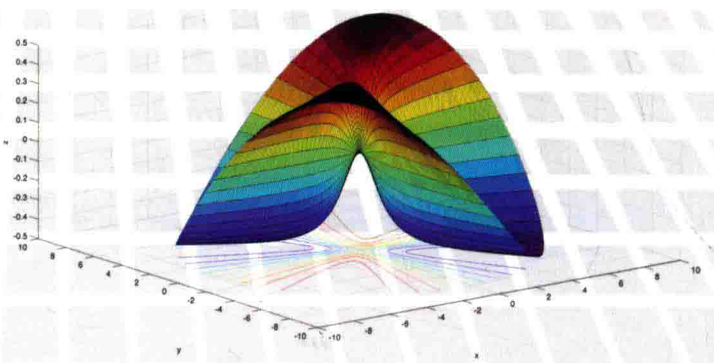
普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

申玉发　陈佐利　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校"十二五"规划教材

高等数学

主　编　申玉发　陈佐利
副主编　吕金凤　毛学志　王国胜
参　编　刘建平　郭雅彩　王　莹
　　　　马会泉　崔　瑜
主　审　刘继发　李丽华

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书内容包括函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学及其应用、二重积分及其应用、微分方程与差分方程简介、无穷级数、数学建模初步。对其中部分内容添加“※”号，以适应不同专业选用和分层教学的需要。为便于学生查阅和课后练习，书后附有部分初等数学公式、极坐标系及几种常用曲线、积分表、习题参考答案与提示。

本书以 80～90 教学时数为宜，适合作为普通高等学校理工、农林、经济、管理等专业的教材，也可作为专科层次或自考、成人继续教育教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/申玉发，陈佐利主编．—北京：中国铁道出版社，2014.8

普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-19092-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①申…②陈… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 187089 号

书　　名：高等数学

作　　者：申玉发　陈佐利　主编

策　　划：马洪霞　　**读者热线**：400-668-0820

责任编辑：马洪霞　何　佳

封面设计：付　巍

封面制作：白　雪

责任校对：汤淑梅

责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街 8 号）

网　　址：http://www.51eds.com

印　　刷：三河市宏盛印务有限公司

版　　次：2014 年 8 月第 1 版　　2014 年 8 月第 1 次印刷

开　　本：787 mm×1092 mm　1/16　**印张**：19　**字数**：456 千

书　　号：ISBN 978-7-113-19092-7

定　　价：33.00 元

前　　言

高等数学是普通高等院校理工、农林、经济、管理等专业的重要基础课程。作为其核心内容的微积分学，对于培养学生用运动和变化的观点思考问题、分析问题的意识和能力起着至关重要的作用，理解和掌握高等数学的知识也是学生未来发展和从事实际工作的必备基础。

本教材根据高等院校理工、农林、经济、管理等专业的教学基本要求，参考硕士研究生统一入学考试对高等数学Ⅱ和高等数学Ⅲ的要求，集编者多年从事高等数学教学实践经验和体会编写，其特点是：

1. 在保证逻辑严谨的前提下，淡化理论上的严密论证和比较繁杂的数学公式，尽可能地在介绍定义、定理证明和运算性质时，使内容简化、叙述简洁（某些定理的证明用不同字体编排，可作为选修内容），着重介绍高等数学中的基本概念、基本思想和基本方法。

2. 尽可能通过实例分析引入概念和定义，通过实例总结规律，并具体领会运用这些规律解决实际问题的方式和方法，适当引入高等数学知识在具体学科方面的应用实例，力求体现高等数学是解决一些实际问题时不可或缺的辅助工具，而不是纯理论的课程，这样才更加贴近学生学习数学的本意。

3. 注重知识的前后联系和系统性，适当处理知识片段的衔接与融合。如，我们优化了传统教材关于函数的极限与连续及相关内容的讲授次序，使之更适合"函数连续的概念依极限的概念建立，而初等函数的连续性又是最常用的求极限方法"的特点，等等。

