数学建模案例精选

3

朱道元 等 编著

科学出版社
www.sciencep.com

数学建模案例精选

朱道元 等 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

教育部高教司组织的大学生数学建模竞赛，对于培养学生解决实际问题的能力和创新意识，对于推动教学改革起了很大的作用，这一竞赛目前已成为全国规模最大的大学生课外科技活动，优秀赛题及优秀论文是更好地发挥它的作用的关键之一，作者根据多年从事教练及参加全国、省评审的经验，对历年的国际、国内竞赛题进行深入研究，选择了十多条研究余地大，创造性高的最近几年赛题，如频道优化分配、公交调度、西气东输、刀具更新、基金使用、煤矸石堆积、最小广播图、零件参数、钻井布局、空洞探测、锁具装箱、高速碰撞等在优秀论文基础上进行探讨，使问题得到近乎完美的解决，发表了多篇学术论文，讲稿曾在多所院校试讲，深受研究生与本科生的欢迎，对数模教练员也很有启发，尤其是对创造能力的培养很有帮助。

读者对象：高等院校师生和数学应用爱好者。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模案例精选/朱道元等编著.—北京：科学出版社，2003.3
ISBN 7-03-011116-8

Ⅰ.数…　Ⅱ.朱…　Ⅲ.数学模型-高等学校-习题　Ⅳ.O22-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 006457 号

责任编辑：吕　虹 / 责任校对：钟　洋
责任印制：安春生 / 封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2003年3月第 一 版　开本：B5 (720×1000)
2003年3月第一次印刷　印张：15 3/4
印数：1—5 000　字数：306 000

定价：23.00 元

前　言

全国大学生数学建模竞赛组织委员会主任李大潜院士多次讲到他对数学建模活动的思考:"数学科学在本质上是革命的,是不断创新、发展的,是与时俱进的,可是传统的数学教学过程与这种创新、发展的实际进程却不免背道而驰。从一些基本的概念或定义出发,以简练的方式合乎逻辑地推演出所要求的结论,固然可以使学生在较短的时间内按部就班地学到尽可能多的内容,并体会到一种丝丝入扣、天衣无缝的美感;但是,过分强调这一点,就可能使学生误认为数学这样完美无缺、无懈可击是与生俱来、天经地义的,反而使思想处于一种僵化状态,在生动活泼的现实世界面前手足无措、一筹莫展。其实,现在看来美不胜收的一些重要的数学理论和方法,在一开始往往是混乱粗糙、难以理解甚至不可思议的,但由于蕴涵着创造性的思想,又最富有生命力和发展前途,经过许多乃至几代数学家的努力,有时甚至经过长期的激烈论争,才逐步去粗取精、去伪存真,使局势趋于明朗,最终出现了现在为大家公认、甚至写进教科书里的系统的理论。要培养同学的创新精神,提高同学的数学修养及素质,固然要灌输给他们以知识,但更要紧的是使他们了解数学的创造过程。这不仅要有机地结合数学内容的讲授,介绍数学的思想方法和发展历史,而且要创造一种环境,使同学身临其境地介入数学的发现或创造过程,否则,培养创新精神,加强素质教育,仍不免是一句空话。在数学教学过程中,要主动采取措施,鼓励并推动学生解决一些理论或实际的问题。这些问题没有现成的答案,没有固定的方法,没有指定的参考书,没有规定的数学工具,甚至也没有成型的数学问题。主要靠学生独立思考、反复钻研并相互切磋,去形成相应的数学问题,进而分析问题的特点,寻求解决问题的方法,得到有关的结论,并判断结论的对错与优劣。总之,让学生亲口尝一尝梨子的滋味,亲身去体验一下数学的创造过程,取得在课堂里和书本上无法代替的宝贵经验。毫无疑问,数学模型及数学实验的教学以及数学建模竞赛的开展,在这方面应该是一个有益的尝试和实践。"

针对数模竞赛评审,他指出:"要特别重视并注意发现同学的创新精神、意识及能力,并且充分保护并肯定同学在这方面的表现、哪怕是创造性思维的火花。数学建模竞赛重视的是让同学参与创造和发现的过程,而创新和发明是没有边界的,是不应该被什么框框死死框住的,是不应该受"标准答案"的束缚的。要鼓励、提倡大家自由思想、大胆创新,注意发现并扶植这方面的苗头。"

