黄冈市资深教育专家编写

黄冈数学题库

黄冈数学题库

综合题（下）

全国十年中考数学试题分类汇析

不可多得的高分秘诀

主编　南秀全

青岛出版社

黄冈数学题库

综合题（下）

全国十年中考数学试题分类汇析

主编　南秀全

图书在版编目(CIP)数据

黄冈数学题库:综合题(下)/南秀全主编.—2版.
青岛:青岛出版社,2003
ISBN 7-5436-1513-4

Ⅰ.黄… Ⅱ.南… Ⅲ.数学课—初中—习题—
升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第037046号

书　　名	黄冈数学题库:综合题(下)
主　　编	南秀全
出版发行	青岛出版社
社　　址	青岛市徐州路77号(266071)
邮购电话	(0532)5814750　5814611—8662
责任编辑	郭东明　杨成舜
装帧设计	徐凤宝
出版时间	2003年7月第2版,2003年7月第2次印刷
印　　刷	安丘市九州印刷包装有限公司
开　　本	16开(787×1092毫米)
印　　张	19.75
插　　页	2
字　　数	450千
书　　号	ISBN 7-5436-1513-4
定　　价	20.00元

(青岛版图书售出后发现缺页、散页、错装、倒装、字迹模糊等,请寄回承印厂调换。)
厂址:安丘市人民路234号　　邮编:262100　　电话:0536-4221216

目　　录

十、函数与几何

【经典考题精析】

这类试题一般来说难度较大.解答这类问题的关键就是要善于利用几何图形的有关性质、几何中的有关定理和二次函数的知识,并注意挖掘问题中的一些隐含条件,以达到解题的目的.许多省、市常常将这类问题作为压轴题来进行考查.

例1 (吉林省,2001)已知反比例函数 $y=\frac{k}{2x}$ 和一次函数 $y=2x-1$,其中一次函数的图像经过 (a,b),$(a+1,b+k)$ 两点.

(1)求反比例函数的解析式;

(2)如图10-1,已知点 A 在第一象限,且同时在上述两个函数的图像上,求 A 点坐标;

(3)利用(2)的结果,请问:在 x 轴上是否存在点 P,使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形?若存在,把符合条件的 P 点坐标都求出来;若不存在,请说明理由.

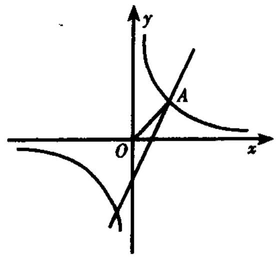

图10-1

解 (1)依题可得 $\begin{cases} b=2a-1, & ① \\ b+k=2(a+1)-1. & ② \end{cases}$

②-①得 $k=2$.

∴ 反比例函数解析式为 $y=\frac{1}{x}$.

(2)由 $\begin{cases} y=2x-1, \\ y=\frac{1}{x} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\frac{1}{2}, \\ y_2=-2. \end{cases}$

经检验 $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\frac{1}{2}, \\ y_2=-2 \end{cases}$ 都是原方程组的解.

∵ A 点在第一象限,

∴ A 点坐标为(1,1).

(3)如图10-2,$OA=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,$OA$ 与 x 轴所夹锐角为45°.

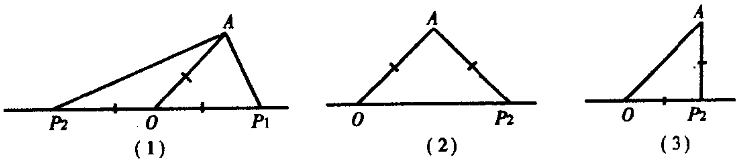

图10-2

①当 $OA=OP$,得 $P_1(\sqrt{2},0)$,$P_2(-\sqrt{2},0)$,当 $OA=AP$ 时,得 $P_3(2,0)$.

②当 OA 为底时,得 $P_4(1,0)$.∴ 这样的点有4个,分别是 $(\sqrt{2},0)$,$(-\sqrt{2},0)$,$(2,0)$,$(1,0)$.

例2 (河北省,1996)已知一次函数 $y=mx+4$ 具有下列性质:y 随 x 的增大而减小,又直线 $y=mx+4$ 分别与直线 $x=1$,$x=4$ 相交于点 A,D,且点 A 在第一象限内,直线 $x=1$,$x=4$ 分别与 x 轴相交于点 B,C(图10-3).(1)要使四边形 $ABCD$ 为凸四边形,试求 m 的取值范围;(2)已知四边形 $ABCD$ 为凸四边形,直线 $y=mx+4$ 与 x 轴相交于点 E,当 $\frac{ED}{EA}=\frac{4}{7}$ 时,求这个一次函数的解析式;(3)在(2)的条件

下,设直线 $y=mx+4$ 与 y 轴相交于点 F.求证:点 D 是$\triangle EOF$ 的外心.

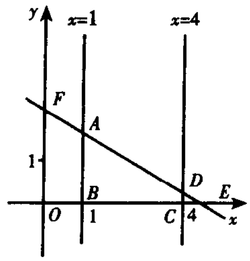

图 10－3

(1)**解**　∵ y 随 x 的增大而减小,∴ $m<0$.

∵ 直线 $y=mx+4$ 与直线 $x=1,x=4$ 分别相交于点 A,D,

∴ 解方程组 $\begin{cases}y=mx+4,\\x=1;\end{cases}$ $\begin{cases}y=mx+4,\\x=4\end{cases}$ 得 $A(1,m+4),D(4,4m+4)$.

∵ 点 A 在第一象限内,∴ $m+4>0,m>-4$.

∵ 四边形 $ABCD$ 为凸四边形,∴ $4m+4>0$,即 $m>-1$.

∴ m 的取值范围为 $-1<m<0$.

(2)**证明**　∵ 四边形 $ABCD$ 为凸四边形,∴ $m+4>0,4m+4>0$.

∴ $AB=m+4,DC=4m+4$.

∵ $AB\perp Ox,DC\perp Ox$,∴ $AB/\!/DC$.　∴ $\frac{DC}{AB}=\frac{ED}{EA}$,又$\frac{ED}{EA}=\frac{4}{7}$,

∴ $\frac{4m+4}{m+4}=\frac{4}{7}$,解得 $m=-\frac{1}{2}$.　∴ 一次函数的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$.

(3)由(2)中 $y=-\frac{1}{2}x+4$,可得此直线与 x 轴,y 轴的交点坐标为 $E((8,0),F(0,4)$.

∵ 点 $C(4,0)$,∴ $OC=EC$.　∴ 点 C 是线段 OE 的中点.

又在 Rt$\triangle EOF$ 中,$DC/\!/OF$,∴ D 为 FE 的中点.　∴ 点 D 是 Rt$\triangle EOF$ 的外心.

例 3　(河北省,1998)已知一条抛物线经过 $A(0,3),B(4,6)$ 两点,对称轴 $x=\frac{5}{3}$.(1)求这条抛物线的解析式;(2)试证明这条抛物线与 x 轴的两个交点中,必有一点 C,使得对于 x 轴上任意一点 D,都有 $AC+BC\leqslant AD+BD$.

