

普通高等工科院校基础课规划教材

# 线性代数

陈建华 主编

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k-1} a_{ik} a_{11} \cdots a_{i-1, i-1} a_{i+1, i+1} \cdots a_{nn}$$

2-43

机械工业出版社  
China Machine Press



821

0151.2-43

C45b

普通高等工科院校基础课规划教材

# 线 性 代 数

主编 陈建华  
参编 刘金林 魏俊潮  
主审 蔡传仁



机械工业出版社

本书是根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求编写而成的。全书分7章,前3章为基础篇,介绍行列式、矩阵、向量组的线性相关性与线性方程组,后4章为应用提高篇,介绍矩阵相似对角化、二次型、投入产出模型及线性空间与线性变换的基础知识。

本书是为普通高等院校非数学专业本科生编写的,内容选择突出精选够用,语言表达力求通俗易懂,章节安排考虑了不同专业选用方便。本书也可作为大专院校和成人教育学院的教学参考书,还可供参加自考的广大读者参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈建华主编. —北京:机械工业出版社,2002.7  
普通高等工科院校基础课规划教材

ISBN 7-111-10404-8

I. 线... II. ①陈...②魏... III. 线性代数-高等学  
校-教材 IV. 0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第037908号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)  
责任编辑:郑丹 版式设计:霍永明 责任校对:李秋荣  
封面设计:陈沛 责任印制:路琳  
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行  
2002年7月第1版第1次印刷  
1000mm×1400mm B5·7.375印张·246千字  
0 001—4 000册  
定价:16.50元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换  
本社购书热线电话(010)68993821、68326677-2527  
封面无防伪标均为盗版

# 普通高等工科院校基础课规划教材

## 编 审 委 员 会

主任委员：殷翔文

副主任委员：黄鹤汀 左健民 王晓天

高文龙 章 跃

秘 书：陈小兵 陈 洪

委 员：(排名不分先后)

陈小兵 陈 洪 刘丹平

刘金林 施声久 何一鸣

朱中华 秦祖泽 钱飒飒

郑 丹

# 序

人类已经满怀激情地跨入了充满机遇与挑战的 21 世纪。这个世纪要求高等教育培养的人才必须具有高尚的思想道德,明确的历史责任感和社会使命感,较强的创新精神、创新能力和实践能力,宽广的知识面和扎实的基础。基础知识水平的高低直接影响到人才的素质及能力,关系到我国未来科学、技术的发展水平及在世界上的竞争力。由于基础学科本身的特点,以及某些短期功利思想的影响,不少人对大学基础教育的认识相当偏颇,我们有必要在历史的回眸中求前车之鉴,在未来的展望中创革新之路。我们必须认真转变教育思想,坚持以邓小平同志提出的“三个面向”和江泽民同志提出的“三个代表”为指导,以培养新世纪高素质人才为宗旨,以提高人才培养质量为主线,以转变教育思想观念为先导,以深化教学改革为动力,以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点,以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心,努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用性的复合型人才。

基于上述考虑,中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅(原江苏省教委)和江苏省及省外部分高等工院校成立了教材编审委员会,组织编写了大学基础课程系列教材,作为加强教学基本建设的一种努力。

这套教材力求具有以下特点:

(1) 科学定位。本套教材主要用于应用性本科人才的培养。

(2) 综合考虑、整体优化,体现“适、宽、精、新、用”。所谓“适”,就是要深浅适度;所谓“宽”,就是知识面要宽些;所谓“精”,就是要少而精;所谓“新”,就是要跟踪应用

学科前沿，推陈出新，反映时代要求；所谓“用”，就是要理论联系实际，学以致用。

(3) 强调特色。就是要体现一般工科院校的特点，符合一般工科院校基础课教学的实际要求。

(4) 以学生为本。本套教材应尽量体现以学生为本，以学生为中心的教育思想，不为教而教。注重培养学生自学能力和扩展、发展知识能力，为学生今后持续创造性学习打好基础。

尽管本套教材想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前，但由于是一种新的探索，难免有这样那样的缺点甚至错误，敬请广大读者不吝指教，以便再版时修正和完善。

本套教材的编写和出版得到了中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅以及各主审、主编和参编学校的大力支持与配合，在此，一并表示衷心感谢。

