

黎曼几何学

正交标架法

E. 嘉 当

科 学 出 版 社

軌
黎 曼 几 何 学

正 交 标 架 法

E. 嘉 当 著

姜立夫 潘孝瑞 黃树棠 譯
何少輝 楊 淦 周作領

科 学 出 版 社

1 9 6 4

• 2

E. Cartan

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ В ОРТОГОНАЛЬНОМ РЕПЕРЕ

Перевод и редакция С. П. Финяков

Издательство Московского Университета

1960

內容簡介

本书原是 E. Cartan 于 1926—1927 年在巴黎大学的讲稿，經 С. П. 菲尼可夫俄譯整理，于 1960 年出版。和它的前身法文第一版(1928)比較，增改甚多；和法文第二版(1946)比較，則又有所删节。內容共分 29 章：引論 4 章；I. 欧几里得空間几何学 5 章；II. 黎曼空間論 5 章；III. 空間的曲率 and 挠率 4 章；IV. 測地綫理論 3 章；V. 流形的嵌入 4 章和 VI. 特种黎曼空間 4 章。作者着重介紹活动标架法与外微分法，在黎曼几何学的发展上，产生了巨大的影响。

黎 曼 几 何 学

正交标架法

E. 嘉 当 著

姜 立 夫 等 譯

*

科学出版社出版

北京朝阳門大街 117 号

北京市书刊出版业营业登记证出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1964 年 11 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1964 年 11 月第一次印刷 印张：8 3/4

印数：0001—4,950 字数：224,000

統一书号：13031·2036

本册书号：3123·13-1

定价：[科六] 1.30 元

俄文版序

E. Cartan 的名著“黎曼空間几何学教程”(1928)是根据著者 1925—1926 年在巴黎大学講課的講稿写成的。这本书和传统的叙述出入不大。著者主张着重黎曼空間的几何学,尽量避免过多的形式演算,不使繁复的符号模糊了有时是极为简单的几何背景。至于书中的数学基础,则仍然保持不变。

在 1946 年的法文第二版中, Cartan 引进了若干新的課題,但全书的结构并未改变。这里应该提及 E. Cartan 这本书引人入胜的特点:它很生动地用现代方式引进流形的概念,特别是黎曼空間的概念。該书从整体几何的角度,熟练地考察了黎曼空間的局部欧氏几何,巧妙地利用密切欧氏空間,几乎不費气力便把曲綫的几何性質从欧氏空間轉入黎曼空間里去。

在 1926—1927 年講課时, E. Cartan 一开始便引入外微分的方法,一貫地采用正交标架。

Cartan 在課堂教学中力图教会他的听講者。因此,他一开始便介紹这一新方法——外微分法,用它来解决欧氏几何学中一系列独特的問題。

考虑到巴黎大学的学生对所选的每一課程必須参加口試和笔試,而笔試就是要解决这一門課程中所提出的問題, Cartan 在講課中介绍了非欧几何学,闡述了关于測地綫的变分法問題,解决了許多关于流形几何的嵌入問題。所有这些全被化成意想不到的简单形式。这些問題該书第一版和第二版中都未涉及。

这一切吸引了我,使我从事这本书的翻譯工作。最初我只想为我的听講者翻譯书首关于外微分法的几章,后来竟把它全部翻譯出来付印,給以“黎曼几何学:正交标架法”的书名。Cartan 的活动标架法同样适用于斜交标架(或任何一般变换羣下的标架),

书中可找到这类例题。要知道，任何别的书中都找不到用正交标架来描写黎曼流形的理论。

我把上述作为本书的基本任务。此外，也乐于从第二版中引进一些课题，主要是俄文版里所没有的课题。它们在格调上也和原来的正文不同。

我所引以为憾的是我未能把它们全部都收入进去。

С. П. 菲尼可夫

目 錄

俄文版序	iii
------	-----

引 論

第一章 活动标架法	1
-----------	---

1. 无穷小位移的分量	1
2. 标准正交标架各形式間的关系	2
3. 确定已給三棱形族的分量	2
4. 活动标架	3
5. 空間的綫素	4
6. 逆变分量与协变分量	5
7. 标架的无穷小仿射变换	6