(1)**解**　设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$,A 点关于 $x=\frac{5}{3}$的对称点为 A',则 $A'(\frac{10}{3},3)$.

依题意,得 $\begin{cases}16a+4b+c=6,\\(\frac{10}{3})^2a+\frac{10}{3}b+c=3,\\c=3.\end{cases}$　解得 $\begin{cases}a=\frac{9}{8},\\b=-\frac{15}{4},\\c=3.\end{cases}$

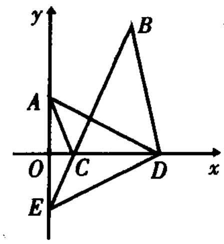

图 10－4

∴ 所求抛物线的解析式为 $y=\frac{9}{8}x^2-\frac{15}{4}x+3$.

(2)**证明**　设$\frac{9}{8}x^2-\frac{15}{4}x+3=0$,解之,得 $x_1=\frac{4}{3},x_2=2$.

∴ 抛物线与 x 轴的两个交点的坐标分别为$(\frac{4}{3},0),(2,0)$.

设点 A 关于 x 轴的对称点为 E,则 $E(0,-3)$.

设直线 BE 的解析式为 $y=mx+n$,由直线 $y=mx+n$ 经过点 $B(4,6),E(0,-3)$,

得 $m=\frac{9}{4},n=-3$. ∴ $y=\frac{9}{4}x-3$.

易知,直线 $y=\frac{9}{4}x-3$ 与 x 轴的交点坐标是$(\frac{4}{3},0)$.设为 $C(\frac{4}{3},0)$,则点 C 恰为抛物线与 x 轴的一个交点.在 x 轴上任意取一点 D,连结 AC,AD,BD,ED,如图 10－4.

若点 D 与点 C 为同一点,则 $AC+BC=AD+BD$;

若点 D 与点 C 不同,在$\triangle BED$ 中,有 $BE<ED+BD$.

∵ $BE=EC+BC,EC=AC,ED=AD$,∴ $AC+BC<AD+BD$.

∴ 对 x 轴上任意一点 D,都有 $AC+BC\leqslant AD+BD$.

例 4　(呼和浩特市,2001)如图 10－5,抛物线 $y=x^2-px-q$ 与 x 轴交于 A,B 两点,与 y 轴交于 C

点，已知$\angle ACB=90^\circ$，$\angle CAO=\alpha$，$\angle CBO=\beta$，$\tan\alpha-\tan\beta=4$.

(1)求抛物线的解析式，并用配方法求顶点的坐标、对称轴方程；

(2)平行于 x 轴的一条直线交抛物线于M,N两点，若以 MN 为直径的圆正好与 x 轴相切，求此圆的半径.

解 (1)设 A 点坐标$(x_1,0)$，B点坐标$(x_2,0)$.

由抛物线解析式 $y=x^2-px-q$，已知 C 点坐标$(0,-q)$，

$\therefore x_1+x_2=p, x_1x_2=-q$，

$\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{OC}{OA}-\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{q}{-x_1}-\dfrac{q}{x_2}=-\dfrac{q(x_1+x_2)}{x_1x_2}=-q\cdot\dfrac{p}{-q}=p.$

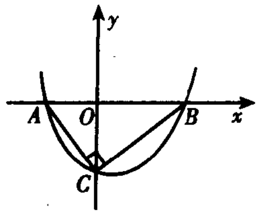

图 10—5

$\tan\alpha-\tan\beta=4.\ \therefore\ p=4.$

又$\angle ACB=90^\circ$，$\therefore\ OC^2=OA\cdot OB.\ \therefore\ q^2=-x_1\cdot x_2.$

$\therefore\ q^2=q, q=1\,(q=0$ 舍$)$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-4x-1$，$y=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$.

$\therefore$ 其顶点坐标$(2,-5)$，对称轴方程 $x=2$.

(2)$\because$ 直线 $MN/\!/x$ 轴，$\therefore$ 设 $M(x_3,y_0)$，$N(x_4,y_0)$两点在抛物线上，x_3,x_4 是方程 $x^2-4x-1=y_0$ 的二根，$x_3+x_4=4$，$x_3x_4=-1-y_0$，

$MN=|x_3-x_4|=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3y_4}=\sqrt{16+4+4y_0}=2\sqrt{5+y_0}.$

由题设$\dfrac{1}{2}MN=|y_0|$，$\therefore\ \sqrt{5+y_0}=|y_0|$. 得 $y^2-y_0-5=0$. $\therefore\ y_0=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$.

$\therefore$ 圆半径为$\dfrac{\sqrt{21}+1}{2}$(MN 在 x 轴上方)或$\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}$(MN 在 x 轴下方).

例 5 (西安市，2000)如图 10—6，在直角坐标系中，$\odot A$ 的半径为 4，A 的坐标为$(2,0)$，$\odot A$ 与 x 轴交于E,F两点，与 y 轴交于C,D两点，过 C 点作$\odot A$ 的切线 BC 交 x 轴于 B.

(1)求直线 BC 的解析式；

(2)若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在直线 BC 上，与 x 轴的交点恰为$\odot A$ 与 x 轴的交点，求抛物线的解析式；

(3)试判断点 C 是否在抛物线上，并说明理由.

解 (1)连结 AC，根据题意，得 $AC\perp BC$.

$\because\ OA=2, AC=4$，$\therefore$ C 点坐标为$(0,2\sqrt{3})$，B 点坐标为$(-6,0)$.

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$.

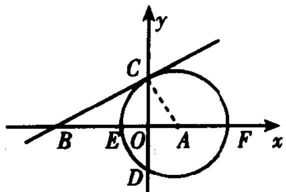

图 10—6

(2)根据题意，得$\odot A$ 与 x 轴的交点分别为 $E(-2,0)$，$F(6,0)$，抛物线的对称轴过 A 点，$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x=2$.

$\because$ 抛物线的顶点在直线 BC：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$上，

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为$\left(2,\dfrac{8}{3}\sqrt{3}\right)$.

设抛物线为 $y=a(x-2)^2+\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$，

$\because$ 抛物线与 x 轴交点也为 $E(-2,0)$和 $F(6,0)$，$\therefore\ 0=a(-2-2)^2+\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$. 解得 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-2)^2+\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$. 即 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$.

(3)C 点在抛物线上. 因为抛物线与 y 轴的交点坐标为$(0,2\sqrt{3})$.

例 6 （聊城市，2000）如图 10－7，已知直线 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 与 x 轴，y 轴分别交于 A,B 两点，以 AB 为边在第一象限内作正三角形 ABC，$\odot O'$ 是正三角形的外接圆，$\odot O'$ 与 y 轴交于另一点 D.

(1)求 C 点坐标；(2)求过 C 点且与 $\odot O'$ 相切的直线的解析式；

(3)若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A,C,D 三点，求这条抛物线的解析式.

解 (1)∵ 直线 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 与 x 轴，y 轴分别交于 A,B 两点，

∴ $A(1,0),B(0,\sqrt{3})$，即 $OA=1,OB=\sqrt{3}$.

在 $Rt\triangle AOB$ 中，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，由 $OA=\frac{1}{2}AB$，得 $\angle ABO=30°$.

