大连理工大学教授学术丛书

广义M-J集的分形机理

Fractal Mechanism of the Generalized M-J set

王兴元 著

DUTP

大连理工大学出版社 Dalian University of Technology Press

大连理工大学教授学术丛书

广义 M-J 集的分形机理

王兴元 著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

广义M-J集的分形机理/王兴元著.—大连:大连理工大学出版社,2002.5
大连理工大学教授学术丛书
ISBN 7-5611-2043-5

Ⅰ.广… Ⅱ.王… Ⅲ.分形理论 Ⅳ.O189.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第025110号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河　邮政编码　116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL:http://www.dutp.com.cn
大连海事大学印刷厂印刷

开本:850毫米×1168毫米　1/32　字数:212千字　印张:8.875　插页:5
印数:1—3000册
2002年5月第1版　2002年5月第1次印刷

责任编辑:刘新彦　责任校对:郑淑芹
封面设计:孙宝福

定价:25.00元

The Professors Academic Works Series
of the Dalian University of Technology

Fractal Mechanism of the Generalized M-J Set

Wang Xingyuan

Dalian University of Technology Press

本书由

大 连 市 人 民 政 府
大连理工大学学术著作出版基金 资助出版

The published book is sponsored by

The Dalian Municipal Government
and
The Publishing Academic Works Foundation of the Dalian University of Technology

前　言

Mandelbrot锐意创新，经过多年的冥思苦索、博览群典的艰辛努力，于1975年，发表了他的划时代的专著“分形：形状、机遇和维数”。在此专著中，第一次系统地阐述了分形几何的思想、内容、意义和方法。此专著的发表标志着分形几何作为一个独立的学科正式诞生，从而把分形理论推进到一个迅猛发展的阶段。

分形理论的创立激起了科学界的极大热情，经过20多年的开拓与发展，分形研究在当前形成了一股热潮。分形的研究跨越了各学科，涉及到各个科学技术领域。分形理论为科学地研究具有随机形态特征及无穷细节的自然现象，提供了一种全新的数学工具。分形研究的目的是揭露、了解隐藏得很深的自然界混乱无规结构中的规律性及其物理本质，并进而支配它们。但这个目的还远未达到。因此，已经有越来越多的学者投身于这一新学科的理论及其在各门具体学科中的应用研究。传播和普及分形学的基本概念、基本理论及应用研究成果是一项非常有意义的工作。

随着分形的发展，分形发生学理论体系的建立已直接影响到分形实质性的、深入的研究，成为分形研究的焦点。分形发生学主要对分形中具有重要地位的M-J集和IFS吸引子的生成机理进行研究，探索M-J集和IFS吸引子发展、演化的规律，用动力系统的观点对M-J集和IFS吸引子的复杂性进行刻画。为此，笔者在近年从事M-J集分形结构研究工作的基础上，参阅国内外有关文献

资料，并结合笔者近年来的一些研究成果，经过反复修改而写成本书。本书介绍了广义 M-J 集和 IFS 吸引子计算机构造的基本原理，借助复变函数理论和计算机制图相结合的实验数学的方法，研究了广义 M-J 集和 IFS 吸引子的结构特征，是一本从事分形应用的科技工作者和对分形理论有兴趣的研究人员的实用读物。由于笔者水平有限，错误与不当之处，恭请专家、同行与读者不吝指教与批评。

在本书即将付梓之际，感谢大连理工大学殷福亮教授和郭成安教授对本书的评审与推荐。感谢我的导师——东北大学朱伟勇教授多年来给予我的指导与教诲。

本书的研究工作得到了中国博士后科学基金及辽宁省自然科学基金(972194)的支持，本书的出版得到大连市优秀专著出版基金和大连理工大学研究生院的支持，兹此表示由衷的感谢。

最后，我非常感谢我的妻子张月竹女士给予我精神上的支持和鼓励。

王兴元

2002 年 4 月于大连理工大学

目　录

第一章　绪论 ·· 1
1.1　分形理论的产生与发展 ································ 1
1.2　分形理论对现代科学的作用和影响 ························ 5
1.3　分形几何的研究工具与研究方法 ·························· 8
1.4　分形研究的现状与展望 ································ 10
1.5　本书研究的基本特征 ·································· 16
第二章　分形的基本理论 ································ 25
2.1　分形 ·· 25
2.2　构造分形图的逃逸时间算法 ···························· 38
2.3　Julia 集 ··· 39
2.4　Mandelbrot 集 ······································ 41
2.5　分形与混沌的关系 ···································· 43
第三章　IFS 理论与分形图像压缩 ························ 51
3.1　IFS 理论 ··· 51
3.2　分形图像压缩 ······································· 58
第四章　IFS 吸引子 ···································· 75
4.1　IFS 吸引子的计算机模拟 ······························ 75
4.2　IFS 吸引子的界与其动力学特征的定量观测 ················ 85