第二章 Pfaff 式理論	7
---------------	---

8. 給定方向的微分	7
9. Frobenius 的双一次协变式	8
10. 斜对称双一次式	11
11. 二次外形式	12
12. 逆定理. Cartan 引理	13
13. 外微分	16

第三章 全微分方程組的积分	17
---------------	----

14. 方程組的积分流形	17
15. 完全可积的必要条件	18
16. Pfaff 方程組完全可积的充要条件	19
17. 解对积分路綫的无关性	20
18. 完全可积方程組的积分問題簡化为 Cauchy 方程組的积分問題	22
19. 完全可积方程組的初积分	23
20. 外微分和 Stokes 公式之間的关系	24

21. 定向	25
第四章 推广	27
22. 任意次外形式的外微分	27
23. Poincaré 定理	28
24. Остроградский 公式	29
25. § 12 定理 1 的推广	30

I. 欧几里得空间几何学

第五章 给定无穷小分量 ω^i, ω_i 时标架流形的存在定理

26. 斜交三棱形的流形	32
27. 标准正交三棱形的流形	33
28. 具有已知綫素的斜交三棱形流形	34
29. 利用形式的不变性求組 (1) 的积分	35
30. 特殊情形	36
31. 三棱形空間	38

第六章 度量几何的基本定理

32. 点空間的不变形性	40
33. Weyl 定理的几何意义	40
34. 切面空間的变形	42
35. 平面作为直綫場的变形	45
36. 直綫空間	46

第七章 n 維欧氏空間的矢量分析

37. 保持綫素不变的空間变换	48
38. 化綫素为平方和与选取正交标架的等价性	50
39. 迭合与对称	52
40. 用已知形式 ω^i 确定形式 ω_i	52
41. 三維的情形	53
42. 绝对微分	55
43. 矢量的发散量	57
44. 微分参数	58

第八章 张量代数的基本原理

45. 张量的概念	61
-----------	----

46. 张量代数	63
47. 斜对称张量的几何意义	65
48. 二重矢量乘矢量与二重矢量乘二重矢量的数积	67
49. 刚体繞一点的簡單旋轉	68
第九章 张量分析	70
50. 绝对微分	70
51. 绝对微分法则	71
52. 张量的外微分形式	73
53. 绝对外微分的问题	74

II. 黎曼空間論

第十章 流形的概念	76
54. 流形的一般概念	76
55. 解析表示	77
56. 黎曼流形, 正定度量	78
第十一章 局部欧氏化的黎曼空間	79
57. 局部欧氏空間的定义	79
58. 例	79
59. 处处有正定度量的黎曼空間	81
60. 局部紧致空間	82
61. 全殺羣	82
62. 局部欧氏空間全殺羣的离散性	83
第十二章 切于一点的欧氏空間	85
63. 相切的欧氏度量	85
64. 切欧氏空間	86
65. 矢量分析的基本概念	88
66. 引进联络的三种方法	90
67. 密切于一点的欧氏度量	91
第十三章 密切欧氏空間	93
68. 黎曼空間的矢量的绝对微分	93
69. 黎曼空間的測地綫	94
70. Frenet 公式的推广, 曲綫的曲率和挠率	95

71. 黎曼空間的曲面的曲率理論.....	97
72. 測地撓率, Enneper 定理.....	98
73. 共軛方向.....	100
74. 三正交系的 Dupin 定理.....	100
第十四章 沿曲綫相配的欧氏空間.....	102
75. 黎曼空間沿曲綫在欧氏空間的展开.....	102
76. 所得的映象和相配的欧氏空間.....	103
77. 測地綫, 平行曲面.....	104
78. 曲面上的測地綫.....	106