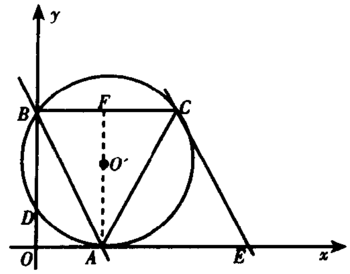

图 10－7

又∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $BC=AB=2,\angle OBC=\angle OBA+\angle ABC=90°$.

∴ $BC/\!/OA$. ∴ C 点坐标为 $(2,\sqrt{3})$.

(2)设过点 C 且与 $\odot O'$ 相切的直线的解析式为 $y=kx+b$，此直线与 x 轴交于点 E，则 $\angle ACE=\angle ABC=\angle CAB=60°$. ∴ $EC/\!/AB$.

∴ 四边形 $ABCE$ 是平行四边形. ∴ $AE=BC=2$. ∴ $OE=OA+AE=3$，即 E 点坐标是 $(3,0)$.

由 $\begin{cases}\sqrt{3}=2k+b,\\0=3k+b\end{cases}$ 解得 $k=-\sqrt{3},b=3\sqrt{3}$.

∴ 所求直线的解析式为 $y=-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$.

(3)连结 AO' 并延长交 BC 于 F，则 AF 即为正三角形 ABC 的高，即 $AF\perp BC$.

又 $BC/\!/OA$，∴ $OA\perp O'A$. 又 OA 过 $\odot O'$ 的半径外端，

∴ OA 与 $\odot O'$ 相切. ∴ $OA^2=OD\cdot OB$，代入解得 $OD=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ∴ $D(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$.

将 D,A,C 三点的坐标代入抛物线的解析式 $y=ax^2+bx+c$，

得 $\begin{cases}a+b+c=0,\\4a+2b+c=\sqrt{3},\\c=\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\b=-\sqrt{3},\\c=\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

故所求抛物线的解析式为 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 7 （武汉市，2002）如图 10－8，已知抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}mx-2m$ 交 x 轴于 $A(x_1,0),B(x_2,0)$，交 y 轴于 C 点，且 $x_1<0<x_2$，$(AO+OB)^2=12CO+1$. 求抛物线的解析式.

解 由已知可得：$AO=-x_1,OB=x_2$.

∵ $x_1+x_2=3m$. $x_1x_2=-4m<0$，∴ $m>0$. ∴ $CO=2m$.

∵ $(AO+OB)^2=12CO+1$，∴$(-x_1+x_2)=12\times 2m+1$.

即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=24m+1$.

∴ $9m^2-8m-1=0$，解得 $m_1=1,m_2=-\frac{1}{9}$.

∵ $m>0$，∴ $m=1$. ∴ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.

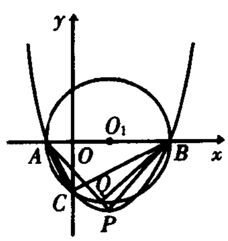

图 10－8

例 8 （武汉市，2001）如图 10－9，关于 x 的二次函数 $y=x^2-2mx-m$ 的图像与 x 轴交于 $A(x_1,0),B(x_2,0)$ 两点 $(x_2>0>x_1)$，与 y 轴交于 C 点，且 $\angle BAC=\angle BCO$.

(1)求这个二次函数的解析式；

(2)以点 $D(\sqrt{2},0)$ 为圆心作⊙D,与 y 轴相切于点 O. 过抛物线上一点 $E(x_3,t)(t>0,x_3<0)$ 作 x 轴的平行线与⊙D 交于 F,G 两点,与抛物线交于另一点 H. 问:是否存在实数 t,使得 $EF+GH=FG$? 如果存在,求出 t 的值;如果不存在,请说明理由.

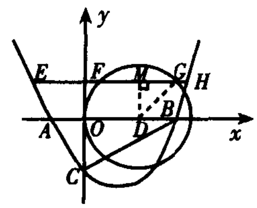

图 10—9

解 (1)∵ $\angle BAC=\angle BCO,\angle BOC=\angle COA=90°$,∴ $\triangle BCO\backsim\triangle CAO$.

∴ $CO^2=AO\cdot OB$. 由已知可得:$AO=|x_1|=-x_1,OB=|x_2|=x_2$.

∵ $x_1x_2=-m<0$,∴ $m>0$. ∴ $CO=m,AO\cdot OB=m$. ∴ $m^2=m$.

∴ $m=1,m=0$(舍去). ∴ 抛物线的解析式为:$y=x^2-2x-1$.

(2) 存在实数 t,使得 $EF+GH=FG$. 过 D 作 $DM\perp EH$ 于 M,连结 DG.

∵ $EH\parallel x$ 轴,$E(x_3,t)$,∴ $DM=t$.

∵ $DG=OD=\sqrt{2}$,∴ $FG=2MG=2\sqrt{DG^2-DM^2}=2\sqrt{2-t^2}$.

由 $EF+GH=FG$,得 $EH=2FG$. 又∵ $EH\parallel x$ 轴,$E(x_3,t)$. ∴ 设 $H(x_4,t)$.

∵ E,H 是抛物线上的两点,∴ $x_3^2-2x_3-1=t,x_4^2-2x_4-1=t$.

即 x_3,x_4 是 $x^2-2x-1=t$ 的两个不相等的根. ∴ $x_3+x_4=2,x_3\cdot x_4=-(1+t)$.

∵ $x_3<0$, ∴ $x_4>0$. ∴ $EH=x_4-x_3=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\sqrt{4+4(1+t)}=2\sqrt{2+t}$.

∴ $2\sqrt{2+t}=4\sqrt{2-t^2}$. 即:$4t^2+t-6=0$. 解这个方程得 $t_1=\dfrac{\sqrt{97}-1}{8},t_2=-\dfrac{\sqrt{97}+1}{8}$(舍去).

故存在实数 $t=\dfrac{\sqrt{97}-1}{8}$,使得 $EF+GH=FG$.

例 9 (厦门市,2000)已知抛物线 $y=\dfrac{1}{3}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-3,0)$,与 y 轴交于点 $E(0,-1)$.

(1)求此二次函数的解析式.

(2)若点 $Q(m,n)$ 在此抛物线上,且 $-3\leqslant m\leqslant 3$. 求 n 的取值范围.

答:____________.(注本小题不必写解答过程,只需将答案直接填写在横线上)

(3)设点 B 是此抛物线与 x 轴的另一个交点,P 是抛物线上异于点 B 的一个动点. 连结 BP 交 y 轴于点 N(点 N 在点 E 的上方). 若$\triangle AOE\backsim\triangle BON$,求点 P 的坐标.

(1)**解** 由题意得 $\begin{cases}\dfrac{1}{3}\times(-3)^2+b\times(-3)+c=0,\\ c=-1.\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}b=\dfrac{2}{3},\\ c=-1.\end{cases}$ ∴ $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x-1$.

(2)**答** $-\dfrac{4}{3}\leqslant n\leqslant 4$.