4.3　一类 NIFS 吸引子 …… 107

第五章　广义 M-J 集嵌套拓扑分布定理 …… 121

5.1　复映射 $z \leftarrow z^{\alpha} + c(\alpha \in \mathbf{R})$的广义 J 集 …… 121

5.2　复映射 $z \leftarrow z^{\alpha} + c(\alpha \in \mathbf{R})$的广义 M 集 …… 137

第六章　广义 M-J 集非边界区域的分形结构 …… 160

6.1　方法 …… 160

6.2　广义 J 集非边界区域分形结构 …… 165

6.3　广义 M 集非边界区域的分形结构 …… 190

6.4　结论 …… 213

第七章　开关广义 M-J 集 …… 214

7.1　理论与方法 …… 214

7.2　开关广义 J 集 …… 216

7.3　开关广义 M 集 …… 227

7.4　广义 M-J 混合集 …… 236

7.5　结论 …… 242

第八章　一类复映射系的广义 M-J 集 …… 243

8.1　一类复映射系的广义 J 集 …… 243

8.2　一类复映射系的广义 M 集 …… 253

8.3　结论 …… 261

参考文献 …… 262

Contents

Chapter 1 Introduction ········· 1

1.1 Emergence and Development of Fractal Theory ········· 1

1.2 Effecting and Influencing of Fractal Theory to Modern Science ········· 5

1.3 Research Tool and Method of Fractal Geometry ········· 8

1.4 Some Present Conditions and Prospects of Fractal Research ········· 10

1.5 Basic Characteristics of the Research in this Book ········· 16

Chapter 2 Basic Theory of Fractal ········· 25

2.1 Fractal ········· 25

2.2 Escaping-time Technology Constructing Fractal Images ········· 38

2.3 Julia Set ········· 39

2.4 Mandelbrot Set ········· 41

2.5 Relation Between Fractal and Chaos ········· 43

Chapter 3 Fractal Theory and Fractal Image Compression ········· 51

3.1 Iterated Function System Theory ········· 51

3.2 Fractal Image Compression ········ 58

Chapter 4 Iterated Function System Attractors ········ 75

4.1 Computer Simulation of Iterated Function System Attractors ········ 75

4.2 Quantitative Observation of the Boundary and Dynamic Characteristics of Iterated Function System Attractors ········ 85

4.3 Some Nonlinear Iterated Function System Attractors ········ 107

Chapter 5 Overlapping Embedment Topology Distribution Theorem of the Generalized Mandelbrot-Julia Sets ········ 121

5.1 Generalized Julia Set from the Complex Mapping $z \leftarrow z^{\alpha} + c(\alpha \in \mathbf{R})$ ········ 121

5.2 Generalized Mandelbrot Set from the Complex Mapping $z \leftarrow z^{\alpha} + c(\alpha \in \mathbf{R})$ ········ 137

Chapter 6 Fractal Structures of the Non-boundary Region of the Generalized Mandelbrot-Julia Sets ········ 160

6.1 Method ········ 160

6.2 Fractal Structures of the Non-boundary Region of the Generalized Julia Sets ········ 165

6.3 Fractal Structures of the Non-boundary Region of the Generalized Mandelbrot Sets ········ 190

6.4 Conclusion ········ 213

Chapter 7 Switched Processes Generalized Mandelbrot-Julia Sets ········ 214

7.1 Theory and Method ········ 214

7.2 Switched Processes Generalized Julia Sets ······ 216
7.3 Switched Processes Generalized Mandelbrot Sets ······ 227
7.4 Switched Processes Generalized Mandelbrot-Julia Combination Sets ······ 236
7.5 Conclusion ······ 242
Chapter 8 Generalized Mandelbrot-Julia Sets From a Class of Complex Mapping System ······ 243
8.1 Generalized Julia Sets from a Class of Complex Mapping System ······ 243
8.2 Generalized Mandelbrot Sets from a Class of Complex Mapping System ······ 253
8.3 Conclusion ······ 261
References ······ 262