普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会

主任 殷翔文

2002年3月

# 前 言

线性代数是一门重要的基础课。在自然科学、工程技术和  
管理科学等诸多领域有着广泛的应用。根据高等教育本科线性  
代数课程的教学基本要求，编者结合多年从事线性代数课程教  
学的体会编写了这本书，其目的是为普通高等学校非数学专业  
学生提供一本适用面较宽的线性代数教材。

在编写过程中，借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理  
方法，内容上突出精选够用，表达上力求通俗易懂。根据非数  
学专业学生使用的需要，以矩阵作为贯穿全书的主线，一方面  
让线性方法得以充分体现，同时有利于学生理解线性代数课程  
的基本概念和基本原理。在概念的引入、理论分析和例题演算  
等环节上尽可能多地反映代数与几何结合的思想，这样可以使  
学生从几何背景中理解代数概念的来龙去脉，并获得解决问题的  
启示。重视例题和习题的设计和选配，除了选配巩固课程内容  
的基本题目外还选配了部分提高题。

全书共分7章，既紧密联系又相对独立。本书前3章为基  
础篇，后4章为应用提高篇。根据本科线性代数课程教学基本  
要求，工科类学生应掌握本书的前6章的内容；管理专业、财  
经专业学生应掌握本书的前5章和第7章的内容；化学、化工  
专业和农学专业学生应掌握本书的前4章的内容。开设工程数  
学（线性代数）课程的专业，学时数为27学时的，选讲本教  
材的前3章以及第4章的第2、3节；学时数为36学时的，选  
讲本教材的前4章以及第5章的大部分内容。开设线性代数课  
程的专业，学时数为54学时可讲完前6章，或前5章和第7  
章。教师可以根据不同专业和不同教学时数选择有关章节进行  
教学。根据现行研究生入学考试的考试大纲，从内容上看，本

书的前6章覆盖了数学(一)的考试要求,本书的前5章覆盖了数学(三)的考试要求,本书的前4章覆盖了数学(二)和数学(四)的考试要求。

在编写过程中,中国科学技术大学章璞教授对本书编写大纲提出过许多宝贵的意见,扬州大学蔡传仁教授审阅了全书,蒋宏圣副教授校阅了书稿。机械工业出版社,扬州大学教务处、理学院和数学系对本书的编写出版给予了很大的帮助,在此表示衷心的感谢。此外,编者从学习代数学到讲授代数课程,始终得到方洪锦教授、蔡传仁教授的指导和扬州大学数学系老师的关心,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,书中内容、体系、结构不当甚至错误在所难免,敬请各位专家、学者不吝赐教,欢迎读者批评指正。

编者

2002年2月



# 目 录

序

前言

<b>第 1 章 行列式</b> .....	1
1.1 行列式的定义 .....	1
1.2 行列式的性质 .....	7
1.3 行列式的展开定理 .....	12
1.4 行列式的计算 .....	18
1.5 克莱姆 (Cramer) 法则 .....	25
习题 .....	29
<b>第 2 章 矩阵</b> .....	33
2.1 矩阵的定义与运算 .....	33
2.2 几种特殊的矩阵 .....	40
2.3 逆矩阵 .....	43
2.4 矩阵的分块 .....	50
2.5 初等变换与初等矩阵 .....	57
2.6 矩阵的秩 .....	64
习题 .....	69
<b>第 3 章 向量与线性方程组</b> .....	74
3.1 线性方程组解的存在性 .....	74
3.2 向量组的线性相关性 .....	82
3.3 向量组的秩 .....	88
3.4 向量空间 .....	95
3.5 线性方程组解的结构 .....	100
习题 .....	107
<b>第 4 章 矩阵相似对角化</b> .....	111
4.1 欧氏空间 $R^n$ .....	111
4.2 方阵的特征值和特征向量 .....	118
4.3 矩阵相似对角化条件 .....	125
4.4 实对称矩阵的相似对角化 .....	132
4.5 * Jordan 标准形介绍 .....	137
习题 .....	146