根据我们的切身体会，我们完全赞同李大潜教授的看法，应特别重视创造性思维，应特别重视数学的创造过程。而数模竞赛的有些赛题在一定程度上有类似的功能，认真研讨、开拓思路、激烈论争，去粗取精、去伪存真，是十分必要的。

我们有幸成为江苏各高校的数学建模的主教练，深入到同学的拼搏之中，探摸到了同学们许多原始的创新思想，参加数模竞赛评审，尤其我近几年一直参加全国的评审，并有幸审阅了一些赛题获全国一等奖的大多数论文，其中不乏创造性思维的火花。赛后我们自己也组织了多次研讨讲座，历经数次困惑与挫折，终于有了一些阶段性成果，对我们自己是很好的提高，除发表在相关杂志上，同时也在培训同学的创新精神，创新能力上发挥了重要作用，收效显著，在江苏几十所高校讲授也深受广大同学欢迎。书中有的题目内容达五万字，是五六篇论文的综合，已远远超出优秀论文的范围，我们对其中创造过程给予一定的介绍，值得数学工作者及工程技术人员一读。

参加本书编著的有东南大学朱道元、陈恩水、石爱菊，南京大学姚天行、南京航空航天大学顾玉娣，南京理工大学俞军，南京工业大学陈务深，海军工程大学杜义，河海大学丁根宏、朱永忠，南京邮电学院邱中华，扬州大学赵俊，并由朱道元统稿。

本书的编写属于《江苏省普通高等教育面向21世纪教学内容和课程体系计划》的重点项目，受到江苏省教育厅的大力支持。特别得到科学出版社吕虹主任的大力支持，正是由于她的鼓励，这本书才能较快地面世。此外本书从有关论文中吸收了很多内容，参考文献列在每章后面，在此向有关作者表示感谢。

由于作者水平有限，书中错误及不足之处在所难免，热忱欢迎读者批评指正。

朱道元

于东南大学数学系

2002.8

目　　录

第一章　基金使用计划

问题　某校基金会有一笔数额为 M 元的基金，打算将其存入银行或购买国库券。当前银行存款及各期国库券的利率见表 1.1。假设国库券每年至少发行一次，发行时间不定。取款政策参考银行的现行政策。

表 1.1

	银行存款税后年利率(%)	国库券年利率(%)
活期	0.792	
半年期	1.664	
一年期	1.800	
二年期	1.944	2.55
三年期	2.160	2.89
五年期	2.304	3.14

校基金会计划在 n 年内每年用部分本息奖励优秀师生，要求每年的奖金额大致相同，且在 n 年末仍保留原基金数额。校基金会希望获得最佳的基金使用计划，以提高每年的奖金额。请你帮助校基金会在如下情况下设计基金使用方案，并对 $M=5000$ 万元，$n=10$ 年及 $n=12$ 年给出具体结果：

1. 只存款不购国库券；
2. 可存款也可购国库券；
3. 学校在基金到位后的第 3 年要举行百年校庆，基金会希望这一年的奖金比其他年度多 $\gamma=20\%$。

一、基本假设及分析

问题的本身尚有一些不确定的因素，比如说基金到位的时间，每年奖金发放的日期，银行利率的变动情况等。为使问题简化，我们给出如下假设：

(1) 该笔资金于年底一次性到位，自下年起每年年底一次性发放奖金，每年发放的奖金额为固定的，记为 y_n。

(2) 仅考虑购买二年、三年、五年期国库券的情况，假设三种期限国库券每年

至少发行一次，且只要想买，就一定能买到。

(3) 银行存款利率和国库券的利率执行现行利率标准，且在 n 年内不发生变化。

(4) 国库券提前支取，按同期银行存款利率记息，且收取 2% 手续费。

二、数学建模

1. 单纯存款模型

设将一元钱存入银行 k 年(包括中途转存)，到期时本息和最多可达 r_k 元，则假如第 k 年有 M_k 元的存款到期，到期时取出，本息和最大可达 r_kM_k。现将 M 元分成 n 份，分别记为 $M_1, M_2, \cdots, M_n$。将 M_k 存入银行 k 年，到期时取出，将本息和作为第 k 年的奖金(第 n 年本息和除作奖金外，还要留下原始本金 M)，则应有

$$r_kM_k = y_n, k = 1,2,\cdots,n-1 \tag{1}$$

$$r_nM_n = y_n + M \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = M \tag{3}$$

