黎曼几何学

正交标架法

E. 嘉当

科学出版社

黎曼几何学

正交标架法

E. 嘉 当 著

姜立夫 潘孝瑞 黄树棠 何少輝 楊 淦 周作領 譯

科 学 出 版 社

1 9 6 4

E. Cartan
РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ
В ОРТОГОНАЛЬНОМ РЕПЕРЕ
Перевод и редакция С. П. Фиников
Издательство Московского Университета
1960

內容簡介

本书原是 E. Cartan 于 1926—1927 年在巴黎大学的講稿，經 С. П. 菲尼可夫俄譯整理，于 1960 年出版．和它的前身法文第一版(1928)比較，增改甚多；和法文第二版(1946)比較，則又有所删节．內容共分 29 章：引論 4 章；I. 欧几里得空間几何学 5 章；II. 黎曼空間論 5 章；III. 空間的曲率和挠率 4 章；IV. 測地綫理論 3 章；V. 流形的嵌入 4 章和 VI. 特种黎曼空間 4 章．作者着重介紹活动标架法与外微分法，在黎曼几何学的发展上，产生了巨大的影响．

黎曼几何学
正交标架法
E. 嘉当著
姜立夫等譯
*
科学出版社出版
北京朝阳門大街 117 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售
*
1964 年 11 月第一版　开本：850×1168 1/32
1964 年 11 月第一次印刷　印张：8 3/4
印数：0001—4,950　字数：224,000
統一书号：13031・2036
本社书号：3123・13—1
定价：［科六］1.30 元

俄文版序

E. Cartan 的名著“黎曼空間几何学教程”(1928)是根据著者1925—1926年在巴黎大学講課的講稿写成的. 这本书和传統的叙述出入不大. 著者主张着重黎曼空間的几何学，尽量避免过多的形式演算，不使繁复的符号模糊了有时是极为簡单的几何背景. 至于书中的数学基础，則仍然保持不变.

在1946年的法文第二版中，Cartan 引进了若干新的課題，但全书的結构并未改变. 这里应該提及 E. Cartan 这本书引人入胜的特点：它很生动地用現代方式引进流形的概念，特别是黎曼空間的概念.該书从整体几何的角度，熟練地考察了黎曼空間的局部欧氏几何，巧妙地利用密切欧氏空間，几乎不費气力便把曲綫的几何性質从欧氏空間轉入黎曼空間里去.

在1926—1927年講課时，E. Cartan 一开始便引入外微分的方法，一貫地采用正交标架.

Cartan 在課堂教学中力图教会他的听講者. 因此，他一开始便介紹这一新方法——外微分法，用它来解决欧氏几何学中一系列独特的問題.

考虑到巴黎大学的学生对所选的每一課程必須参加口試和笔試，而笔試就是要解决这一門課程中所提出的問題，Cartan 在講課中介紹了非欧几何学，闡述了关于測地綫的变分法問題，解决了許多关于流形几何的嵌入問題. 所有这些全被化成意想不到的簡单形式. 这些問題該书第一版和第二版中都未涉及.

这一切吸引了我，使我从事这本书的翻譯工作. 最初我只想为我的听講者翻譯书首关于外微分法的几章，后来竟把它全部翻譯出来付印，給以“黎曼几何学：正交标架法”的书名. Cartan 的活动标架法同样适用于斜交标架（或任何一般变换羣下的标架），

书中可找到这类例题. 要知道, 任何别的书中都找不到用正交标架来描写黎曼流形的理論.

我把上述作为本书的基本任务. 此外, 也乐于从第二版中引进一些課題, 主要是俄文版里所沒有的課題. 它們甚至在格調上也和原来的正文不同.

我所引以为憾的是我未能把它們全部都收入进去.

C. П. 菲尼可夫

目　　錄

I. 欧几里得空間几何学

II. 黎曼空間論

III. 空間的曲率和挠率

IV. 測地綫理論

V. 流形的嵌入

VI. 特种黎曼空間

引　論

第一章　活动标架法

1. 无穷小位移的分量

考虑通常的三維欧氏空間．在任意点 M 取一个右旋正交的三棱形．空間所有正交的三棱形的集合依賴于六个参数（三棱形頂点 O 的三个坐标和用来确定三棱形繞原点旋轉的三个欧拉角）:

$$u^1,\ u^2,\ \cdots,\ u^6.$$

要确定所选择的三棱形，可以用頂点 M 的輻矢 $\mathbf{M}=\overrightarrow{OM}$ 及三个互相垂直的单位軸矢量:

$$\mathbf{I}_1,\ \mathbf{I}_2,\ \mathbf{I}_3.$$

对于这个三棱形，我們給定与点 M 无穷逼近[1]的一点 M'，和附加于 M' 的另一个三棱形．这个新三棱形对于旧三棱形的位置，是由頂点的輻矢的改变量

$$\mathbf{M}'-\mathbf{M}=d\mathbf{M}$$

和三个单位的軸矢量的改变量来确定的；用撇号表示新的矢量，有

$$\mathbf{I}'_k-\mathbf{I}_k=d\mathbf{I}_k\quad(k=1,\ 2,\ 3),$$

并且把所得的矢量的微分改变量投影到旧三棱形的軸上，就得到新三棱形的无穷小（微分）位移:

$$\left.\begin{aligned}
d\mathbf{M}&=\omega^1\mathbf{I}_1+\omega^2\mathbf{I}_2+\omega^3\mathbf{I}_3,\\
d\mathbf{I}_1&=\omega_1^1\mathbf{I}_1+\omega_1^2\mathbf{I}_2+\omega_1^3\mathbf{I}_3,\\
d\mathbf{I}_2&=\omega_2^1\mathbf{I}_1+\omega_2^2\mathbf{I}_2+\omega_2^3\mathbf{I}_3,\\
d\mathbf{I}_3&=\omega_3^1\mathbf{I}_1+\omega_3^2\mathbf{I}_2+\omega_3^3\mathbf{I}_3,
\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

---

1) 用坐标 $u^1+du^1,\ \cdots,\ u^6+du^6$ 以示区别，即两种坐标之差为微分 $du^1,\ \cdots,\ du^6$.

或简写作

$$d\mathbf{M} = \omega^i \mathbf{I}_i,\ d\mathbf{I}_i = \omega_i^j \mathbf{I}_j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

式中所有的量 ω^i $(i = 1, 2, 3)$ 是微分矢量 $d\mathbf{M}$ 在旧軸上的投影．因此，它們是无穷小并且可用独立的微分变量 $du^\alpha(\alpha=1, 2,\cdots, 6)$ 綫性表示，亦即它們是綫性微分形式；数量 ω_i^j 也是如此：

$$\left.\begin{aligned} \omega^i &= \Gamma_\alpha^i\ du^\alpha, \\ \omega_i^j &= \Gamma_{i\alpha}^j\ du^\alpha, \end{aligned}\right\} \text{（对 } \alpha = 1, 2, \cdots, 6 \text{ 求和）}. \tag{1.2}$$

今后凡遇到二个相同的指标（一个在上一个在下），即表示对此指标求和．

2. 标准正交标架各形式間的关系

綫性形式 ω^i, ω_i^j 并非任意給定．首先，由于第一个和第二个标架的标准正交性（矢量 $\mathbf{I}_k$ 是互相垂直的单位矢量），它們必須适合某些关系．标准正交条件可用下式来表示：

$$\begin{aligned} &\mathbf{I}_1^2 = 1, \quad \mathbf{I}_2^2 = 1, \quad \mathbf{I}_3^2 = 1, \\ &\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 = 0, \quad \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 = 0, \quad \mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

微分以上等式，得

$$\mathbf{I}_i\, d\mathbf{I}_i = 0,\ \mathbf{I}_j\, d\mathbf{I}_i + \mathbf{I}_i\, d\mathbf{I}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

在此把方程(1.1)的微分的值代入并应用关系式(1.3)，就得

$$\omega_i^i = 0,\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i \neq j). \tag{1.4}$$

这样一来，就只剩下三个不同的形式 ω_i^j，它們是 ω_2^3, ω_3^1, ω_1^2. 这三个量可以称为三棱形旋轉的分量．

以后我們将看到，形式 ω^i, ω_i^j 还要满足某些微分关系式．

3. 确定已給三棱形族的分量

假設已知三棱形的运动，亦即已知輻矢 $\mathbf{M}$ 及单位軸矢量 $\mathbf{I}_i$ 的坐标，則三棱形的平移 ω^i 及旋轉 ω_i^j 易从方程(1.1)算出．

設給定矢量 $\mathbf{M}$ 及 $\mathbf{I}_i$ 的坐标：

$$\mathbf{M}(x, y, z),\ \mathbf{I}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i).$$

以矢量 $\mathbf{I}_1$ 与方程(1.1)中的第一式作数积，我們得到

$$\mathbf{I}_1\, d\mathbf{M} = \omega^1 \mathbf{I}_1\mathbf{I}_1 + \omega^2 \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 + \omega^3 \mathbf{I}_1\mathbf{I}_3,$$

或者借助于关系式(1.3)，得

$$\omega^1 = \mathbf{I}_1\, d\mathbf{M} \tag{1.5}$$

或

$$\omega^1 = \mathbf{I}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot d\mathbf{M}(dx, dy, dz),$$