<b>第 5 章 二次型</b> .....	148
5.1 二次型及其矩阵表示 .....	148
5.2 化二次型为标准形 .....	151
5.3 化二次型为规范形 .....	159
5.4 正定二次型和正定矩阵 .....	162
习题 .....	171
<b>第 6 章 线性空间与线性变换</b> .....	174
6.1 线性空间的概念 .....	174
6.2 线性空间的基、维数和坐标 .....	180
6.3 线性变换的概念 .....	187
6.4 线性变换在不同基下的矩阵 .....	192
习题 .....	194
<b>第 7 章 投入产出数学模型</b> .....	196
7.1 投入产出平衡方程组 .....	196
7.2 直接消耗系数 .....	198
7.3 解平衡方程组 .....	201
7.4 完全消耗系数 .....	206
习题 .....	209
<b>附录</b> .....	211
附录 A 矩阵特征问题的数值解 .....	211
附录 B 广义逆矩阵简介 .....	216
附录 C Maple 的基本知识 .....	219
<b>参考文献</b> .....	226

# 第 1 章 行 列 式

线性代数是高等学校的一门重要基础课，也是中学代数的继续和发展。行列式是线性代数中主要研究对象方阵的重要数值特征，它在线性代数中起着重要作用。本章介绍行列式的概念、基本性质、计算方法及简单应用。

## 1.1 行列式的定义

行列式的概念来源于解线性方程组的问题。在初等数学中，为了简化线性方程组解的表达式，引进了二、三阶行列式的概念。作为线性代数的重要工具，在讨论  $n$  元线性方程组和向量的运算时，需要把行列式推广到  $n$  阶，即讨论  $n$  阶行列式的问题。

### 1.1.1 二阶、三阶行列式

在初等数学中，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1-1)$$

的解，实际上为平面上两条直线的交点。当这两条直线不平行时，即  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  时，利用消元法可解得

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

为了便于记忆上述解的公式，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

并称之为二阶行列式。利用二阶行列式的概念，方程组 (1-1) 的解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$\text{其中, } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

例 1-1 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

解  $D = 2 \times 5 - (-3) \times 4 = 22$

对于含有三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1-2)$$

可以进行类似的讨论。由此引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

并称之为三阶行列式。行列式中的横排、纵排分别称为它的行和列。

二、三阶行列式所表示的数利用对角线法则来记忆 (见图 1-1)。

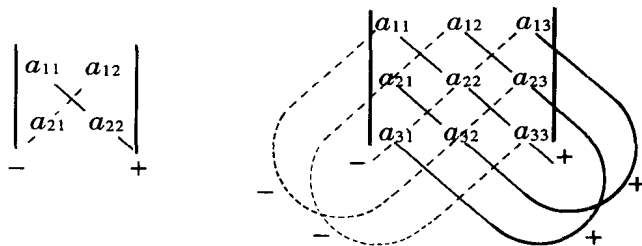


图 1-1

例 1-2 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

解  $D = 1 \times 0 \times 6 + 2 \times 5 \times (-1) + 3 \times 4 \times 0 \\ - 1 \times 5 \times 0 - 2 \times 4 \times 6 - 3 \times 0 \times (-1) \\ = -10 - 48 = -58$

从二、三阶行列式的定义可以看出,行列式的值是一些“项”的代数和。例如在三阶行列式中,每一项都是三个数的连乘积,而且这三个数取自三阶行列式的不同的行与不同的列,总项数以及每一项相应的符号,则与其下标的排列有关。为了揭示二、三阶行列式的结构规律,将行列式的概念推广到  $n$  阶,先简单介绍一些有关排列的基本

知识。

### 1.1.2 数码的排列

$n$  个数码  $1, 2, \dots, n$  组成的有序数组  $i_1 i_2 \dots i_n$  称为一个  $n$  元排列。如 312 和 634521 分别为三元和六元排列。众所周知,  $n$  个数码  $1, 2, \dots, n$  组成的全部排列总数为  $n!$ 。例如自然数  $1, 2, 3$  可组成  $3! = 6$  个排列, 我们用  $i_1 i_2 i_3$  表示这 6 个排列中的一个。

**定义 1-1** 在排列  $i_1 \dots i_s \dots i_t \dots i_n$  中, 如果  $i_s > i_t$ , 则这两个数构成一个逆序。排列  $i_1 i_2 \dots i_n$  中逆序的总个数称为该排列的逆序数, 记为  $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$ 。