记 $\frac{1}{r_i} = S_i, i = 1,2,\cdots,n$，由 (1) ~ (3) 式得到

$$y_n = \frac{1 - S_n}{\sum_{i=1}^{n} S_i} M \tag{4}$$

$$M_k = \frac{1}{r_k} \frac{1 - S_n}{\sum_{i=1}^{n} S_i} M, k = 1,2,\cdots,n-1 \tag{5}$$

$$M_n = \frac{1}{r_n} \frac{1 + \sum_{i=1}^{n-1} S_n}{\sum_{i=1}^{n} S_i} M \tag{6}$$

记 $$\eta_n = y_n / M$$

则 $$\eta_n = \frac{1 - S_n}{\sum_{i=1}^{n} S_i} \tag{7}$$

上式给出了 n 年内每年的奖金额 y_n 与 M 的比值。该方法的关键在于如何求出 $r_k, k = 1,2,\cdots,n$。下面我们给出 r_k 的算法，其中 β_k 表示 1 元钱本金存 k 年期定期存款，k 年后的本息和。

设将 1 元钱存入银行 k 年，k 年存期中有 x_1 个一年期，x_2 个二年期，x_3 个三年期，x_5 个五年期，记 $A_k(x_1, x_2, x_3, x_5)$ 为其本息和，则

$$A_k(x_1,x_2,x_3,x_5) = \beta_1^{x_1}\beta_2^{x_2}\beta_3^{x_3}\beta_5^{x_5} \tag{8}$$

其中

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_5 = k \tag{9}$$

且

$$r_k = \max_{\pi_k} A_k(x_1,x_2,x_3,x_5) \tag{10}$$

$$\pi_k = \{(x_1,x_2,x_3,x_5) \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_5 = k, x_1,x_2,x_3,x_5\text{均为非负整数}\}$$

容易看出,任意交换二个存期的次序不改变本息和。例如,先存一年期后存三年期与先存三年期后存一年期,到期时本息和是一样的。不仅如此,经计算可知以下五式成立

$$\beta_1^2 < \beta_2 \tag{11}$$

$$\beta_1\beta_2 < \beta_3 \tag{12}$$

$$\beta_2^2 < \beta_1\beta_3 \tag{13}$$

$$\beta_2\beta_3 < \beta_5 \tag{14}$$

$$\beta_3^2 < \beta_1\beta_5 \tag{15}$$

上面各式中,(11)式表示存2个一年期不如一次存1个二年期,(12)式表示存1个一年期再转存1个二年期不如一次存1个三年期,以此类推,(15)式表示存2个三年期不如先存1个一年期再转存1个五年期。

根据(11)~(15)式,我们得到如下定理。

定理1 假如 $A_k(x_1,x_2,x_3,x_5)$在$(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_5^*)$点取得最大值,则下列条件必成立

$$① \ x_1^* \leqslant 1, x_2^* \leqslant 1, x_3^* \leqslant 1 \tag{16}$$

$$② \ x_1^* + x_2^* \leqslant 1, x_2^* + x_3^* \leqslant 1 \tag{17}$$

$$③ \ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* \leqslant 4 \tag{18}$$

定理的证明是比较简单的,条件(16)可由(11)式、(13)式和(15)式得出,条件(17)由(12)式及(14)式得出,条件(18)由条件(1)及条件(2)推出。

将(9)式两边除以5,得

$$\frac{1}{5}(x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^*) + x_5^* = \frac{k}{5}$$

于是根据定理1得

$$x_5^* = \left[\frac{k}{5}\right]$$

设 $k = 5m + l$, m 为非负整数,则有

$$x_5^* = m, x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = l \tag{19}$$