4. 在每节后配置适量难易适度的习题，以巩固本节所学知识的同时为后续内容的学习打下基础。在每章后设置本章的总习题，分为A、B两个组别，A组是本章及前期知识的适度综合习题；B组是知识拓展习题（包括近几年的考研真题），供学有余力的学生进一步强化提高使用。

本教材适合作为普通高等学校理工、农林、经济、管理等专业的教材和教学参考书，也可作为高职高专各专业教材。讲授本教材全部基本内容需要80～90学时，教材中带"※"的内容可根据教学对象的专业不同和教学实际适当取舍。

本书由申玉发、陈佐利主编，吕金凤、毛学志、王国胜任副主编，其中第三、四章和附录由申玉发和马会泉编写，第一、二章由陈佐利和王莹编写，第八、十章由吕金凤和郭雅彩编写，第六、九章由毛学志和刘建平编写，第五、七章由王国胜和崔瑜编写。全书由申玉发和陈佐利统稿，刘继发和李丽华审阅了本教材的全部书稿。在编写过程中，得到了中国铁道出版社的热情帮助，编者表示衷心感谢！

限于编者的水平，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2014年4月

目　录

第一章　函数的极限与连续

第二章　导数与微分

第一章　函数的极限与连续

函数作为变量之间的相互依存关系的数学抽象是微积分学研究的对象. 研究函数的基本方法是极限方法,而且极限理论及其思想方法贯穿于微积分学的整个过程. 因此,理解和掌握极限的思想方法和运算方法是学好微积分的基础. 本章主要介绍:函数的概念和性质;数列极限和函数极限的定义与运算法则;无穷小与无穷大的定义、性质及其阶的比较;两个重要极限;连续函数的定义及性质等内容.

第一节　函　　数

一、函数的概念

为了研究方便,以下用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合,$\mathbf{N}$ 表示自然数集合,$\mathbf{N}^+$ 表示正整数集合,$\mathbf{R}$ 表示实数集合,$\varnothing$ 表示空集. 有特殊说明的除外.

定义 1　设 D 是一个非空数集,x 和 y 是同一变化过程中的两个变量,对于任意的 $x\in D$,按照一定法则 f,变量 $y(\in \mathbf{R})$ 有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,或称 f 为定义在 D 上的一个**函数关系**,记作 $y=f(x),x\in D$. 其中数集 D 叫做函数的**定义域**,定义域也记为 $D(f)$,x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**.

当自变量 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 相对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍数集 D 的每个数值时,对应的函数值的全体组成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**,记作 $R(f)$.

在数学中通常用小写或大写的拉丁字母 $f,g,h,\cdots,F,G,\cdots$ 和小写或大写的希腊字母 φ, $\phi,\cdots,\Phi,\Psi,\cdots$ 作为表示函数的记号.

在函数的定义中,对于每个 $x\in D$ 对应的函数值是唯一的(因此,也称为**单值函数**,否则称为**多值函数**. 今后如无特别说明,函数均指单值函数). 而对每个 $y\in R(f)$,相对应的自变量 x 不一定唯一.

例如,函数 $y=x^2$,定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $R(f)=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\geqslant 0\}$. 对于每个函数值 $y\in R(f)$,当 $y\neq 0$ 时,对应的自变量 x 有两个,即 $x=\pm\sqrt{y}$.

在函数的概念中应注意以下几点:

(1)构成函数的两个要素:定义域和对应法则. 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则,则它们是相同的函数. 例如,$y=\sin x$ 与 $y=\dfrac{x\sin x}{x}$;$y=x$ 与 $y=|x|$ 都不是相同函数. 前者定义域不同,后者对应法则不同,而 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是相同函数.

(2)严格地说,f 和 $f(x)$ 的含义是不同的,f 表示从自变量 x 到因变量 y 的对应法则,而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值,只是为了叙述方便,常常用 $f(x)(x\in D)$ 来表示函数.