(3)**解** ∵ 点 B 是抛物线 $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x-1$ 与 x 轴的另一交点. ∴ $B(1,0)$. ∵ $\triangle BON\backsim\triangle AOE$,

∴ (ⅰ)当 $\dfrac{ON}{OE}=\dfrac{OB}{OA}$ 时,有 $\dfrac{ON}{1}=\dfrac{1}{3}$. ∴ $ON=\dfrac{1}{3}$. ∴ 点 N 的坐标为 $(0,\dfrac{1}{3})$ 或 $(0,-\dfrac{1}{3})$.

设直线 BN 的解析式为 $y=kx+b$,当点 N 的坐标为 $(0,\dfrac{1}{3})$,有 $\begin{cases}0=k+b,\\ \dfrac{1}{3}=b.\end{cases}$ ∴ $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

∴ $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x-1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-4,\\ y=\dfrac{5}{3};\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=0.\end{cases}$(不合题意,舍去)

当点 N 的坐标为 $(0,-\dfrac{1}{3})$ 时,同理可得点 P 的坐标为 $(-2,-1)$.

(ⅱ)当 $\dfrac{ON}{OA}=\dfrac{OB}{OE}$ 时,有 $\dfrac{ON}{3}=\dfrac{1}{1}$. ∴ $ON=3$. ∴ 点 N 的坐标为 $(0,3)$ 或 $(0,-3)$.

∵ 点 N 在点 E 的上方，∴ 点 $N(0,3)$. 此时过点 B,N 的直线的解析式为 $y=-3x+3$.

∴ $\begin{cases} y=-3x+3, \\ y=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-1. \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x=-12, \\ y=39, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$（不合题意舍去）

∴ 点 P 的坐标为 $(-4,\frac{5}{3})$，$(-2,-1)$，$(-12,39)$.

例 10　已知二次函数 $y=x^2-(m-3)x+m+4$ 的图像与 x 轴交于点 $A(x_1,0)$，点 $B(x_2,0)$，且 $x_1<x_2$，与 y 轴交于 C 点，若 $\angle CAB$ 与 $\angle CBA$ 都是锐角.

(1)求 m 的取值范围；

(2)是否可能出现 $\angle CAB=\angle CBA$？若可能，求此时 m 的值；若不可能，比较 $\angle CAB$ 与 $\angle CBA$ 的大小；

(3)若 $\angle CAB$ 与 $\angle CBA$ 互为余角，求 $\triangle ABC$ 的面积.

分析　第(1)问，$\angle CAB$，$\angle CBA$ 的顶点都在 x 轴上，且有公共边 AB，C 点在 y 轴上，则 $\triangle ABC$ 的形状只有如图 10－10 中的三种可能. 由条件可知，若 $\angle CAB$，$\angle CBA$ 都是锐角，仅当原点 O 位于 A，B 两点之间，因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1<0$，$x_2>0$ 时，$\angle CAB$，$\angle CBA$ 都是锐角，由根与系数的关系可求出此时 m 值的取值范围，这是典型的数形结合思想的运用.

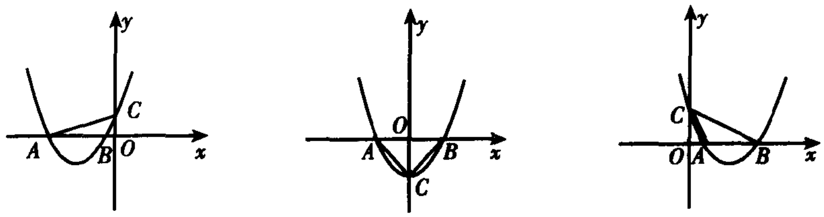

图 10－10

第(2)问，由形考虑，是否有 $\angle CAB=\angle CBA$，取决于是否有 $AC=BC$，这又取决于 y 轴是否可能成为抛物线的对称轴，这是由 m 的值决定的，比较 $\angle CAB$ 与 $\angle CBA$ 的大小，可转化为比较 AC，BC 的大小，而 $AC=\sqrt{x_1{}^2+CO^2}$，$BC=\sqrt{x_2{}^2+CO^2}$，因此比较 AC，BC 的大小就转化为比较关于 x 的方程 $x^2-(m-3)x+m+4=0$ 的两根的绝对值的大小，这又是数形结合思想的运用.

第(3)问，因为已知 $\angle CAB$ 与 $\angle CBA$ 互为余角，则 $\angle ACB$ 为直角，因此 $\triangle ABC$ 是直角三角形. 又因 $CO\perp AB$，所以 $\triangle CAO\backsim\triangle BCO$. 由相似得出比例，即 $\frac{CO}{AO}=\frac{BO}{CO}$，这样就可以转化为关于 m 的方程，求出 m 的值，进而确定 A，B，C 三点坐标，求出 $\triangle ABC$ 的面积.

解　(1)当抛物线与 x 轴交于 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$ 且 $x_1<x_2$ 时，只有如图 10－10 三种情况.

∵ 由图 10－10 可知，当且仅当 $x_1<0$，$x_2>0$ 时，$\angle CAB$，$\angle CBA$ 都是锐角，∴ $x_1\cdot x_2<0$.

∴ $m+4<0$，即 $m<-4$.

(2)∵ 当且仅当 y 轴是抛物线对称轴时，$AC=BC$，才有 $\angle CAB=\angle CBA$，此时 $m-3=0$，即 $m=3$.

∵ $m=3$ 不满足 $m<-4$，∴ $\angle CAB\neq\angle CBA$.

∵ $m<-4$，∴ $x_1+x_2=m-3<0$.

又∵ $x_1<0$，$x_2>0$，∴ $|x_1|>|x_2|$.

在 $Rt\triangle ACO$ 中，$AC=\sqrt{AO^2+CO^2}=\sqrt{x_1{}^2+CO^2}$.

在 $Rt\triangle BCO$ 中，$BC=\sqrt{x_2{}^2+CO^2}$. ∴ $AC>BC$.

在 $\triangle ABC$ 中，∵ $AC>BC$，∴ $\angle CBA>\angle CAB$.

(3)∵ $\angle CAB$ 与 $\angle CBA$ 互余，∴ $\angle ACB=90°$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

∵ $CO\perp AB$ 于 O，∴ $Rt\triangle CAO\backsim Rt\triangle BCO$.　∴ $\frac{CO}{BO}=\frac{AO}{CO}$.

∵ 点 C 坐标是 $(0,m+4)$，∴ $CO=|m+4|$.

∴ $\dfrac{|m+4|}{|x_2|}=\dfrac{|x_1|}{|m+4|}$，即 $(m+4)^2=|x_1|\cdot|x_2|$.

∵ $x_1<0,x_2>0,x_1\cdot x_2=m+4$，∴ $(m+4)^2=-(m+4)$.

∵ $m<-4$，∴ $m+4\neq0$，∴ $m+4=-1$，即 $m=-5$.

此时二次函数解析式是 $y=x^2+8x-1$，$x_1+x_2=-8$，$x_1\cdot x_2=-1$，点 C 坐标为 $(0,-1)$.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CO=\frac{1}{2}|x_1-x_2|\cdot1=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{1}{2}\sqrt{64+4}=\sqrt{17}.$$

∴ 当 $\angle CAB$ 与 $\angle CBA$ 互余时，$\triangle ABC$ 的面积是 $\sqrt{17}$.