再据(11)~(13)式得,当 $l = 0$ 时,$x_3^* = 0, x_2^* = 0, x_1^* = 0$;当 $l = 1$ 时,$x_3^* = 0, x_2^* = 0, x_1^* = 1$;当 $l = 2$ 时,$x_3^* = 0, x_2^* = 1, x_1^* = 0$;当 $l = 3$ 时,

$x_3^* = 1, x_2^* = 0, x_1^* = 0$；当 $l = 4$ 时，$x_3^* = 1, x_2^* = 0, x_1^* = 1$；综上我们可得如下定理。

定理 2 假如 $A_k(x_1, x_2, x_3, x_5)$ 在 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_5^*)$ 点取得最大值，则 $x_5^* = \left[\frac{k}{5}\right], x_3^* = \left[\frac{k - 5x_5^*}{3}\right], x_2^* = \left[\frac{k - 5x_5^* - 3x_3^*}{2}\right], x_1^* = k - 5x_5^* - 3x_3^* - 2x_2^*$。

由定理 2 得到
$$r_k = \beta_1^{x_1^*} \beta_2^{x_2^*} \beta_3^{x_3^*} \beta_5^{x_5^*} \tag{20}$$

将 1 元钱存入银行 k 年，到期后获得最大利息的存法及 r_k 值见表 1.2。

表 1.2 最大利息存款方案

k	存法	r_k
$5m$	m 个五年期	β_5^m
$5m+1$	1 个一年期，m 个五年期	$\beta_1\beta_5^m$
$5m+2$	1 个二年期，m 个五年期	$\beta_2\beta_5^m$
$5m+3$	1 个三年期，m 个五年期	$\beta_3\beta_5^m$
$5m+4$	1 个一年期，1 个三年期，m 个五年期	$\beta_1\beta_3\beta_5^m$

表 1.3 与表 1.4 分别给出了根据(5)式及(7)式求出的 $n = 10$ 年与 $n = 12$ 年时各年用于发放奖金的本金 M_k 与 M 的百分比(最后一年除外)。

表 1.3 $n = 10$ 年，M_k/M 百分比统计(%)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M_k/M	2.157	2.114	2.063	2.026	1.969	1.935	1.896	1.850	1.817

表 1.4 $n = 12$ 年，M_k/M 百分比统计(%)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
M_k/M	2.118	2.075	2.025	1.989	1.933	1.900	1.861	1.816	1.784	1.733	1.704

由(7)式计算得，当 $n = 10$ 年，$\eta_{10} = 2.1963\%$；当 $n = 12$ 年时，$\eta_{12} = 2.156\%$。

根据(7)式及表 1.2 给出的 r_k 值，经计算得

当 $n = 5m$ 时，

$$\eta_{5m} = \frac{1 - \mu_5}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_1\mu_3} \overset{\text{记}}{=\!=} \eta^{-1} \tag{21}$$

其中 $\mu_i = \frac{1}{\beta_i}, i = 1,2,3,5$。

当 $n = 5m + 1$ 时，

$$\eta_{5m+1} = \frac{1 - \mu_1\mu_5^m}{\eta(1 - \mu_5^m) + \mu_1\mu_5^m}, m = 0,1,2,\cdots \tag{22}$$

当 $n = 5m + 2$ 时，

$$\eta_{5m+2} = \frac{1 - \mu_2\mu_5^m}{\eta(1 - \mu_5^m) + (\mu_1 + \mu_2)\mu_5^m}, m = 0,1,2,\cdots \tag{23}$$

当 $n = 5m + 3$ 时，

$$\eta_{5m+3} = \frac{1 - \mu_3\mu_5^m}{\eta(1 - \mu_5^m) + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_5^m}, m = 0,1,2,\cdots \tag{24}$$

当 $n = 5m + 4$ 时，

$$\eta_{5m+4} = \frac{1 - \mu_3\mu_1\mu_5^m}{\eta(1 - \mu_5^m) + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_1\mu_3)\mu_5^m}, m = 0,1,2,\cdots \tag{25}$$

可以证明由(22)～(25)式定义的4个序列(它们均为 $y_n, n = 0,1,2,\cdots$ 的子序列)，均是单调上升的，且以 η^{-1} 为极限，容易算得 $\eta^{-1} = 0.021963$。即

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n = \eta^{-1} = 0.021963 \tag{26}$$