(3)关于函数的定义域的确定:在实际问题中,函数的定义域由其变量的实际允许变化范

围确定.例如,在自由落体运动中,质点从下落到落地的时间为 T,函数关系为:$s=\frac{1}{2}gt^2$,其定义域为$[0,T]$;又如,圆面积与其半径 r 的函数关系是:$A=\pi r^2$,其定义域为$(0,+\infty)$.

在数学中,常常不考虑函数的实际意义,而抽象地用某个具体算式表示函数,其定义域就是使得算式有意义的实数组成的集合(它也称为该函数的**自然定义域**).例如,$y=\frac{1}{x^2-1}$的定义域是 $D\{x|x\in\mathbf{R},x\neq\pm1\}$.

二、函数的表示法与分段函数

常用的函数表示方法:**解析法**(也称**公式法**)、**表格法**、**图象法**.

例 1 $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+3}$是用解析式表示 y 与 x 之间的函数关系,其定义域为

$$D=[-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

例 2 某商店前半年内各月某商品的销售量如表 1-1 所示.

表 1-1 某商品的销售量

月份 t	1	2	3	4	5	6
销售量 s	82	80	40	50	70	30

这是用表格表示的销售量 s 与月份 t 之间的函数关系,其定义域为:$D=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 3 如果某地某一昼夜的气温变化如图 1-1 所示,则图中曲线就表示了气温 T 与时间 t 的函数关系,其定义域为:$[0,24)$.

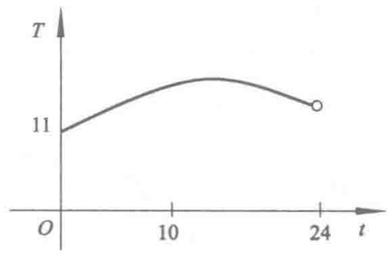


图 1-1

分段函数:有些函数在其定义域的不同部分,其对应法则不能用同一个数学表达式表示,而需要几个式子表示,这样的函数称为**分段函数**.

例 4 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant0,\\ -x, & 当\ x<0\end{cases}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,称其为**绝对值函数**(见图 1-2).

例 5 函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & 当\ x<0,\\ 0, & 当\ x=0,\\ 1, & 当\ x>0\end{cases}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,称其为**符号函数**(见图 1-3).

例 6 函数 $y=\begin{cases}x-1, & x<1,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$(见图 1-4).

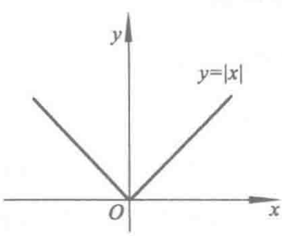


图 1-2

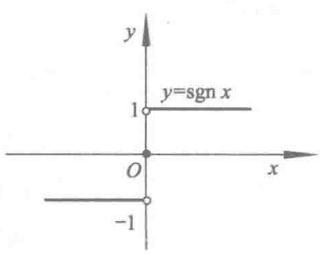


图 1-3

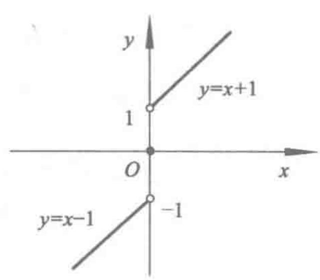


图 1-4

需要强调的是，虽然分段函数的表达式用几个式子表示，但是它表示的仍是一个函数，而不是几个函数.

例 7　某运输公司规定货物的吨千米运价为：在不超过 a 千米时，每千米 k 元；超过 a 千米，超过部分每千米 $0.8k$ 元，求每吨运价和里程之间的函数关系.