III. 空間的曲率和撓率

第十五章 欧氏联络空間.....	107
79. 用已給的形式 ω^i 确定形式 ω^j	107
80. 綫素不变性的要求.....	109
81. 矢量等势公理.....	111
82. 欧氏联络空間.....	113
83. 相配的欧氏空間.....	114
84. 絕對外微分.....	114
85. 空間的撓率.....	116
86. 欧氏联络空間的結構方程.....	116
87. 附加于环路的平移和旋轉.....	117
88. Bianchi 恆等式.....	118
89. 曲率与撓率保持不变的定理.....	119

第十六章 空間的黎曼曲率.....	122
90. 黎曼空間的 Bianchi 恆等式.....	122
91. Riemann-Christoffel 張量.....	123
92. 黎曼曲率.....	125
93. $n = 2$ 的情形.....	126
94. $n = 3$ 的情形.....	128
95. 三維黎曼空間的曲率: 它的几何理論.....	128
96. Schur 定理.....	130
97. 常曲率黎曼空間的例.....	131
98. Riemann-Christoffel 張量决定于所有平面方向的黎曼曲率.....	132

99. n 維迷向空間	134
100. 沿两个不同的二維平面方向的曲率	135
101. 在任意維方向的黎曼曲率	135
102. Ricci 张量. Einstein 二次曲面	135
第十七章 常曲率空間	137
103. 曲率为同一常数的空間的迷合	137
104. 常曲率空間的存在性	139
105. Schur 的証明	140
106. 滿足方程組的解的构成	141
第十八章 常曲率空間的几何結構	145
107. 正常数曲率的空間	145
108. 在 n 維投影空間的映象	147
109. 双曲型空間	148
110. 双曲几何中的矢量表示	149
111. 黎曼空間的測地綫	149
112. 伪等势矢量. 伪平行性	151
113. 常曲率空間的測地綫	153
114. Cayley 的度量定义	155

IV. 測地綫理論

第十九章 关于測地綫的变分問題	156
115. 測地綫場	156
116. 在連結已知两点的曲綫族中測地綫弧长的逗留性	156
117. 測地綫弧长的第一变分	158
118. 測地綫弧长的第二变分	159
119. 測地綫弧长的最短性 (Darboux 的証明)	160
120. 和同一測地綫相交成常角的等长測地綫族	161
第二十章 在已給的測地綫附近測地綫的分布	165
121. 邻近的測地綫之間的距离与空間的曲率	165
122. 平行四边形的角和	167
123. 沒有外力时质点組运动的稳定性	168
124. 当 A_{ij} 为常数时, 測地綫弧长极大极小的研究	169

125. 对称矢量	170
126. 用对称来实现平行移动	172
127. 容许平行移动不变曲率的三维空间的确定	173

第二十一章 测地曲面 175

128. 在一点具测地性的曲面. Severi 的矢量平行移动法	175
129. 全测地曲面	176
130. 全测地曲面上的曲线在平面上的展开	177
131. Ricci 定理: 关于一族全测地曲面的正交曲线族	178

V. 流形的嵌入

第二十二章 黎曼空间的曲线 180

132. 黎曼空间的 Frenet 公式	180
133. 依已给曲率和挠率来确定曲线. 常曲率空间的零挠率曲线	181
134. 负常数曲率空间的零挠率常曲率曲线	184
135. 这些曲线的 Frenet 方程的积分	187
136. 相配的欧氏空间	189
137. 仅含二阶无穷小的项的黎曼空间曲率	191

第二十三章 三维空间的曲面 194

138. 第一组前二个结构方程与它们的几何意义	194
139. 第三个结构方程. 不变形式(寻常微分式与外微分式)	194
140. 曲面的第二个二次微分式	195
141. 渐近曲线. Euler 定理. 曲面的全曲率与中曲率	197
142. 共轭切线	198
143. 形式 ψ 的几何意义	199
144. 表面上的测地线. 测地挠率. Enneper 定理	200

第二十四章 Laguerre 形式与 Darboux 形式 203

145. Laguerre 形式	203
146. Darboux 形式	204
147. 体积空间的黎曼曲率	206
148. 第二组结构方程	207
149. 法曲率与测地挠率的古典定理的推广	208
150. 欧氏空间中具有给定线素的曲面	210