上式表明，在银行存款利率不变的条件下，每年奖励金占资金总额的比例存在一个上限2.1963%，且当 n 为5的倍数时可达这一上限。

需要说明的是，也可以将 M 元分成 $n+1$ 份，分别记为 $M_0, M_1, \cdots, M_n$。将 M_k 存入银行 k 年，到期时取出，将本息和作为第 k 年的奖金($k = 1,2,\cdots,n$)，M_0 存入银行 n 年，到期时取出，使本息和等于原基金数额，采用前面相同的讨论，也可获得与前文等同的优化方案。

2. 可存款可购国库券模型

仍将 M 分成 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 共 n 份，M_k 可作存款或购买国库券用，其本息和用作第 k 年的奖金，最后一笔除奖金外，还应留下基金本金 M。

由于国库券在一年内不定期发行，为保证有国库券时能即时买到，可以考虑将这笔钱以半年定期存入银行，若在上半年发行国库券，以活期利息提前支出，购买国库券，当国库券到期时取出，再存一个半年定期，剩余的时间以活期计息；若在下半年发行国库券，此时半年定期已到期，再以活期存入银行，有国库券时，立即取出，购买国库券，到期时取出，剩余时间再存活期。购买国库券之前及到期取出之后的两段时间之和为一年，因此购买一个 k 年期的国库券实际需要 $k+1$ 年，据此，下面考虑购买国库券的情况。

(1) 3年时使用，如果考虑购买二年期国库券，则在三年内可获得半年活期 β_0、半年定期 β_h 及一个二年期国库券 $2\overline{\alpha}_2$ 的利息，三年结束时单位资金增长系数

$$\overline{\beta}_3 = (1 + 2\overline{\alpha}_2)\beta_0\beta_h = 1.0639 < \beta_3 = 1.0648$$

上式表明存三年定期是首选的方案。

(2) 4年时使用，如果购买三年期国库券，则4年结束时单位资金增长系数

$$\overline{\beta}_4 = (1 + 3\overline{\alpha}_3)\beta_0\beta_h = 1.10008 > \beta_3\beta_1 = 1.08397$$

上式表明,购买三年期国库券获得的利息大于存一个三年定期,再续存一个一年定期的利息,因而购买国库券是首选方案。

(3) 5 年时使用,如果考虑购买三年期国库券,加半年定期,半年活期及一年定期,5 年结束时的单位资金增长系数

$$\overline{\beta}_5 = (1 + 3\overline{\alpha}_3)\beta_0\beta_h\beta_1 = 1.1198 > \beta_5 = 1.1152$$

应首选购买国库券。

(4) 6 年时使用,如果购买五年期国库券,6 年结束时的单位资金增长系数

$$\overline{\beta}_6 = (1 + 5\overline{\alpha}_5)\beta_0\beta_h = 1.17125 > \beta_5\beta_1$$

应首选购买国库券。

从以上分析得出,要获得最大的资金增值,应选择一年定期、二年定期、三年定期及三年国库券和五年国库券,而不应选择二年期国库券和五年定期存款。为了叙述方便,把买三年期国库券加半年定期及半年活期存款看成一个四年期存款,到期时资金增长系数为 $\overline{\beta}_4$,把买五年期国库券加半年定期及半年活期存款看成一个六年期存款,到期时资金增长系数为 $\overline{\beta}_6$。设将 M_k 的本息和用作第 k 年的奖金,k 年中有 x_1 个一年期,x_2 个二年期,x_3 个三年期,x_4 个四年期,x_6 个六年期,则到期时资金增长系数为

$$B_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6) = \beta_1^{x_1}\beta_2^{x_2}\beta_3^{x_3}\overline{\beta}_4^{x_4}\overline{\beta}_6^{x_6} \tag{27}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_6 = k \tag{28}$$

类似于单纯存款模型的分析,要使 $B_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6)$ 取最大值,只需取

$$x_6 = \left[\frac{k}{6}\right], x_4 = \left[\frac{k - 6x_6}{4}\right], x_3 = \left[\frac{k - 6x_6 - 4x_4}{3}\right],$$

$$x_2 = \left[\frac{k - 6x_6 - 4x_4 - 3x_3}{2}\right], x_1 = k - 6x_6 - 4x_4 - 3x_3 - 2x_2 \tag{29}$$

