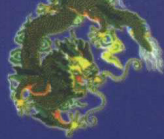


全国高等教育自学考试专用辅导教材



高等数学(一)

微积分学习指导

附习题试题详解

主编/裴雪重

全国高等教育自学考试专用辅导教材

经济管理类公共课



中国经济出版社

全国高等教育自学考试专用辅导教材

高等数学(一)

学 习 指 导

附习题试题详解

主编 裴雪重



中国经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国高等教育自学考试专用辅导教材:高等数学(一)学习指导/
裴雪重主编. —北京:中国经济出版社, 2001.9

ISBN 7-5017-5338-5

I. 全… II. 裴… III. 高等数学—高等教育—自学考试—
自学参考资料 IV. G726.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064596 号

责任编辑:叶亲忠

封面设计:东方

全国高等教育自学考试专用辅导教材

高等数学(一)学习指导

主编 裴雪重

*

中国经济出版社出版发行

(北京市百万庄北街3号)

邮编:100037

各地新华书店经销

北京京丰印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米 1/32 51 印张(总) 1268 千字(总)

2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷

印数:3000 册

ISBN 7-5017-5338-5

G·1076 共 2 册 定价:80.00 元

出版说明

为了切实、有效地帮助参加全国高等教育自学考试高等数学(一)的考生顺利通过全国统一考试,中国经济出版社和高教自考研究会特聘请著名学者——裴雪重教授(多次荣获国内、国际奖项的国家级专家)担纲主编了这本《高等数学(一)学习指导(附习题试题详解)》,本书与全国指定教材和考试大纲相配套。

本书特点:

第一 对全国高等教育自学考试指定教材高等数学(一)(微积分)的全部章节的全部习题做出详细的解答,且解答的思路清晰,方法简便,易于读者理解和掌握。

第二 补充相当数量的选择题。由于“高数”自考试题有40分的选择题,而教材选编的习题却没有选择题,这是一个缺憾。为了帮助考生适应考试,本书在每章习题中都精编了适当数量的选择题,这些选择题都具有一定的典型性和代表性;针对教材的某些章节有漏编习题的情况,本书也做了必要的补充和解答。大多数考生普遍感觉选择题难度大,不知如何下手,本书不仅给出答案,而且分析选与不选的原因,不厌其详,以攻克难点,突出考点,并帮助考生掌握分析和解决问题的技巧和方法。

第三 本书对近年来的自考试题提供了完全的解答,解题过程详细,并有解题思路的分析,对选择题还给出了选与不选的理由。

第四 本书每一章节前有教学重点和学习指导,提供了恰当的学习方法,对于考生学习和掌握基本知识,抓住重点和获得解题窍门有指导意义。

裴雪重教授在数学理论和应用领域有多项研究成果,多次荣膺国际奖项和应邀出国讲学,在国内、外学术界有重要影响。裴雪重教授多年来,一直从事高等教育自学考试的教学工作,多次编写

高等数学专用辅导教材,受到广泛的赞誉,积累了一整套行之有效的教学经验。他的讲课深入浅出,总是洋溢着不同凡响的睿智,体现着再创造的精神。他负责的教学班的及格率和高分率远远超出社会上的平均水平。北京市的“状元”考生多出自裴教授的教学班,因此,裴教授在自考界和广大考生中享有很高的威信。我们相信本书的出版发行会对广大考生学习《高等数学(一)》和顺利通过考试起到积极的推动作用。

本书由裴雪重教授担纲主编,参加编写工作的同志还有李丽华、刘建平、王强、赵君、杨忠、杨乐、陈德满、蒋艳、刘鸿林、覃兆蓉、张晋红、高启实、张静、何宇峰、冯震、刘奕欣、卢莹、陈雨、汤英、张彧、杨莉、薛世明、朱锐、刘媛媛。

高等教育自学考试专用辅导教材编委会
2001年9月

目 录

第一章 函数及其图形	(1)
教学重点及学习指导	(1)
习题解答	(1)
习题 1.1	(1)
习题 1.2	(6)
习题 1.3	(7)
习题 1.4	(18)
复习题	(19)
补充选择题及详解	(26)
第二章 极限与连续	(47)
教学重点及学习指导	(47)
习题解答	(49)
习题 2.1	(49)
习题 2.2	(54)
习题 2.3	(57)
习题 2.4	(62)
习题 2.5	(65)
习题 2.6	(70)
复习题	(73)
补充选择题及详解	(82)
第三章 导数与微分	(105)
教学重点及学习指导	(105)
习题解答	(106)