**例 1-3** 求下列排列的逆序数

$$(1) 2143 \quad (2) 13524 \quad (3) n(n-1) \dots 21$$

$$(4) 135 \dots (2n-1) 246 \dots (2n)$$

**解** (1) 在排列 2143 中, 数 2 与后面的 1 构成逆序; 数 1 后面没有数与 1 构成逆序; 数 4 与后面的 3 构成逆序; 数 3 排在最后面。故  $\tau(2143) = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$

$$(2) \tau(13524) = 0 + 1 + 2 + 0 + 0 = 3$$

$$(3) \tau(n(n-1) \dots 21) = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ = \frac{n(n-1)}{2}$$

(4) 所给排列中  $1, 3, 5, \dots, (2n-1)$  的逆序个数为零,  $2, 4, 6, \dots, (2n)$  的逆序个数也为零, 故只要计算其余数的逆序个数。

$$\tau(135 \dots (2n-1) 246 \dots (2n)) = 1 + 2 + \dots + (n-1) \\ = \frac{n(n-1)}{2}$$

排列  $12 \dots (n-1) n$  具有自然顺序, 称为自然排列。

**定义 1-2** 一个排列的逆序数为偶数时, 称它为偶排列; 一个排列的逆序数为奇数时, 称它为奇排列。

排列 23154 的逆序数  $\tau(23154) = 3$ , 为奇排列, 而排列 23451 的逆序数  $\tau(23451) = 4$ , 为偶排列。排列  $n(n-1) \dots 21$  的逆序数为  $\frac{1}{2}n(n-1)$ , 当  $n = 4k$  或  $4k+1$  时, 为偶排列, 当  $n = 4k+2$  或  $4k+3$  时, 为奇排列。

**例 1-4** 由  $1, 2, 3$  这三个数码组成的三元排列共有  $3! = 6$  个, 这 6 个排列及其奇偶性如下表所示:

排列	逆序数	排列的奇偶性
123	0	偶排列
132	1	奇排列
213	1	奇排列
231	2	偶排列
312	2	偶排列
321	3	奇排列

在一个排列  $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$  中, 如果将两个数码  $i_s$  与  $i_t$  对调, 其余的数码不变而得到另一个新排列  $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ , 这样的变换叫做一个对换, 记为  $(i_s, i_t)$ 。

如, 对排列 21354 施以对换  $(1, 4)$  后得到排列 24351。

**定理 1-1** 对换改变排列的奇偶性。

**证明** 首先讨论对换相邻数码的特殊情形。设排列为  $AijB$ , 其中  $A, B$  表示除了  $i, j$  两个数码外的其余数码, 经过对换  $(i, j)$ , 变为新排列  $AjiB$ 。比较上面两个排列中的逆序, 显然,  $A, B$  中数码的次序没有改变,  $i, j$  与  $A, B$  中数码的次序也没有改变, 仅仅改变了  $i$  与  $j$  的次序, 因此, 新排列仅比原排列增加了一个逆序 (当  $i < j$  时), 或减少了一个逆序 (当  $i > j$  时), 所以对换后排列与原排列的奇偶性相反。

现在看一般情形。设排列为  $Aik_1k_2 \cdots k_jB$ , 经过对换  $(i, j)$ , 变为新排列  $Ajk_1k_2 \cdots k_iB$ 。新排列可以由原排列将数码  $i$  依次与  $k_1, k_2, \cdots, k_s, j$  作  $s+1$  次相邻数码的对换, 变为  $Ak_1k_2 \cdots k_jiB$ , 再将  $j$  依次与  $k_s, \cdots, k_2, k_1$  作  $s$  次相邻数码的对换, 变为  $Ajk_1k_2 \cdots k_iB$ , 即可以由原排列经过  $2s+1$  相邻数码的对换得到。由前面的讨论可知, 它改变了奇数次奇偶性, 所以它们的奇偶性相反。

**定理 1-2** 全体  $n$  ( $n > 1$ ) 元排列的集合中, 奇、偶排列各占一半。

**证明**  $n$  个数码  $1, 2, \cdots, n$  组成的全部排列总数为  $n!$ , 设其中奇排列为  $p$  个, 偶排列为  $q$  个。设想将每一个奇排列施以相同的对换, 如  $(1, 2)$ , 则由定理 1-1 可知  $p$  个奇排列全部变为偶排列, 于是  $p \leq q$ ; 同理如果将全部偶排列施以相同的对换, 如  $(1, 2)$ , 则  $q$  个偶排列全部变为奇排列, 于是  $q \leq p$ , 所以  $p = q$ 。