151. Laguerre 形式所提出的問題	211
152. 当矢量平行移动时法曲率的不变性	213
153. 常曲率空間的曲面	214
第二十五章 n 維黎曼空間的 p 維流形	219
154. 切矢量的絕對變分. 內微分. Euler 曲率	219
155. Euler 曲率的張量性質	220
156. 第二組結構方程	221
特殊情形: 四維空間的超曲面	222
157. 主方向与主曲率	222
158. 欧氏空間的超曲面	222
四維黎曼空間的二維曲面	223
159. 法曲率橢圓	223
160. 古典概念的推广	226
161. 最小曲面	227
162. 求最小曲面	228

VI. 特种黎曼空間

第二十六章 黎曼的正規坐标	231
163. 正規坐标的定义	231
164. 黎曼空間到欧氏空間的映射: 測地綫把映成直綫束	232
165. 建立帶有正規坐标的标架族	232
166. 基本方程組	233
167. 給定 Riemann-Christoffel 張量时綫素的唯一性	234
168. 解析的黎曼空間	235
169. 用正規坐标表达的基本度量形式的性質	235
170. 定理 2 (§ 169) 的証明	237
第二十七章 对称性与平行移动	239
171. 利用对称性的平行移动法	239
172. 作图准确性的阶	239
173. 黎曼曲率对于平行移动的不变性	241
174. Riemann-Christoffel 張量的微商張量为零的充要条件	242
第二十八章 对称黎曼空間	245

175. 对称黎曼空間的两个定义	245
176. 存在性定理	245
177. 对称空間的刚体运动	248
178. E. Cartan 的推移	249
179. 两个任意黎曼空間的拓扑积	249
180. 可約的与不可約的对称黎曼空間	250
181. 不可約对称空間的第二类常曲率	251
第二十九章 黎曼空間的刚性位移羣	253
182. 緒論	253
183. 正則性的一般要求	253
184. 可逆羣与不可逆羣. 軌迹流形	254
185. 适合于运动羣的标架	255
186. 刚性运动羣的不变式	255
187. 容許单纯可逆运动羣的黎曼空間	256
188. 单纯可逆的变换羣作为运动羣	257
189. 对应于已知变换羣的黎曼空間的构成	258
190. 結構常数. 結構方程	259
191. 羣空間	259
192. 单纯可逆羣的不变式的代換	260
193. 結構常数之間的关系	260
194. 容許单纯可逆刚性运动羣的黎曼空間的典型坐标	260
195. 用典型坐标来表达的羣的不变式	262
196. 典型坐标和正規坐标	263
197. 一般的不可逆运动羣	264
198. 标架的选择	264
199. 运动羣的探求	265
200. 測地綫和全測地流形	266
201. 不保持任何切向不变的不变子羣	266

引 論

第一章 活动标架法

1. 无穷小位移的分量

考虑通常的三維欧氏空間。在任意点 M 取一个右旋正交的三棱形。空間所有正交的三棱形的集合依赖于六个参数 (三棱形頂点 O 的三个坐标和用来确定三棱形繞原点旋轉的三个欧拉角):

$$u^1, u^2, \dots, u^6.$$

要确定所选择的三棱形, 可以用頂点 M 的輻矢 $\mathbf{M} = \overrightarrow{OM}$ 及三个互相垂直的單位軸矢量:

$$\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3.$$

对于这个三棱形, 我們給定与点 M 无穷逼近¹⁾ 的一点 M' , 和附加于 M' 的另一个三棱形。这个新三棱形对于旧三棱形的位置, 是由頂点的輻矢的改变量

$$\mathbf{M}' - \mathbf{M} = d\mathbf{M}$$

和三个單位的軸矢量的改变量来确定的; 用撇号表示新的矢量, 有

$$\mathbf{I}'_k - \mathbf{I}_k = d\mathbf{I}_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

并且把所得的矢量的微分改变量投影到旧三棱形的軸上, 就得到新三棱形的无穷小 (微分) 位移:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{M} &= \omega^1 \mathbf{I}_1 + \omega^2 \mathbf{I}_2 + \omega^3 \mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_1 &= \omega^1_1 \mathbf{I}_1 + \omega^2_1 \mathbf{I}_2 + \omega^3_1 \mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_2 &= \omega^1_2 \mathbf{I}_1 + \omega^2_2 \mathbf{I}_2 + \omega^3_2 \mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_3 &= \omega^1_3 \mathbf{I}_1 + \omega^2_3 \mathbf{I}_2 + \omega^3_3 \mathbf{I}_3, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

1) 用坐标 $u^i + du^i, \dots, u^6 + du^6$ 以示区别, 即两种坐标之差为微分 $du^1, \dots, du^6$.