解　设运价为 m，里程为 s，则由题意可列出函数关系如下：

$$m=\begin{cases} ks & 0\leqslant s\leqslant a, \\ ka+0.8k(s-a), & s>a. \end{cases}=\begin{cases} ks, & 0\leqslant s\leqslant a, \\ 0.8ks+0.2ka, & s>a. \end{cases}$$

这里运价 m 和里程 s 之间的函数关系是用分段函数表示的，其定义域为 $[0,+\infty)$.

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若存在正数 M，使得对于任意的 $x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**. 否则，称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**无界**. 通常，也将有界函数（无界函数）称为**有界量**（**无界量**）.

例如，函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界；而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，在 $(1,2)$ 内有界.

2. 函数的单调性

定义 3　给定函数 $y=f(x)$，$x\in D$，设区间 $I\subset D$，如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**（或**单调减少**）的，简称为**增函数**（或**减函数**）.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上单调减少.

单调增加函数或单调减少函数统称为**单调函数**.

3. 函数的奇偶性

定义 4　给定函数 $y=f(x)$，$x\in D$，且 D 关于原点对称（即 $x\in D$ 时，必有 $-x\in D$）. 如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数.

例如，$y=\cos x$ 为偶函数，$y=\sin x$ 为**奇函数**.

4. 函数的周期性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 $T(T\neq 0)$，使得对于任意的 $x\in D$，$x+T\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**. 满足这个等式的最小正常数 T 称为函数 $f(x)$ 的**最小正周期**，简称**周期**.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

四、反函数、复合函数

1. 反函数

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$. 如果对于任意的 $y\in R(f)$，总有唯一确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，则建立了一个以 y 为自变量、以 x 为因变量的新函数. 称此新函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为以 x 为自变量、以 y 为

因变量的函数 $y=f^{-1}(x)$. 这时称 $y=f^{-1}(x)$是 $y=f(x)$的**反函数**．而把$x=f^{-1}(y)$称为 $y=f(x)$的**直接反函数**．

由于 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的关系是 x 与 y 互换位置，所以它们的图形关于直线$y=x$对称(见图 1-5). 如，$y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 是互为反函数(见图 1-6).

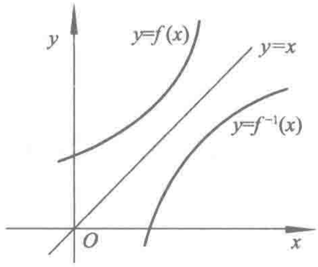


图 1-5

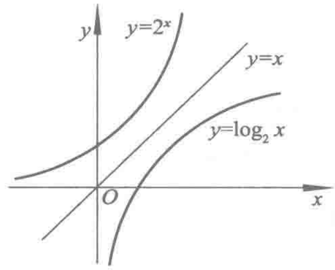


图 1-6

2. 复合函数

设有两个函数 $y=f(u),u\in D(f)$和 $u=g(x),x\in D(g)$. 如果 g 的值域$R(g)\subset D(f)$，则对于每个 $x\in D$，由 g 唯一确定一个 $u\in R(g)$，而 u 又经过 f 唯一确定一个 y. 这样对每个 $x\in D(g)$可以唯一确定一个 y，从而确定一个新函数，其对应关系如图 1-7 所示.

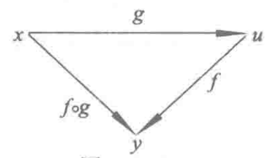


图 1-7

更一般地，如果 $R(g)\not\subset D(f)$，但 $R(g)\cap D(f)\neq\varnothing$，设 $W=\{x\mid g(x)\in R(g)\cap D(f)\}$，则对任意给定的 $x\in W$，由 g 唯一确定一个 $u\in R(g)\cap D(f)$，而 u 又经过 f 唯一确定一个 y，也就确定了一个新函数．这个新函数称为由 $u=g(x)$和 $y=f(u)$构成的一个复合函数．记作 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=y,\quad x\in W.$$

易见，两个函数 $y=f(u),u\in D(f)$和 $u=g(x),x\in D(g)$可构成复合函数 $y=f(g(x))$的条件是:$R(g)\cap D(f)\neq\varnothing$.