习题 3.1	(106)
习题 3.2	(109)
习题 3.3	(120)
习题 3.4	(125)
习题 3.5	(128)
复习题	(133)
补充选择题及详解	(143)
第四章 中值定理和导数的应用	(165)
教学重点及学习指导	(165)
习题解答	(167)
习题 4.1	(167)
习题 4.2	(173)
习题 4.3	(190)
习题 4.4	(200)
复习题	(204)
补充选择题及详解	(215)
第五章 积分	(241)
教学重点及学习指导	(241)
习题解答	(243)
习题 5.1	(243)
习题 5.2	(263)
习题 5.3	(279)
习题 5.4	(283)
复习题	(292)
补充选择题及详解	(307)
第六章 无穷级数	(356)
教学重点及学习指导	(356)
习题解答	(358)
习题 6.1	(358)

习题 6.2	(362)
习题 6.3	(368)
习题 6.4	(373)
复习题	(378)
补充选择题及详解	(387)
第七章 多元函数微积分	(406)
教学重点及学习指导	(406)
习题解答	(407)
习题 7.1	(407)
习题 7.2	(412)
习题 7.3	(418)
习题 7.4	(421)
习题 7.5	(432)
习题 7.6	(445)
复习题	(455)
补充选择题及详解	(463)
第八章 微分方程初步	(484)
教学重点及学习指导	(484)
习题解答	(487)
习题 8.1	(487)
习题 8.2	(490)
习题 8.3	(503)
习题 8.4	(508)
习题 8.5	(521)
复习题	(525)
补充选择题及详解	(540)
全国高等教育自学考试高等数学(一)历年试题详解及分析	(551)
1996 年(下)半年全国高等教育自学考试	
高等数学(一)(财)试卷	(551)

1997 年(上)半年全国高等教育自学考试	
高等数学(一)(财)试卷·····	(572)
1997 年(下)半年全国高等教育自学考试	
高等数学(一)(财)试卷·····	(591)
1998 年(上)半年全国高等教育自学考试	
高等数学(一)(财)试卷·····	(610)
1998 年(下)半年全国高等教育自学考试	
高等数学(一)(财)试卷·····	(628)
1999 年(上)半年全国高等教育自学考试	
高等数学(一)(财)试卷·····	(646)
1999 年(下)半年全国高等教育自学考试	
高等数学(一)(财)试卷·····	(664)
2000 年(上)半年全国高等教育自学考试	
高等数学(一)(财)试卷·····	(683)
2000 年(下)半年全国高等教育自学考试	
高等数学(一)(财)试卷·····	(704)
2001 年(上)半年全国高等教育自学考试	
高等数学(一)(财)试卷·····	(727)
附录一 初等数学基础·····	(747)
附录二 微积分概念公式和应用总结·····	(754)

第一章 函数及其图形

教学重点及学习指导

微积分研究的对象是函数,函数牵扯到绝大部分中学数学知识,如果考生学习的时间较紧,本章可以简略复习,最必要的内容有三点:

第一,函数的定义域和值域,集合是作为描述定义域的手段出现的,为了确定值域,常需求反函数,反函数的定义域即直接函数的值域.

第二,自变量与函数的对应关系.重点是初等函数和分段函数.

第三,函数的简单性质,包括增减性、奇偶性、有界性和周期性.

习题解答

习题 1.1

1. 用集合符号写出下列集合:

(1) 大于 30 的所有实数的集合;

(2) 圆 $x^2 + y^2 = 25$ 上所有的点组成的集合;

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 外部一切点的集合;

解

$$(1) A = \{x \mid x > 30, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(2) A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25, x, y \in \mathbf{R}\}$$

$$(3) A = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} > 1, x, y \in \mathbf{R}\}$$

注: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (x, y) 表示椭圆上的点

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ (x, y) 表示椭圆外的点

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ (x, y) 表示椭圆内的点

2. Δ 按下列要求举例:

(1) 一个有限集合;

(2) 一个无限集合;

(3) 一个空集;

(4) 一个集合是另一个集合的子集.

解

$$(1) A = \{x \mid 1 < x < 10, x \in \mathbf{N}\}$$

理由: 有限集是指集合中所包含的元素的个数只有有限个.

$$(2) A = \{x \mid 1 < x < 10, x \in \mathbf{R}\}$$

理由: 无限集是指集合中所包含的元素的个数是无限个.

$$(3) A = \{x \mid x < 1\} \cap \{x \mid x > 3\}$$

理由: 不含有任何元素的集合称为空集.

$$(4) \mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$$

理由: $\because$ 自然数集($\mathbf{N}$)中的任何一个元素都是整数集($\mathbf{Z}$)的元素, 因此 $\mathbf{N}$ 叫做 $\mathbf{Z}$ 的子集, 即 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

3. 下列集合中哪个是空集?

$$A = \{x \mid x + 5 = 5\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 5 = 0\}$$

$$C = \{x \mid x > 5 \text{ 且 } x < 5\}$$

解 B, C 为空集.