第1章　绪　　论

1.1　分形理论的产生与发展

非线性混沌与分形理论的基本思想起源于20世纪初，发生于20世纪60年代末，发展壮大于20世纪80年代后。这一理论揭示了有序与无序的统一、确定性与随机性的统一，被认为是继相对论、量子力学之后，20世纪人类认识世界和改造世界的最富有创造性的科学领域的第三次大革命。

分形理论是非线性科学研究中十分活跃的一个分支，它的研究对象是自然界和非线性系统中出现的不光滑和不规则的几何形体。分形理论的数学基础是分形几何学。

分形理论的发展大致可分为三个阶段。下面简要回顾一下分形理论在这三个历史阶段的发展过程[1,2]。

第一阶段为1875年至1925年，在此阶段，人们已认识到几类典型的分形集，并力图对这类集合与经典几何的差别进行描述、分类和刻画。1872年，Weierstrass证明了一种连续函数在任意一点均不具有有限或无限导数。这一结果在当时曾引起了极大的震动，但人们认为Weierstrass给出的函数是极为“病态”的例子。同年，Cantor引入了一类全不连通的紧集——康托尔三分集。1904年，V. Koch通过初等方法构造了如今被称为Koch曲线的处处不可微的连续曲线。特别重要的是，该曲线是第一个人为构造的具有局部与整体相似的结构的例子，它被称为自相似结构。之后，

Peano 又构造出填充平面的曲线，这导致了后来拓扑维数的引入。在当时，人们认为这类集合在传统的研究中是可以忽略的。但进一步的研究结果表明，这类集合在像三角级数的惟一性这样的重要问题的研究中不仅不能忽略，而且起着非常重要的作用。

一类极为典型的随机分形集，即布朗运动，在那时已经受到物理学家的重视。1913 年，Perrin 对布朗运动的轨迹进行了深入的研究，明确指出布朗运动作为运动曲线不具有导数。为此，Wiener 建立了布朗运动的概率模型。

为了测量上述这些集合，同时为了更一般的理论，Hausdorff (豪斯道夫)于 1919 年引入了 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数。这些概念实际上指出了为了测量一个几何对象，必须依赖测量方式以及测量所采取的尺度。

总之，在分形理论发展的第一阶段，人们已经提出了典型的分形对象及其相关问题，并为讨论这些问题提供了最基本的工具。

第二阶段大致为 1926 年到 1975 年，在这半个世纪里，人们实际上对分形集的性质做了深入研究，特别是维数理论的研究已获得了丰富的成果，而且将研究范围扩大到数学的许多分支中。这其中，Besicovitch 及其他学者研究了分形集的局部性质和结构等，他们的研究结果极大地丰富了分形几何理论。同时，Kolmogorov 等人对分形集的维数的研究，使维数理论得到了进一步发展并日臻成熟。

尽管在此阶段分形的研究取得了许多重要的结果，并使这一学科在理论上初见雏形，但是绝大部分工作局限于纯数学理论的研究，而未与其他学科发生联系。另一方面，物理、地质、天文学和工程学等等学科已产生了大量与分形几何有关的问题，迫切需要新的思想与有力的工具来处理。正是在这种形势下，Mandelbrot 以其独特的思想，自 20 世纪 60 年代以来，系统、深入、创造性地研究

了海岸线的结构、具有强噪声干扰的电子通讯、月球的表面、银河系中星体的分布、地貌的生成的几何性质等等自然界中典型的分形现象,并取得了一系列令人瞩目的成果。通过研究,Mandelbrot深刻地意识到,传统数学中被认为是“病态的”、“反常的”的“魔鬼集”,其实是大自然中具有“粗糙和自相似”形态的事物的非常合适的数学模型。因此,Mandelbrot 把具有“粗糙和自相似”特点的各种不规则图形、函数或点集称为分形,并且找到了描述它们的数学模型[1]。这标志着分形思想已经产生,说明有必要建立一门以分形为研究对象的新的几何学。

第三阶段大致为 1975 年至今,是分形几何在各个领域的应用取得全面发展,并形成独立学科的阶段。Mandelbrot 涉猎众多学科,加上他善于把各学科联系起来,从具体的、个别问题中发现抽象的、一般的共性,最终产生分形思想。1975 年,Mandelbrot 将前人的结果进行总结,集其大成,以“分形:形状、机遇和维数”为名发表了他的划时代的专著。在此专著中,第一次系统地阐述了分形几何的思想、内容、意义和方法。此专著的发表标志分形几何作为一个独立的学科正式诞生,从而把分形理论推进到一个更为迅猛发展的阶段。