或为矢量 $\mathbf{I}_1$ 与 $d\mathbf{M}$ 的坐标两两相乘，有

$$\omega^1 = \alpha_1\, dx + \beta_1\, dy + \gamma_1\, dz.$$

一般地

$$\omega^i = \alpha_i\, dx + \beta_i\, dy + \gamma_i\, dz. \tag{1.6}$$

同样

$$\omega_2^3 = \mathbf{I}_3\, d\mathbf{I}_2 = \alpha_3\, d\alpha_2 + \beta_3\, d\beta_2 + \gamma_3\, d\gamma_2 \tag{1.7}$$

及

$$\omega_i^j = \alpha_j\, d\alpha_i + \beta_j\, d\beta_i + \gamma_j\, d\gamma_i. \tag{1.8}$$

定理. 在任意选择六个参数 $u^\alpha(\alpha = 1, \cdots, 6)$ 的情形下，六个形式 ω^i, $\omega_i^j = -\omega_j^i$ 是綫性无关的.

要証明这个定理，只須注意不仅当 $du^\alpha(\alpha = 1, \cdots, 6)$ 为零时，微分 $d\mathbf{M}$, $d\mathbf{I}_i$ 都变成零矢，从而形式 ω^i, ω_i^j 亦都变为零；而且反过来，当六个形式 ω^i, ω_i^j 为零时，由于方程(1.1)，三棱形的微分 $d\mathbf{M}$, $d\mathbf{I}_i$ 都变成零，三棱形保持不动，而所有参数 u^α 都为常量.

4. 活动标架

附加于空間每一点 M 的三棱形可以是正交的(更精确地說，是具有单位軸矢量的标准正交三棱形)，也可以是任意斜交三棱形(非退化的)，其基本矢量的长及它們之間的角不一定相等，只須它們是綫性无关的矢量(即它們不在同一平面上).

更精确地說，与輻矢为 $\mathbf{M}$ 的每一点相联系的是任意三个矢量 $\mathbf{e}_i\,(i = 1, 2, 3)$，它們的混合积不为零，即

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \neq 0,$$

亦即对于一个固定的坐标系，这三个矢量的坐标所构成的行列式不为零.

由点 M 及三个矢量 $\mathbf{e}_i$（卽軸矢量长度不等的斜交坐标系）所构成的图形称为标架或活动标架. 矢量 $\mathbf{M}$, $\mathbf{e}_i$ 可看作是 12 个 $(3+3\times3=12)$ 任意参数 $u^\alpha(\alpha=1,\cdots,12$ 是对于一个固定笛氏坐标系的坐标数目)的函数. 这样,微分 $d\mathbf{M}$, $d\mathbf{e}_i$ 成为独立微分变量 du^α 的齐次綫性函数. 将矢量 $d\mathbf{M}$, $d\mathbf{e}_i$ 依我們的坐标系的三条軸，卽依三个綫性无关的矢量 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 来分解，卽得与方程組(1.1)类似的方程組:

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \omega^1\mathbf{e}_1+\omega^2\mathbf{e}_2+\omega^3\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_i &= \omega_i^1\mathbf{e}_1+\omega_i^2\mathbf{e}_2+\omega_i^3\mathbf{e}_3, \end{aligned}\tag{1.9}$$

其中 ω^i, ω_i^j 如同以前一样是独立微分变量 du^α 的綫性函数. 但此时公式(1.3)不成立,从而方程(1.4)也就不复存在.

5. 空間的綫素

我們引进記号

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=g_{ij}\quad(g_{ij}=g_{ji})\tag{1.10}$$

来表示基本矢量的数积. 根据数积的几何意义,数量 g_{ij} 等于矢量 $\mathbf{e}_i$,$\mathbf{e}_j$ 的模的乘积再乘以它們之間夹角的余弦. 此外,把方程(1.9)的第一式两端自乘,在左端得到的是空間綫素的平方

$$ds^2=(d\mathbf{M})^2.$$

右端写出多项式的平方并采用(1.10)的記号,則得

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\mathbf{e}_1)^2(\omega^1)^2+\cdots+2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\omega^1\omega^2+\cdots\\ &= g_{11}(\omega^1)^2+g_{22}(\omega^2)^2+g_{33}(\omega^3)^2+2g_{12}\omega^1\omega^2\\ &\quad+2g_{23}\omega^2\omega^3+2g_{31}\omega^3\omega^1. \end{aligned}\tag{1.11}$$

上式可簡写作

$$ds^2=g_{ij}\omega^i\omega^j.\tag{1.12}$$

这个公式和前面的一些公式在 n 維空間仍然正确，那时 i, j 取値 $1,2,\cdots,n$.

在公式 (1.12) 中有两对相同的指标 i 和 j, 每一对都独立取和. 取和时对于每两个不相等的数,例如 1 和 2, 就得到两项：一项对应于 $i=1$, $j=2$; 另一项对应于 $i=2$, $j=1$. 由于对称关