定义 7 设函数 $y=f(u)$的定义域为 $D(f)$，函数 $u=g(x)$的值域为 $R(g)$，若 $R(g)\cap D(f)$非空，则称 $y=f(g(x))$为**复合函数**．其中 x 为自变量，y 为因变量，u 称为**中间变量**．复合函数 $y=f(g(x))$的定义域为 $W=\{x\mid g(x)\in R(g)\cap D(f)\}$.

$y=f(g(x))$是由 $y=f(u)$与 $u=g(x)$构成的复合函数时，可把 $f(u)$称为**外层函数**，$g(x)$称为**内层函数**.

例 8 设 $y=\sqrt{u}$，$u=2-x^2$，将 y 表示成 x 的函数.

解 因为 $y=\sqrt{u}$的定义域为 $D=[0,+\infty)$，$u=2-x^2$ 的值域为 $R(g)=(-\infty,2]$，而交集 $D\cap R(g)=[0,2]$非空，所以由 $y=\sqrt{u}$、$u=2-x^2$ 得到复合函数$y=\sqrt{2-x^2}$.

例 9 函数 $y=\sqrt{2-5x}$是由哪些简单函数复合而成的?

解 $y=\sqrt{2-5x}$由 $y=\sqrt{u}$和 $u=2-5x$ 两个函数复合而成.

需要强调:复合函数不仅可以由两个函数复合而成，还可以由多于两个的函数复合而成．例如，$y=e^{\sqrt{x^2+1}}$是由 $y=e^u$、$u=\sqrt{v}$和 $v=x^2+1$ 三个函数复合而成.

例 10 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$，求下列函数的定义域.

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(x+a)\quad(a>0)$.

解 (1) 由题设，要使函数 $f(x^2)$有意义，必须 $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,1]$.

(2) 由题设，要使函数 $f(x+a)$ 有意义，必须 $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow x\in[-a,1-a]$.

五、基本初等函数、初等函数

下列函数统称为**基本初等函数**，是构成函数的基本“元素”.

(1)常函数：$y=c$（c 为常数）；

(2)幂函数：$y=x^{a}$（a 为任意实数）；

(3)指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），特例：$y=\mathrm{e}^{x}$（e 为无理数，见第五节）；

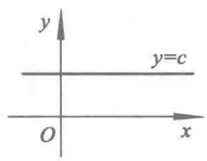
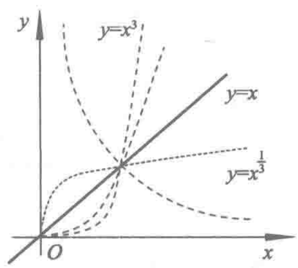
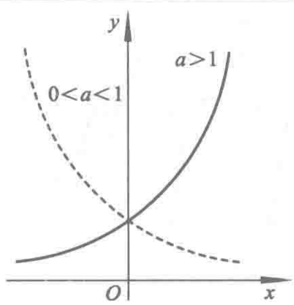
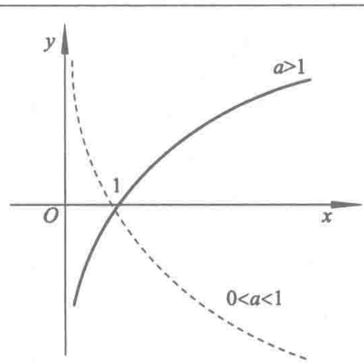
(4)对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），特例：$y=\log_{\mathrm{e}}x=\ln x$；