自 1975 年以来,分形理论无论是在数学基础还是在应用方面都有快速发展。由于分形几何极强的应用性,它在物理的相变理论,材料的结构与控制,力学中的断裂与破坏,高分子链的聚合,模式识别,自然图形的模拟,酶的生长等领域取得令人瞩目的成就。由于应用学科和计算机制图的刺激与推动,分形的数学理论也得以迅速发展,并且目的更明确,思想更深入。近年来,在维数的估计与算法,分形集的生成结构,分形的随机理论,动力系统的吸引子理论与分形的局部结构方面已获得较深入的结果,其势方兴未艾。在此期间,国际上分形研究也异常活跃,有关专著纷纷问世,

物理、化学、数学及生物学中的分形论文逐年增加。1991 年英国培格曼出版社推出了《混沌、孤子和分形》的国际刊物，1993 年初新加坡世界科学出版社推出了《分形——关于大自然复杂几何的交叉科学》杂志；同时，国际专题会议此起彼伏，特别是在 20 世纪 80 年代中期，令人感到了雷霆万钧之势，“自然科学中的分形——大自然中复杂几何学的国际学术讨论会”于 1993 年 8 月 30 日至 9 月 2 日在匈牙利布达佩斯召开。为此，有人曾经指出：“19 世纪后半叶似乎是科学与数学变得更加专门化的时期。令人瞩目的是，在近 10 年中，非线性动力学与分形使上述趋势得以逆转：两者均已被应用到对一系列深层次的交叉学科的研究中。”在国内，分形研究起步较晚，但进展较快。1989 年 7 月在四川大学召开了“第一届全国分形理论及应用学术讨论会”，1991 年 11 月在华中理工大学召开了第二届会议，第三届会议于 1993 年 10 月在中国科学技术大学召开。拟定每两年召开一次。

今天，混沌分形理论已经与计算机科学理论等领域相结合，这种结合使人们对久悬未解的基本难题的研究取得突破性进展，在探索、描述及研究客观世界的复杂性方面发挥了巨大作用[3~9]。其作用涉及到几乎整个自然科学和社会科学。混沌分形已被认为是研究非线性复杂问题最好的一种语言和工具。并受到各国政府及学者的重视和公认，成为举世瞩目的学术热点。1998 年研究几何与混沌的麦克·马伦获菲尔兹奖，再一次证明了研究混沌分形理论在科学研究中的地位。我国“国家攀登计划”中有关非线性科学、纳米材料科学、生命科学等项目中，就列举了有关混沌分形理论的五个专题。“国家自然科学基金”中也列出混沌分形理论及其应用的内容，并指出这是一项具有跨学科前沿交叉性特点的基础性和应用基础性的研究，具有广阔的应用前景。

分形是人们在自然界和社会实践活动中所遇到的不规则事物

的一种数学抽象。人们对于分形的兴趣是由于可以用它来描述和解决一些实际问题,正如历史上人们对于欧氏几何与微积分的应用一样,这种描述和应用允许在一定尺度下的近似性。同样,在利用分形描述海岸线、云层的边界、地表的形状、岩石的裂缝、流体的湍流以及一些经济现象时,也具有一定意义下的近似性。实际上,现实世界中没有真正的分形,正如 Mandelbrot 所强调的那样,自然界的分形与数学中讨论的分形是有区别的。

分形理论的发展是迅猛的,分形的思想和方法正日益影响着现代社会的生活和活动,随着分形的广泛应用,一些新的数学方法和数学工具被不断提出,所有这些都显示了分形理论的强大生命力。

1.2　分形理论对现代科学的作用和影响

分形几何是现代数学的一个重要分支,是当代非线性科学中的一个活跃领域,特别是关于混沌运动的几何语言。由于世界的本质是非线性的,而混沌现象又是随处可见,因此分形几何的应用领域是非常广泛的[3~6]。分形几何把人们引入了对现实世界不规则几何体的探索,如蜿蜒曲折的海岸线、美丽的雪花冰晶,它们无论怎样放大来看,都如同原来那样复杂(自相似),必须用分维数去度量,这样就意味着完全否定了分形的平滑程度,分形是处处不可微的。而数学作为专门研究量与形的变化规律的独立学科,其微积分和级数的概念均是基于局部性、光滑和线性化的。此时传统数学的解析方法已几乎无能为力,而实验数学则开创了非线性科学研究的新途径[10,11]。

分形几何中的结构自相似概念,在信息论、控制论和系统论的巨大冲击之下,迅速发展到形态、功能、信息、时间等方面,升华为