例 11 （成都市，1999）已知直线 $y=\frac{1}{2}x$ 和 $y=-x+m$，二次函数 $y=x^2+px+q$ 图像的顶点为 M.

(1)若 M 恰在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与 $y=-x+m$ 的交点处，试证明：无论 m 取何实数值，二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图像与直线 $y=-x+m$ 总有两个不同的交点；

(2)在(1)的条件下，若直线 $y=-x+m$ 过点 $D(0,-3)$，求二次函数 $y=x^2+px+q$ 的表达式，并作出其大致图像；

(3)在(2)的条件下，若二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图像与 y 轴交于点 C，与 x 轴的左交点为 A，试在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上求异于点 M 的点 P，使点 P 在 $\triangle CMA$ 的外接圆上.

(1)证明 由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x, & ①\\ y=-x+m. & ②\end{cases}$

有 $\frac{1}{2}x=-x+m$. ∴ $\frac{3}{2}x=m,x=\frac{2}{3}m,y=\frac{1}{3}m$. ∴ 交点 $M\left(\frac{2}{3}m,\frac{1}{3}m\right)$.

此时二次函数为 $y=\left(x-\frac{2}{3}m\right)^2+\frac{1}{3}m=x^2-\frac{4}{3}mx+\frac{4}{9}m^2+\frac{1}{3}m$. ③

由②，③联立，消去 y，有 $x^2-\left(\frac{4}{3}m-1\right)x+\frac{4}{9}m^2-\frac{2}{3}m=0$.

$$\Delta=[-(\frac{4}{3}m-1)]^2-4(\frac{4}{9}m^2-\frac{2}{3}m)$$
$$=\frac{16}{9}m^2-\frac{8}{3}m+1-\frac{16}{9}m^2+\frac{8}{3}m=1>0.$$

∴ 无论 m 为何实数值，二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图像与直线 $y=-x+m$ 总有两个不同的交点.

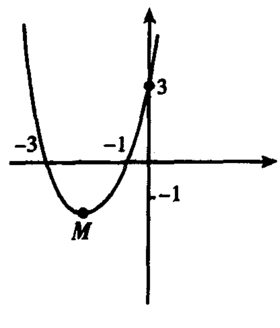

图 10－11

(2)解 ∵ 直线 $y=-x+m$ 过点 $D(0,-3)$，∴ $-3=0+m$.

∴ $m=-3$. ∴ $M(-2,-1)$.

∴ 二次函数为 $y=(x+2)^2-1$，即 $y=(x+3)(x+1)$.

图像如图 10－11.

(3)解 由勾股定理，可知 $\triangle CMA$ 为 Rt△，且 $\angle CAM=90°$，

∴ MC 为 $\triangle CMA$ 外接圆直径.

∵ P 在 $y=\frac{1}{2}x$ 上，可设 $P\left(n,\frac{1}{2}n\right)$，

由 MC 为 $\triangle CMA$ 外接圆的直径，P 在这个圆上，∴ $\angle CPM=90°$.

过 P 分别作 $PN\perp y$ 轴于 N，$PQ\perp x$ 轴于 R，过 M 作 $MS\perp y$ 轴于 S，MS 的延长线与 PR 的延长线交于点 Q，如图 10－12.

由勾股定理，有 $|MP|^2=|MQ|^2+|QP|^2$，

即 $|MP|^2=(n+2)^2+(\frac{1}{2}n+1)^2$，

$|CP|^2=|NC|^2+|NP|^2=(3-\frac{1}{2}n)^2+n^2$，$|CM|^2=20$.

而 $|MP|^2+|CP|^2=|CM|^2$，

$\therefore (n+2)^2+(\frac{1}{2}n+1)^2+(3-\frac{1}{2}n)^2+n^2=20$，

即 $\frac{5}{2}n^2+2n-6=0$. $\therefore 5n^2+4n-12=0$，$(5n-6)(n+2)=0$.

$\therefore n_1=\frac{6}{5}$，$n_2=-2$.

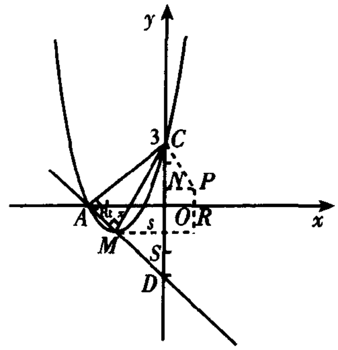

图 10－12

而 $n_2=-2$ 即是 M 点的横坐标，与题意不合，故舍去.

$\therefore n=\frac{6}{5}$，此时 $\frac{1}{2}n=\frac{3}{5}$.　$\therefore$ P 点的坐标为 $\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$.

例 12　(黄冈市，2000)在直角坐标系 xoy 中，已知点 A,B,C 的坐标分别为 $A(-2,0)$，$B(1,0)$，$C(0,-2\sqrt{3})$.

(1)求经过 A,B,C 三点的二次函数的解析式，并指出顶点 D 的坐标；

(2)在 y 轴上求一点 P，使 $PA+PD$ 最小，求出点 P 的坐标；

(3)在第三象限中，是否存在点 M，使 AC 为等腰 $\triangle ACM$ 的一边，且底角为 $30°$？如果存在，请求出点 M 的坐标；如果不存在，请说明理由；

(4)将(3)题中的"第三象限"改为"坐标平面 xoy"，其余条件不变，请直接写出符合条件的点 M 的坐标(只写结果，不需解答过程).

解　(1)依题设，可设二次函数的解析式为 $y=a(x+2)(x-1)$.

$\because$ 抛物线 $y=a(x+2)(x-1)$ 过点 $C(0,-2\sqrt{3})$，

$\therefore -2\sqrt{3}=a(0+2)(0-1)$. $\therefore a=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=\sqrt{3}(x+2)(x-1)$. 即 $y=\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$.

又 $y=\sqrt{3}(x^2+x-2)=\sqrt{3}(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}\sqrt{3}$，

$\therefore$ 抛物线的顶点 D 的坐标为 $(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\sqrt{3})$.

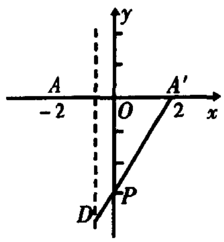

图 10－13

(2)易知 A 点关于 y 轴的对称点 A' 的坐标为 $A'(2,0)$. 连结 $A'D$，交 y 轴于点 P，则点 P 即为所求的点. 设经过点 $A'(2,0)$，$D(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\sqrt{3})$ 的直线为 $y=kx+b$，则

$$\begin{cases}0=2k+b,\\ -\frac{9}{4}\sqrt{3}=-\frac{1}{2}k+b.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}k=\frac{9}{10}\sqrt{3},\\ b=-\frac{9}{5}\sqrt{3}.\end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AD 为 $y=\frac{9}{10}\sqrt{3}x-\frac{9}{5}\sqrt{3}$.

令 $x=0$，则 $y=-\frac{9}{5}\sqrt{3}$. $\therefore$ P 点的坐标为 $(0,-\frac{9}{5}\sqrt{3})$.