或簡写作

$$d\mathbf{M} = \omega^i \mathbf{I}_i, \quad d\mathbf{I}_i = \omega_j^i \mathbf{I}_j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

式中所有的量 ω^i ($i = 1, 2, 3$) 是微分矢量 $d\mathbf{M}$ 在旧軸上的投影。因此,它們是无穷小并且可用独立的微分变量 du^α ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$) 綫性表示,亦即它們是綫性微分形式;数量 ω_i^j 也是如此:

$$\left. \begin{aligned} \omega^i &= \Gamma_\alpha^i du^\alpha, \\ \omega_i^j &= \Gamma_{i\alpha}^j du^\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (\text{对 } \alpha = 1, 2, \dots, 6 \text{ 求和}). \quad (1.2)$$

今后凡遇到二个相同的指标(一个在上一个在下),即表示对此指标求和。

2. 标准正交标架各形式間的关系

綫性形式 ω^i, ω_i^j 并非任意給定。首先,由于第一个和第二个标架的标准正交性(矢量 $\mathbf{I}_k$ 是互相垂直的单位矢量),它們必須适合某些关系。标准正交条件可用下式来表示:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1^2 &= 1, \quad \mathbf{I}_2^2 = 1, \quad \mathbf{I}_3^2 = 1, \\ \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 &= 0, \quad \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_3 = 0, \quad \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

微分以上等式,得

$$\mathbf{I}_i d\mathbf{I}_i = 0, \quad \mathbf{I}_j d\mathbf{I}_i + \mathbf{I}_i d\mathbf{I}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

在此把方程(1.1)的微分的值代入并应用关系式(1.3),就得

$$\omega_i^i = 0, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i \neq j). \quad (1.4)$$

这样一来,就只剩下三个不同的形式 ω_i^j , 它們是 $\omega_2^3, \omega_3^1, \omega_1^2$. 这三个量可以称为三棱形旋轉的分量。

以后我們將看到,形式 ω^i, ω_i^j 还要滿足某些微分关系式。

3. 确定已給三棱形族的分量

假設已知三棱形的运动,亦即已知輻矢 $\mathbf{M}$ 及单位軸矢量 $\mathbf{I}_i$ 的坐标,則三棱形的平移 ω^i 及旋轉 ω_i^j 易从方程(1.1)算出。

設給定矢量 $\mathbf{M}$ 及 $\mathbf{I}_i$ 的坐标:

$$\mathbf{M}(x, y, z), \quad \mathbf{I}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i).$$

以矢量 $\mathbf{I}_i$ 与方程(1.1)中的第一式作数积,我們得到

$$\mathbf{l}_1 d\mathbf{M} = \omega^1 \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_1 + \omega^2 \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 + \omega^3 \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_3,$$

或者借助于关系式(1.3), 得

$$\omega^1 = \mathbf{l}_1 d\mathbf{M} \quad (1.5)$$

或

$$\omega^1 = \mathbf{l}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot d\mathbf{M}(dx, dy, dz),$$

或为矢量 $\mathbf{l}_1$ 与 $d\mathbf{M}$ 的坐标两两相乘, 有

$$\omega^1 = \alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz.$$

一般地

$$\omega^i = \alpha_i dx + \beta_i dy + \gamma_i dz. \quad (1.6)$$

同样

$$\omega_2^3 = \mathbf{l}_3 d\mathbf{l}_2 = \alpha_3 d\alpha_2 + \beta_3 d\beta_2 + \gamma_3 d\gamma_2 \quad (1.7)$$

及

$$\omega_i^i = \alpha_i d\alpha_i + \beta_i d\beta_i + \gamma_i d\gamma_i. \quad (1.8)$$

定理. 在任意选择六个参数 $u^a (a = 1, \dots, 6)$ 的情形下, 六个形式 $\omega^i, \omega_i^j = -\omega_j^i$ 是线性无关的.