(5)三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

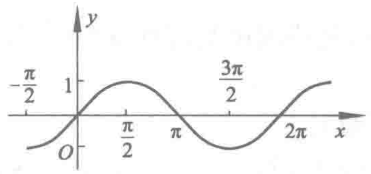
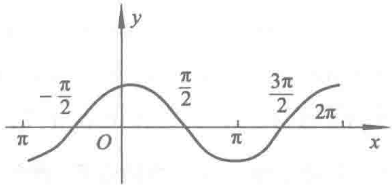
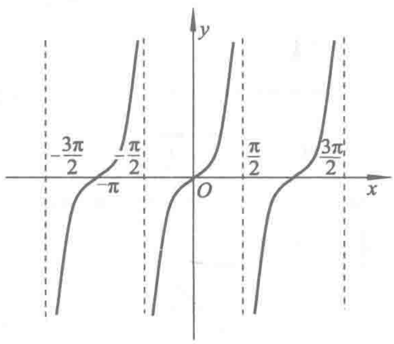
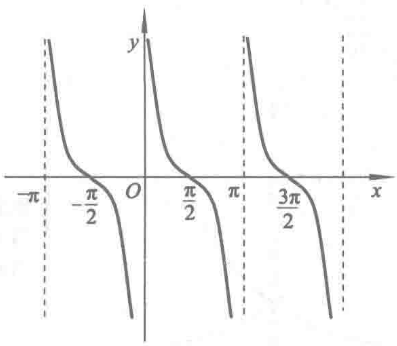
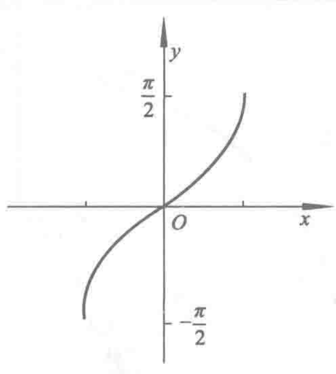
(6)反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

常用的基本初等函数的定义域、值域、图象和性质见表 1-2.

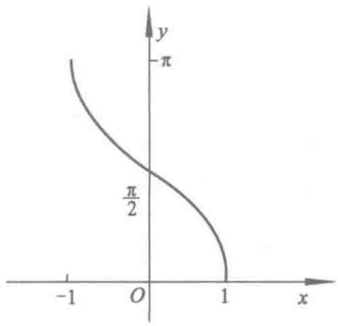
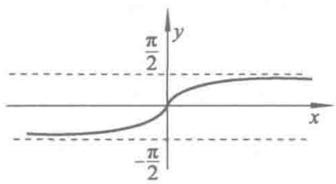
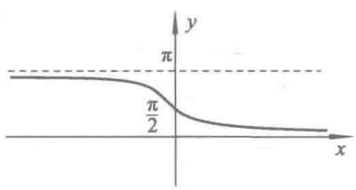
表 1-2　常用基本初等函数的性质、图象

名称及表达式	定义域	图形(举例)	特　　性
常函数 $y=c$	$(-\infty,+\infty)$		图象为平行于 x 轴的一条直线
幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\neq 0)$	随 α 不同而不同，但在$(0,+\infty)$中都有意义		经过点(1,1)； 在第一象限内当 $\alpha>0$ 时，为增函数； 当 $\alpha<0$ 时，为减函数
指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		图象在 x 轴上方，过(0,1)点； 当 $0<a<1$ 时，为减函数； 当 $a>1$ 时，为增函数
对数函数 $y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$		图象在 y 轴的右侧，过(1,0)点； 当 $0<a<1$ 时，为减函数； 当 $a>1$ 时为增函数

续上表

名称及表达式		定义域	图形(举例)	特性
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期； 奇函数，图象关于原点对称； 在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，即 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$
	余弦函数 $y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期； 偶函数，图象关于 y 轴对称； 在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，即 $-1\leqslant\cos x\leqslant1$
	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$， $k\in\mathbf{Z}$		以 π 为周期； 奇函数； 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数； 值域为 $(-\infty,+\infty)$
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$		以 π 为周期； 奇函数； 在 $(0,\pi)$ 内是减函数； 值域为 $(-\infty,+\infty)$
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加； 奇函数； 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