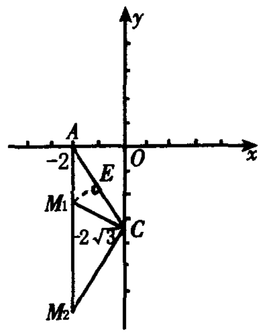

图 10－14

(3)在第三象限内存在符合条件的点 M.

$AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$.

在 $\triangle AM_1C$ 中，设 M_1 的坐标为 $M_1(x_1,y_1)$，

$\because \angle M_1AC=30^\circ, \angle CAO=60^\circ, \therefore \angle OAM_1=90^\circ. AM_1 // OC.$

$\therefore x_1=-2$. 过点 M_1 作 $M_1E \perp AC$ 于 E，则 $AE=2$.

在 $Rt\triangle AEM_1$ 中，$\cos 30^\circ=\frac{AE}{AM_1}$.

$\therefore AM_1=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$. $\therefore$ M_1 的坐标为 $(-2,-\frac{4}{3}\sqrt{3})$.

类似地，可以求得点 M_2 的坐标为 $(-2,-4\sqrt{3})$.

$\therefore$ 符合条件的点 M 的坐标为 $(-2,-\frac{4}{3}\sqrt{3})$ 或 $(-2,-4\sqrt{3})$.

(4)在坐标平面 xoy 中，符合条件的点 M 有六个，它们的坐标分别为 $M_1(-2,-\frac{4}{3}\sqrt{3})$，$M_2(-2,-4\sqrt{3})$，$M_3(-6,0)$，$M_4(0,2\sqrt{3})$，$M_5(4,-2\sqrt{3})$，$M_6(0,-\frac{2}{3}\sqrt{3})$.

例 13 （北京市通州区，2001）在平面直角坐标系中，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}nx-m+3$ 与平行于 x 轴并且和 x 轴的距离为 1 的直线相交于 A，B 两点，与 y 轴的负半轴相交于点 C，其中点 A 在点 B 的左侧，A，B 两点的纵坐标均为正数，若 $\angle ACB=90^\circ$，直线 AB 与 y 轴相交于点 M，$\frac{CM}{AM}+\frac{MB}{CM}-1=0$.

求：(1)点 C 的坐标；(2)抛物线的解析式.

解 (1)设点 A 的坐标为 $(\alpha,1)$，点 B 的坐标为 $(\beta,1)$，依题意，得 $\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{3}{4}n\alpha-m+3=1,\\ \frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{4}n\beta-m+3=1.\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{3}{4}n\alpha-m+2=0,\\ \frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{4}n\beta-m+2=0.\end{cases}$

$\therefore \alpha,\beta$ 是关于 x 的方程 $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}nx-m+2=0$ 的两个实数根. $\therefore \alpha\beta=2(2-m)$.

$\because$ 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}nx-m+3$ 与 y 轴负半轴交于点 C，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0,-m+3)$，且 $-m+3<0$.

又 $\because$ 点 A 在点 B 的左边，$\therefore$ 点 A 在第二象限，点 B 在第一象限.

$\therefore \alpha<0,\beta>0. \therefore \alpha\beta<0. \because -m+3<0, \therefore |OC|=|-m+3|=m-3.$

又 $\because |OM|=1, \therefore |CM|=|OM|+|OC|=1+m-3=m-2.$

又 $|AM|=|\alpha|=-\alpha, |BM|=|\beta|=\beta,$

$\therefore |AM|\cdot|BM|=|\alpha|\cdot|\beta|=-\alpha\beta=-2(2-m)=2(m-2).$

$\because CM\perp AB, \therefore \angle AMC=\angle CMB=90^\circ. \therefore \angle A+\angle ACM=90^\circ.$

$\because \angle ACB=90^\circ, \therefore \angle A+\angle B=90^\circ.$

$\therefore \angle ACM=\angle B. \therefore \triangle AMC \backsim \triangle CMB.$

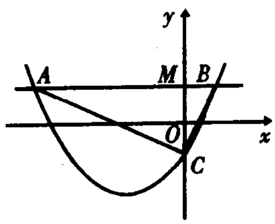

图 10—15

$\therefore \frac{|CM|}{|BM|}=\frac{|AM|}{|CM|}. \quad \therefore |CM|^2=|AM|\cdot|BM|. \therefore (m-2)^2=2(m-2).$

$\because m-2\neq 0, \therefore m-2=2. \therefore m=4. \therefore -m+3=-1.$ $\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0,-1)$.

(2)由(1)可得 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}nx-1$，$|CM|=m-2=4-2=2$，$\frac{|CM|}{|AM|}=\frac{|BM|}{|CM|}$.

又 $\because \frac{|CM|}{|AM|}+\frac{|MB|}{|CM|}-1=0, \therefore \frac{|BM|}{|CM|}=\frac{1}{2}$. 即 $\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$. $\therefore \beta=1$. $\therefore$ B 点的坐标为 $(1,1)$.

把 $x=1,y=1$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}nx-1$，得 $n=2$. ∴ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-1$.

例 14　(镇江市，2001)已知抛物线 $y=\frac{1}{6}(x-2)(x-2t-3)(t>0)$ 与 x 轴交于点 A,B(点 A 在点 B 的左边)，与 y 轴交于点 C.

(1)求 A,B,C 各点的坐标(可用含 t 的代数式表示).

(2)设 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{21}{2}$，求抛物线的解析式.

(3)在(2)的条件下，设 l 为过点 B 且经过第一、二、四象限的一条直线，过原点 O 的直线与 l 在第一象限交于点 E，与以 AC 为直径的圆交于点 D. 若 $\triangle OAD \backsim \triangle OEB$，求 l 的解析式以及 l 与抛物线另一交点的坐标.

又如果过点 O 的直线与 l 的交点 E 在第二或第四象限，在其他条件不变的情况下，试判断满足条件的 l 是否存在？若存在，直接写出 l 的解析式；若不存在，请说明理由.

解　(1)由 $\frac{1}{6}(x-2)(x-2t-3)=0$. 得 $x_1=2,x_2=2t+3$.

故点 A 的坐标为 $(2,0)$，点 B 的坐标为 $(2t+3,0)$.

在 $y=\frac{1}{6}(x-2)(x-2t-3)$ 中，令 $x=0$，得 $y=\frac{1}{3}(2t+3)$，故点 C 的坐标为 $(0,\frac{2}{3}t+1)$.

(2)$AB=|(2t+3)-2|=2t+1$. 由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(2t+1)\cdot\frac{1}{3}(2t+3)$，

得 $\frac{1}{6}(2t+1)(2t+3)=\frac{21}{2}$，解得 $t=3$ 或 $t=-5$(不合题意，舍去).

∴ 所求抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{6}x^2-\frac{11}{6}x+3$.

(3)当 $t=3$ 时，点 B,C 的坐标分别为 $(9,0),(0,3)$. 设直线 l 与 y 轴的交点为 F，由 $\triangle OAD\backsim\triangle OEB$，得 $\angle ODA=\angle OBE$.

而 $\angle ODA=\angle OCA$，∴ $\angle OCA=\angle OBE$.

又 $\angle AOC=\angle FOB=90^\circ$，∴ $\triangle OAC\backsim\triangle OFB$.

