $\cos kx = f(\cos x)$, 则 $\sin kx = f(\sin x)$.

[证] 由于 $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, 设 $k = 4n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 则有

$$\begin{aligned} f(\sin x) &= f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \\ &= \cos k\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \cos\left[(4n+1)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \\ &= \cos\left[2n\pi + \frac{\pi}{2} - (4n+1)x\right] \end{aligned}$$

$$= \sin(4n+1)x$$

$$= \sin kx.$$

11. 若 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 求证 $\cos(\sin \theta) > \sin(\cos \theta)$.

〔分析〕 为便于比较大小, 将不等式两边化为同名三角函数.

因 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{2} - \sin \theta$ 和 $\sin \theta$ 都是锐角, 原不等式与

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin \theta\right) > \sin(\cos \theta)$$

等价, 故本证明转化为

$$\frac{\pi}{2} - \sin \theta > \cos \theta,$$

即

$$\sin \theta + \cos \theta < \frac{\pi}{2}.$$

〔证〕 因 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 故有

$$\sin \theta \geq 0, \cos \theta \geq 0,$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &\leq 1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= 2, \end{aligned}$$

所以

$$\sin \theta + \cos \theta \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2} - \sin \theta > \cos \theta.$$

而 $\frac{\pi}{2} - \sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 都是锐角, 依正弦函数在第一象限单调递增, 有