续表

名称及表达式		定义域	图形(举例)	特　　性
反三角函数	反余弦函数 $y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少； 值域为$[0,\pi]$
	反正切函数 $y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加； 奇函数； 值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		单调减少； 值域为$(0,\pi)$

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合而构成的，并且能用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

例如，函数 $y=x^2\sqrt{2+\sin x}-\ln(x^2+5)$、$y=\arctan(1+x)-\dfrac{e^x+6x}{3^x-5^{x^3}}+\sin 3$ 等都是初等函数，而函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 和 $y=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$，就不是初等函数.

习　题　1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-4}$；　(2) $y=\ln(x-5)$；　(3) $y=\cos\sqrt{x}$；

(4) $y=\arcsin(x+1)$；　(5) $y=\sqrt{2-x}+\text{arcrtan}\,\dfrac{1}{x}$；　(6) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$.

2. 下列函数是否相等？为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$；　(2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{\sin^2 x}$ 与 $g(x)=|\sin x|$.

3. 证明:(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的积是偶函数,两个奇函数的积是偶函数,偶函数与奇函数的积是奇函数.

4. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\frac{1+x}{1-x}$;　　(2) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　　(3) $y=2\sin 5x,-\frac{\pi}{10}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{10}$.

5. 分别指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的:

(1) $y=\cos 3x$;　　(2) $y=\ln(2x-1)$;　　(3) $y=\ln\cos e^x$;

(4) $y=\sin^3(x+5)$;　　(5) $y=\arccos\frac{1}{x^2}$.

6. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(2x-1)$;　　(2) $f(\sin x)$;　　(3) $f(x-a)(a>0)$.

7. 在半径为 r 的球内,嵌进一内接圆柱.试将圆柱的体积 V 表示为其高 h 的函数,并求此函数的定义域.

8. 已知水渠的横断面是等腰梯形,顶边为 b,斜角 $\varphi=40°$,如图 1-8 所示.当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并指明其定义域.

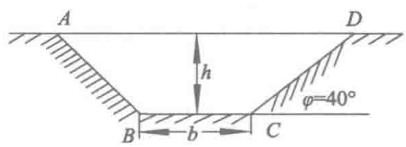


图 1-8

9. 收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元.厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台以上的,每多订购 1 台,售价就降低 0.01 元,但最低价为每台 75 元.(1) 将每台的实际售价 P 表示为订购量 x 的函数;(2) 将厂方所获得的利润 L 表示成订购量 x 的函数;(3) 某一商行订购了 1000 台,厂方可获得利润多少?

第二节　函数的极限

一、数列的极限

1. 数列

定义 1　按下标从小到大依次排列的一列数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 称为一个**数列**,记作 $\{a_n\}$.称其中每一个数为数列的**一项**,a_n 称为数列的**通项**或**一般项**.

数列也可以看作是定义在正整数集合 $\mathbf{N}^+$ 上的一个函数 $a_n=f(n),n\in\mathbf{N}^+$(称为整标函数),当自变量 n 按正整数 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 依次增大的顺序取值时,相应的函数值排成一列数 $f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$.我们这里所说到的数列都是无穷数列,数列的任意一个无穷子集称为数列的一个**子数列**.

例 1　数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$,通项:$a_n=\frac{1}{2^n}$.

例 2　数列 $1+1,1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{3},1+\frac{1}{4},\cdots,1+\frac{1}{n},\cdots$,通项:$a_n=1+\frac{1}{n}$.

例 3　数列 $1,3,5,7,\cdots,(2n-1),\cdots$,通项:$a_n=2n-1$.

例 4　数列 $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$,通项:$a_n=(-1)^{n+1}$.

分析上述例子可以看出,随着 n 增大,数列的通项的变化趋势可以分成两种情形.