∴ $\frac{OA}{OC}=\frac{OF}{OB}$. $OF=\frac{OA\cdot OB}{OC}=6$. 即点 F 的坐标为 $(0,6)$.

设 $l:y=kx+b$，由 $\begin{cases}9k+b=0,\\k\cdot 0+b=6\end{cases}$ 得 $k=-\frac{2}{3},b=6$，所求直线 l 的解析式为 $y=-\frac{2}{3}x+6$.

又解方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{6}x^2-\frac{11}{6}x+3,\\y=-\frac{2}{3}x+6\end{cases}$ 得 l 与抛物线另一交点的坐标为 $(-2,\frac{22}{3})$.

当过点 O 的直线与 l 的交点 E 在第二或第四象限时，满足条件的 l 存在，其解析式仍为 $y=-\frac{2}{3}x+6$.

例 15　(无锡市，2001)已知直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+m(m>0)$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 C 和点 E，过 E 点的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 D，如果 $\triangle CDE$ 恰为一等边三角形. (1)求 b 的值；(2)设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的两个交点分别为 $A(x_1,0),B(x_2,0)(x_1<x_2)$. 问是否存在这样的实数 m，使 $\angle AEC=90^\circ$？如果存在，求出此时 m 的值；如果不存在，请说明理由.

解　(1)由题意：C 点坐标为 $(\sqrt{3}m,0)$，E 点的坐标为 $(0,m)$.

∵ $\tan\angle CEO=\sqrt{3}$，∴ $\angle CEO=60^\circ$，$\angle OCE=30^\circ$.

∵ $\triangle CDE$ 是等边三角形，∴ 点 D 可能有两个. 当点 D 在直线 CE 的左下方时，则∵ $\angle CED=60^\circ$，

$\angle CEO=60°$，∴ 此时点 D 必在 y 轴上，但抛物线还经过点 E，这时 y 轴与抛物线有两个交点，这是不可能的. 故点 D 只可能在直线 CE 的右上方.

∵ $\angle DCE=60°$，$\angle OCE=30°$，∴ $\angle OCD=90°$. ∴ 直线 CD 是抛物线的对称轴.

∵ $CD=CE=2m$，∴ 点 D 的坐标为 $(\sqrt{3}m,2m)$. ∴ $\begin{cases}c=m,\\ -\dfrac{b}{2a}=\sqrt{3}m,\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=2m.\end{cases}$ ∴ $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)**解法一**　若 $\angle AEC=90°$，由题意知，A 必在原点的左侧.

∵ $EO\perp AC$，∴ $\triangle AOE\backsim\triangle COE$，∴ $AO:OE=OE:OC$. ∴ $m^2=-x_1\cdot\sqrt{3}m$. ∴ $x_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}m$.

∵ A 在抛物线上，∴ $a\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}m\right)^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}m\right)+m=0$，即 $(am+1)m=0$.

由(1)知 $am=-\dfrac{1}{3}$. 又 $m>0$，∴ $(am+1)m\neq0$. ∴ 不存在这样的实数 m，使 $\angle AEC=90°$.

解法二　若 $\angle AEC=90°$，∵ $\angle ACE=30°$，$CE=2m$，∴ $\cos\angle ACE=\dfrac{CE}{AC}$. ∴ $AC=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}m$.

又∵ $AC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|$，∴ $4\times\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}m\right)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$.

由 $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$c=m$ 可得 $16(am)^2+3am-1=0$.

∵ $am=-\dfrac{1}{3}$，∴ $16(am)^2+3am-1=0$ 不能成立，即不存在这样的实数 m，使 $\angle AEC=90°$.

例 16　(湖州市，2002)如图 10－16，已知 P,A,B 是 x 轴上的三点，点 A 的坐标为 $(-1,0)$，点 B 的坐标为 $(3,0)$，且 $PA:AB=1:2$，以 AB 为直径画⊙M 交 y 轴的正半轴于点 C.

(1)求证：PC 是⊙M 的切线；(2)在 x 轴上是否存在这样的点 Q，使得直线 QC 与过 A,C,B 三点的抛物线只有一个交点？若存在，求点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由；(3)画⊙N，使得圆心 N 在 x 轴的负半轴上，⊙N 与⊙M 相切，且与直线 PC 相切于 D. 问将过 A,C,B 三点的抛物线平移后能否同时经过 P,D,C 三点？为什么？

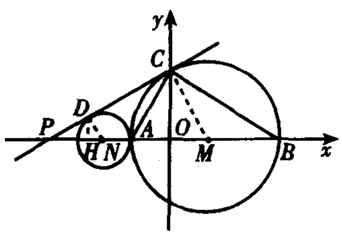

图 10－16

(1)**证明**　连结 MC. ∵ $A(-1,0)$，$B(3,0)$，∴ $AO=MO$.

又 $CO\perp AM$，∴ $AC=CM$. 又 $CM=AM$，∴ $\triangle ACM$ 是正三角形. ∴ $AC=AM$.

∵ $PA:AB=1:2$，∴ $PA=AM$. ∴ $PA=AM=AC$.

∴ $\angle PCM=90°$. ∴ PC 是⊙M 的切线.

(2)∵ $CO^2=AO\cdot BO$，∴ $C(0,\sqrt{3})$. 设过 A,C,B 三点的抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-3)$.

则 $\sqrt{3}=-3a$，∴ $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　∴ $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$.

假设满足条件的 Q 点存在，坐标为 $(m,0)$，并设直线 QC 的解析式为 $y=kx+b$.

则 $\begin{cases}\sqrt{3}=b,\\ km+b=0.\end{cases}$　解得 $\begin{cases}b=\sqrt{3},\\ k=-\dfrac{\sqrt{3}}{m}.\end{cases}$　∴ 直线 QC 的解析式为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{m}x+\sqrt{3}$.

∵ 直线 QC 与抛物线只有一个公共点，∴ 方程 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)=-\dfrac{\sqrt{3}}{m}x+\sqrt{3}$ 有相等的实数根.

将方程整理得　$x^2-(2+\frac{3}{m})x=0$.　$\therefore (2+\frac{3}{m})^2=0$.

$\therefore m=-\frac{3}{2}$.　即满足条件的 Q 点存在,坐标为$(-\frac{3}{2},0)$.

(3)连结 DN,作 $DH\perp PN$,垂足为 H,设$\odot N$ 的半径为 r.

则$\because ND\perp PC$,$\therefore ND/\!/MC$. $\therefore \frac{ND}{MC}=\frac{PN}{PM}$. $\therefore \frac{r}{2}=\frac{2-r}{4}$. $\therefore r=\frac{2}{3}$.

$\because DN^2=NH\cdot NP$,$\therefore (\frac{2}{3})^2=NH\cdot(2-\frac{2}{3})$. $\therefore NH=\frac{1}{3}$.

$\therefore DH=\sqrt{NH\cdot HP}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\therefore D$ 点坐标为$(-2,\frac{\sqrt{3}}{3})$.

$\because$ 将抛物线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$平移,使其经过 P,A 两点的抛物线的解析式为

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x+3)$.　又经验证 D 是该抛物线上的点.

$\therefore$ 将过 A,C,B 三点的抛物线平移后能同时经过 P,D,A 三点.