要证明这个定理, 只须注意不仅当 $du^a (a = 1, \dots, 6)$ 为零时, 微分 $d\mathbf{M}, d\mathbf{l}_i$ 都变成零矢, 从而形式 ω^i, ω_i^j 亦都变为零; 而且反过来, 当六个形式 ω^i, ω_i^j 为零时, 由于方程(1.1), 三棱形的微分 $d\mathbf{M}, d\mathbf{l}_i$ 都变成零, 三棱形保持不动, 而所有参数 u^a 都为常量.

4. 活动标架

附加于空间每一点 M 的三棱形可以是正交的(更精确地说, 是具有单位轴矢量的标准正交三棱形), 也可以是任意斜交三棱形(非退化的), 其基本矢量的长及它们之间的角不一定相等, 只须它们是线性无关的矢量(即它们不在同一平面上).

更精确地说, 与辐矢为 $\mathbf{M}$ 的每一点相联系的是任意三个矢量 $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$, 它们的混合积不为零, 即

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \neq 0,$$

亦即对于一个固定的坐标系, 这三个矢量的坐标所构成的行列式不为零.

由点 M 及三个矢量 $\mathbf{e}_i$ (即轴矢量长度不等的斜交坐标系) 所构成的图形称为**标架**或**活动标架**. 矢量 $\mathbf{M}$, $\mathbf{e}_i$ 可看作是 12 个 ($3 + 3 \times 3 = 12$) 任意参数 u^α ($\alpha = 1, \dots, 12$ 是对于一个固定笛氏坐标系的坐标数目) 的函数. 这样, 微分 $d\mathbf{M}$, $d\mathbf{e}_i$ 成为独立微分变量 du^α 的齐次线性函数. 将矢量 $d\mathbf{M}$, $d\mathbf{e}_i$ 依我们的坐标系的三条轴, 即依三个线性无关的矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 来分解, 即得与方程组(1.1)类似的方程组:

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_i &= \omega_i^1 \mathbf{e}_1 + \omega_i^2 \mathbf{e}_2 + \omega_i^3 \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (1.9)$$

其中 ω^i, ω_i^j 如同以前一样是独立微分变量 du^α 的线性函数. 但此时公式(1.3)不成立, 从而方程(1.4)也就不复存在.

5. 空间的线素

我们引进记号

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g_{ij} \quad (g_{ij} = g_{ji}) \quad (1.10)$$

来表示基本矢量的数积. 根据数积的几何意义, 数量 g_{ij} 等于矢量 $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ 的模的乘积再乘以它们之间夹角的余弦. 此外, 把方程(1.9)的第一式两端自乘, 在左端得到的是空间线素的平方

$$ds^2 = (d\mathbf{M})^2.$$

右端写出多项式的平方并采用(1.10)的记号, 则得

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\mathbf{e}_1)^2 (\omega^1)^2 + \dots + 2\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \omega^1 \omega^2 + \dots \\ &= g_{11} (\omega^1)^2 + g_{22} (\omega^2)^2 + g_{33} (\omega^3)^2 + 2g_{12} \omega^1 \omega^2 \\ &\quad + 2g_{23} \omega^2 \omega^3 + 2g_{31} \omega^3 \omega^1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

上式可简写作

$$ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j. \quad (1.12)$$

这个公式和前面的一些公式在 n 维空间仍然正确, 那时 i, j 取值 $1, 2, \dots, n$.

在公式(1.12)中有两对相同的指标 i 和 j , 每一对都独立取和. 取和时对于每两个不相等的数, 例如 1 和 2, 就得到两项: 一项对应于 $i = 1, j = 2$; 另一项对应于 $i = 2, j = 1$. 由于对称关