**推论** 任意一个排列都可以经过一定次数的对换, 变成自然排列,

且奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数。

### 1.1.3 $n$ 阶行列式的定义

有了排列的逆序数和奇偶性的概念，我们观察二、三阶行列式的“项”的构成。每一项的正、负号及项数，它们可分别表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

类似地，根据这个规律，可推广二阶、三阶行列式的概念，定义  $n$  阶行列式。

**定义 1-3**  $n^2$  个数  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为  $n$  阶行列式，其中横排、纵排分别称为它的行和列。它表示所有可能取自不同的行不同的列的  $n$  个元素乘积的代数和，各项的符号确定方法是：当这一项中元素的行标按自然顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号。因此  $n$  阶行列式表示的数为

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中， $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  称为  $n$  阶行列式的一般项， $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$  表示

对所有  $n$  级排列求和。简记为  $|a_{ij}|_{n \times n}$ 。

根据行列式的定义，在五阶行列式中， $a_{14} a_{25} a_{31} a_{43} a_{52}$  因行标排列是自然顺序，而  $\tau(45132) = 7$ ，故所带的符号为“-”。四阶行列式共 24 项，因此，不能用对角线法则计算。

特别地，定义一阶行列式  $|a_{11}|$  就是  $a_{11}$ （注意与绝对值的区别）。

**例 1-5** 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中,  $a_{ii} \neq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )。

解 行列式  $D$  的一般项为  $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ , 该行列式中有很多元素为零, 现在考察哪些项不为零。一般项中最后一个元素  $a_{nj_n}$  取自第  $n$  行, 但第  $n$  行中只有一个元素  $a_{nn}$  不为零, 因而  $j_n = n$ , 即行列式中除了含  $a_{nn}$  的那些项外, 其余项均为零。一般项中, 倒数第二个元素  $a_{n-1, j_{n-1}}$  取自第  $n-1$  行, 但第  $n-1$  行中只有两个元素  $a_{n-1, n-1}$  和  $a_{n-1, n}$  不为零, 而  $a_{nn}$  取自  $n$  行  $n$  列, 因此  $a_{n-1, n}$  在一般项不能再取, 故  $a_{n-1, j_{n-1}}$  为  $a_{n-1, n-1}$ , 即行列式中只有含  $a_{n-1, n-1}$ ,  $a_{nn}$  的项不为零, 其余均为零, 类似讨论可知不为零的项只有  $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 。由于  $\tau(12 \cdots n) = 0$ , 这一项取正号。故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (1-3)$$

类似地

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (1-4)$$

特别地

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (1-5)$$



上述式 (1-3)、式 (1-4)、式 (1-5) 中的行列式分别称为上、下三角形行列式和对角形行列式。

由行列式的定义不难得出：如果行列式中有一行（或一列）的元素全为零，则此行列式的值为零。

关于  $n$  阶行列式定义的表达式可等价地表示为

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \quad (1-6)$$

或

$$\sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (1-7)$$

利用排列对换的性质不难证明式 (1-6) 和式 (1-7)，请读者自己完成。

**例 1-6** 设  $(-1)^{\tau(i432k) + \tau(52j14)} a_{i5} a_{42} a_{3j} a_{21} a_{k4}$  为五阶行列式中的一项，求  $i$ 、 $j$ 、 $k$  的值，并确定该项的符号。

**解** 由行列式的定义，每一项中的元素取自不同的行不同的列，故  $j=3$ ， $i=1$ ， $k=5$ ，或  $j=3$ ， $i=5$ ， $k=1$ 。

当  $j=3$ ， $i=1$ ， $k=5$  时， $\tau(14325) + \tau(52314) = 9$ ，该项取负号。

当  $j=3$ ， $i=5$ ， $k=1$  时，由对换的性质知该项取正号。

## 1.2 行列式的性质

用行列式的定义直接计算行列式的值，常是十分费事的，仅从项数来看， $n$  阶行列式共  $n!$  项，每一项要做  $n-1$  次乘法运算，就需要做  $(n-1)n!$  次乘法运算，当  $n$  较大时，乘法次数将是一个惊人的数字。本节我们将推导行列式的一些性质，通过它们可使行列式的计算在许多情况下大为简化。

**定义 1-4** 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把  $D$  的行与列互换，得到新的行列式，记为