例 17　(宜昌市,2000)如图 10－17 所示,已知等腰梯形$ABCD$的面积为 $4k$,点 $A(x_1,0)$,$B(x_2,1)$在直线 $l:y=\frac{1}{k}x-1$(k 是不为 0 的常数)上,经过 A,B,C,D 四点的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在直线 $y=(n-3)x+3-n$ 上,求 n 的取值范围.

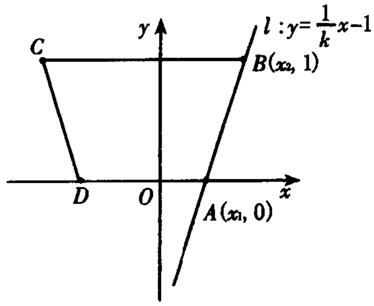

图 10－17

解法一　点 A,B 在直线$y=\frac{1}{k}x-1$ 上,$\therefore A(k,0),B(2k,1)$.

$\therefore AB^2=k^2+1$.

设 C,D 两点坐标分别为$C(m,1)$,$D(g,0)$.

$CD^2=(g-m)^2+1$,又$\because AB=CD$,

$\therefore k^2=(g-m)^2$,$g-m=\pm k$(舍去$-k$),

$\therefore g=m+k$. $\therefore C(m,1),D(m+k,0)$.

$S_{梯形ABCD}=\frac{[k-(m+k)]+(2k-m)}{2}\times 1=k-m$.

依题意 $k-m=4k$, $\therefore m=-3k$.

$\therefore C(-3k,1),D(-2k,0)$.

设抛物线的解析式为 $y=a(x+2k)(x-k)$,将 $B(2k,1)$代入得:$a=\frac{1}{4k^2}$,

$\therefore y=\frac{1}{4k^2}(x^2+kx-2k^2)=\frac{1}{4k^2}[(x+\frac{k}{2})^2-\frac{9}{4}k^2]=\frac{1}{4k^2}(x+\frac{k}{2})^2-\frac{9}{16}$.

$\therefore$ 抛物线顶点坐标为$(-\frac{k}{2},-\frac{9}{16})$,直线 $y=(n-3)x+3-n$ 与 y 轴交点为$(0,3-n)$.

当 $n>3$ 时,y 随 x 增大而增大,而$-\frac{k}{2}<0$,$\therefore -\frac{9}{16}<3-n$.

$\therefore n<3+\frac{9}{16}=\frac{57}{16}$.　$\therefore 3<n<\frac{57}{16}$.

当 $n<3$ 时,y 随 x 增大而减小,而$-\frac{k}{2}<0$,$\therefore -\frac{9}{16}>3-n$.

$\therefore n>\frac{57}{16}$,与 $n<3$ 矛盾.

当 $n=3$ 时,这时直线 $y=(n-3)x+3-n$ 即为 $y=0$.

显然$(-\frac{k}{2},-\frac{9}{16})$不在这条直线上,故 $n\neq 3$.

故 n 的取值范围是 $3<n<\frac{57}{16}$.

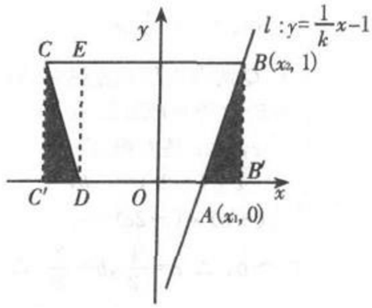

图 10－18

解法二 如图 10－18，过 D 作 $DE\perp BC$ 于 E，过 B 作 $BB'\perp DA$ 于 B'. 由已知求得 $A(k,0)$，$B(2k,1)$.

则 $S_{梯ABCD}=S_{矩形DEBB'}$.

设 D 点坐标为 $(m,0)$. $S_{矩形}=DB'\cdot DE=(2k-m)\times 1$，

$\therefore 2k-m=4k$. $\therefore m=-2k$.

下面同解法一，求抛物线解析式.

解法三 $\because$ AB 两点坐标为 $(k,0)$，$(2k,1)$，

设 C，D 两点坐标为 $C(g,1)$，$D(m,0)$.

又抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=0$ 相交于点 A，D，

则 $ax^2+bx+c=0$.

其两根为 m，k，则 $m+k=-\frac{b}{a}$，$\therefore m=-\frac{b}{a}-k$.

同理可得 $g=-\frac{b}{a}-2k$.

又 $S_{梯形ABCD}=\dfrac{(k+k+\frac{b}{a})+(2k+\frac{b}{a}+2k)}{2}\times 1=4k$，解得：$\frac{b}{a}=k$.

$\therefore m=-2k$，$g=-3k$，C，D 两点坐标分别为 $(-3k,1)$，$(-2k,0)$.

同解法一求抛物线解析式：$y=\frac{1}{4k^2}(x^2+kx-2k^2)=\frac{1}{4k^2}(x+\frac{k}{2})^2-\frac{9}{16}$.

$\because$ 顶点 $(-\frac{k}{2},-\frac{9}{16})$ 在直线 $y=(n-3)x+3-n$ 上，

$\therefore (n-3)\times(-\frac{k}{2})+3-n=-\frac{9}{16}$. 整理可得 $n=\frac{9}{8(k+2)}+3$.

$\because 0<k$，$\therefore 8(k+2)>16$. 即 $0<\frac{1}{8(k+2)}<\frac{1}{16}$.

$\therefore 0<\frac{9}{8(k+2)}<\frac{9}{16}$. 即 $3<\frac{9}{8(k+2)}+3<\frac{9}{16}+3$. 故 $3<n<\frac{57}{16}$.

例 18 （北京市崇文区，2000）已知：抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 P，Q 两点，与 y 轴交于点 E，且 $OE=OP=PQ$. (1)画出抛物线的示意图，并求出抛物线的解析式；(2)问线段 EQ 上是否存在一点 M，使 $\triangle EMP\backsim\triangle EPQ$? 若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

(1)**解法一** 当 P，Q 两点在原点右侧时，如图 10－19(1)，则点 E 的坐标为 $(0,c)$，$c>0$.

$\because OE=OP=PQ$，$\therefore$ 点 $P(c,0)$，$Q(2c,0)$.

$\because c$，$2c$ 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根，根据根与系数关系，$\therefore \begin{cases} c+2c=-b, \\ c\cdot 2c=c. \end{cases}$

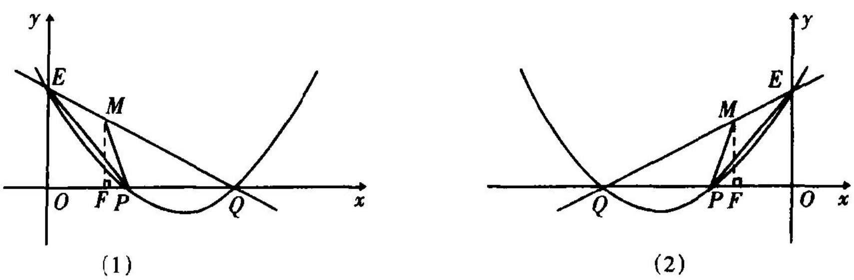

图 10－19