理由: $A = \{x \mid x + 5 = 5\} = \{0\}$

$$\begin{aligned} B &= \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 5 = 0\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbf{R}\} \cap \{x \mid x^2 + 5 = 0\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbf{R}\} \cap \{x \mid x \notin \mathbf{R}\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \{x \mid x > 5 \text{ 且 } x < 5\} \\ &= \{x \mid x > 5\} \cap \{x \mid x < 5\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

4. * 设 $A = \{a, b, c\}$, 下列式子中哪些是正确的?

- (1) $\emptyset \in A$; (2) $a \in \overline{A}$; (3) $\{a\} \subset A$; (4) $\emptyset \subset A$; (5) $A \subset A$;
(6) $b \in A$; (7) $b \subset A$

解 (3)、(4)、(5)、(6) 正确.

理由: (1) “ $\in$ ”表示某元素“属于”某集合, $\emptyset$ 为空集, 虽然不含任何元素但仍为集合, 故 $\emptyset \in A$ 属于表述错误.

(2) 据题意 a 为 A 的中元素, $a \in \overline{A}$ 表示“ a 不属于 A ”与题意矛盾.

(7) “ $\subset$ ”表示某集合“包含于”某集合, 为两个集合之间关系的表述方法, b 为元素, A 为集合, 故 $b \subset A$ 属于表述错误.

5. 如果 $A = \{x \mid 3 < x < 5, x \in \mathbf{R}\}$; $B = \{x \mid x > 4, x \in \mathbf{R}\}$, 求 (1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$.

解

$$(1) A \cup B = \{x \mid x > 3, x \in \mathbf{R}\}$$

理由:



阴影表示 $A \cup B$.

$$(2) A \cap B = \{x \mid 4 < x < 5, x \in \mathbf{R}\}$$

理由:



阴影表示 $A \cap B$.

6. 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{c, d\}$, 求 $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$, $A \cup A$, $A \cap B$, $A \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cap A$.

解 $A \cup B = \{a, b, c\}$

$$B \cup C = \{b, c, d\}$$

$$A \cup C = \{a, b, c, d\}$$

$$A \cup A = \{a, b\}$$

$$A \cap B = \{b\}$$

$$A \cap C = \emptyset$$

$$(A \cup B) \cap C = \{a, b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\}$$

$$A \cap A = A$$

7. Δ 试证: 若 $A \subset B$, $B \subset C$, 则 $A \subset C$.

证 $\because B \subset C$

$$\therefore B \cap C = B$$

又 $\because A \subset B$

$$\therefore A \cap B = A$$

$$\therefore A \cap (B \cap C) = A$$

$$\therefore A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B = A$$

$$\therefore A \cap C = A$$

$$\therefore A \subset C$$

8. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x| \leq 2$

(2) $|x - 5| \leq 1$

$$(3) |x - 1| < \epsilon (\epsilon > 0)$$

$$(4) |x| > 1$$

$$(5) |x + 2| \geq 3$$

解

$$(1) |x| \leq 2$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$x \in [-2, 2]$$

$$(2) |x - 5| \leq 1$$

$$-1 \leq x - 5 \leq 1$$

$$5 - 1 \leq x \leq 1 + 5$$

$$4 \leq x \leq 6$$

$$x \in [4, 6]$$

$$(3) |x - 1| < \epsilon (\epsilon > 0)$$

$$-\epsilon < x - 1 < \epsilon$$

$$1 - \epsilon < x < 1 + \epsilon$$

$$x \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$$

$$(4) |x| > 1$$

$$x > 1, x < -1$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$(5) |x + 2| \geq 3$$

$$x + 2 \geq 3, x + 2 \leq -3$$

$$x \geq 1, x \leq -5$$

$$x \in (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$$

9. 在数轴上画出满足下列条件的所有 x 的集合:

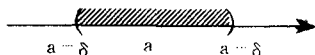
$$(1) |x - a| < \delta, a \text{ 为常数}, \delta > 0$$

$$(2) 1 < |x - 2| < 3$$

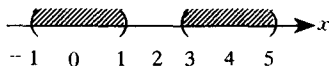
解

$$(1) -\delta < x - a < \delta$$

$$\{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$$



$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \begin{cases} |x - 2| > 1 \\ |x - 2| < 3 \end{cases} \\
 & \begin{cases} x - 2 > 1 \text{ 或 } x - 2 < -1 \\ -3 < x - 2 < 3 \end{cases} \\
 & \begin{cases} x > 3 \text{ 或 } x < 1 \\ -1 < x < 5 \end{cases} \\
 & 3 < x < 5 \text{ 或 } -1 < x < 1 \\
 \therefore & \{x \mid -1 < x < 1 \text{ 或 } 3 < x < 5\}
 \end{aligned}$$



习题 1.2

1. Δ 设 X 是所有同心圆的集合, Y 为实数集合, 若把同心圆与其直径建立对应关系, 试验证这种对应关系构成从 X 到 Y 的映射.

证

(1) 因为每一个同心圆都有直径, 且其直径必为实数, 所以集合 X 中的元素可以通过同心圆与其直径的关系与集合 Y 中某元素对应.

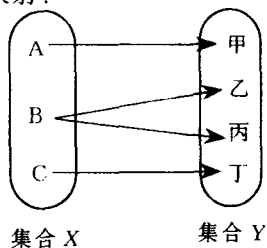
(2) 每个同心圆只有一个直径, 即依照同心圆与直径的关系, 对集合 X 中的每一个元素, 集合 Y 中只有一个元素与之对应.

因此, 证明了同心圆与其直径的关系构成从 X 到 Y 的映射.

2. 请判断下列对应关系是否构成映射:

设 X 集合由 A, B, C 三个工厂构成, Y 集合由甲、乙、丙、丁四

个商店构成, A、C 两个工厂产品分别由甲、丁两个商店销售, B 工厂产品由乙、丙两个商店共同销售, 若把生产产品的工厂和销售这些产品的商店之间建立对应关系(供销关系), 问这种对应关系是否构成从 X 到 Y 的映射?



解 否

理由: 如图所示若某种对应关系构成 X 到 Y 的映射, 这种对应关系必须满足: 对于第一个集合 X 的每一个元素, 第二个集合 Y 中与它对应的元素只有一个。

该题的对应关系不能满足这个条件故不能构成从 X 到 Y 的映射。

习题 1.3

1. 求下列函数值:

(1) 若 $f(x) = x \cdot 4^{x-2}$, 求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(t^2)$, $f(\frac{1}{t})$.

(2) 若 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 求 $\varphi(t^2)$, $[\varphi(t)]^2$.

解

(1) $f(2) = 2 \times 4^{2-2} = 2 \times 1 = 2$

$$f(-2) = (-2) \times 4^{(-2)-2} = \frac{-2}{4^4} = -\frac{1}{128}$$

$$f(t^2) = t^2 \cdot 4^{t^2-2} = t^2 \frac{4^{t^2}}{16} = \frac{t^2}{16} 4^{t^2}$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \cdot 4^{\frac{1}{t}-2} = \frac{1}{t} \times \frac{4^{\frac{1}{t}}}{16} = \frac{1}{16t} 4^{\frac{1}{t}}$$

$$(2) \varphi(t^2) = (t^2)^3 + 1 = t^6 + 1$$

$$[\varphi(t)]^2 = (t^3 + 1)^2 = t^6 + 2t^3 + 1$$

2. 求下列函数值:

$$(1) \text{ 若 } f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}, \text{ 求 } f(0), f(a), f(a+b).$$

$$(2) \text{ 若 } g(x) = \begin{cases} 2^x & -1 < x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}, \text{ 求 } g(3), g(2),$$

$$g(0), g(0.5), g(-0.5).$$

$$(3) \text{ 若 } \varphi(x) = \begin{cases} 3+x^4 & x \leq 0 \\ 2^x & x > 0 \end{cases}, \text{ 求 } \varphi(-2), \varphi(0), \varphi(2).$$

$$(4) \text{ 若 } \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}, \text{ 求 } \varphi(1), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

解

$$(1) f(0) = \frac{|0-2|}{0+1} = 2$$

$$f(a) = \frac{|a-2|}{a+1}$$

$$f(a+b) = \frac{|a+b-2|}{a+b+1}$$

$$(2) g(3) = 3-1 = 2$$

$$g(2) = 2-1 = 1$$

$$g(0) = 2$$

$$g(0.5) = 2$$

$$g(-0.5) = 2^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \varphi(-2) = 3 + (-2)^4 = 19$$

$$\varphi(0) = 3 + 0^4 = 3$$

$$\varphi(2) = 2^2 = 4$$