根据(29) 式得到的获得最大利息的方案及 r_k 值见表 1.5。

表 1.5 最大利息存法方案

k	存法	r_k
$6m$	m 个五年期国库券	$\overline{\beta}_6^m$
$6m+1$	1 个一年期存款,m 个五年期国库券,	$\beta_1\overline{\beta}_6^m$
$6m+2$	1 个二年期存款,m 个五年期国库券,	$\beta_2\overline{\beta}_6^m$
$6m+3$	1 个三年期存款,m 个五年期国库券,	$\beta_3\overline{\beta}_6^m$
$6m+4$	1 个三年期国库券,m 个五年期国库券,	$\overline{\beta}_4\overline{\beta}_6^m$
$6m+5$	1 个一年期存款,1 个三年期国库券,m 个五年期国库券,	$\beta_1\overline{\beta}_4\overline{\beta}_6^m$

根据(7) 式及表 1.5 给出的 r_k 的值,经计算得

当 $n = 6m$ 时：

$$\eta_{6m} = \frac{1 - \mu_6}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_1\mu_4 + \mu_6} \xlongequal{\text{记}} \overline{\eta}^{-1}, m = 1,2,3,\cdots \tag{30}$$

其中 $\mu_1 = 1/\beta_1, \mu_2 = 1/\beta_2, \mu_3 = 1/\beta_3, \mu_4 = 1/\overline{\beta}_4, \mu_6 = 1/\overline{\beta}_6$。

当 $n = 6m + 1$ 时：

$$\eta_{6m+1} = \frac{1 - \mu_1\mu_6^m}{\overline{\eta}(1 - \mu_6^m) + \mu_1\mu_6^m}, m = 0,1,2,\cdots \tag{31}$$

当 $n = 6m + 2$ 时：

$$\eta_{6m+2} = \frac{1 - \mu_2\mu_6^m}{\overline{\eta}(1 - \mu_6^m) + (\mu_1 + \mu_2)\mu_6^m}, m = 0,1,2,\cdots \tag{32}$$

当 $n = 6m + 3$ 时：

$$\eta_{6m+3} = \frac{1 - \mu_3\mu_6^m}{\overline{\eta}(1 - \mu_6^m) + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_6^m}, m = 0,1,2,\cdots \tag{33}$$

当 $n = 6m + 4$ 时：

$$\eta_{6m+4} = \frac{1 - \mu_4\mu_6^m}{\overline{\eta}(1 - \mu_6^m) + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)\mu_6^m}, m = 0,1,2,\cdots \tag{34}$$

当 $n = 6m + 5$ 时：

$$\eta_{6m+5} = \frac{1 - \mu_1\mu_4\mu_6^m}{\overline{\eta}(1 - \mu_6^m) + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_1\mu_4)\mu_6^m}, m = 0,1,2,\cdots \tag{35}$$

可以证明由(31)～(35)式定义的5个序列均是单调上升的，且以 $\overline{\eta}^{-1}$ 为极限，容易算得 $\overline{\eta}^{-1} = 2.6392\%$。即

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0.026392 \tag{36}$$

上式表明，无论这笔基金用于多长年份的奖金，在现行银行存款利率及现行国库券利率水平下，每年奖金的总额不超过基金总额的 2.6392%。

表 1.6 与表 1.7 分别给出了根据(5)式及(7)式求出的 $n = 10$ 年与 $n = 12$ 年时各年用于发放奖金的本金 M_k 占 M 的百分比(最后一年除外)。

表 1.6　$n = 10$ 年，M_k/M 百分比统计(%)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M_k/M	2.505	2.455	2.395	2.353	2.311	2.178	2.139	2.096	2.045

表 1.7　$n = 12$ 年，M_k/M 百分比统计(%)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
M_k/M	2.593	2.540	2.479	2.399	2.357	2.253	2.213	2.169	2.117	2.048	2.012

由(7)式计算得,当 $n=10$ 年时,$\eta_{10}=2.5504\%$;$n=12$ 年时,$\eta_{12}=2.6392\%$。

3. 基于百年校庆的最佳投资模型

如果学校希望将校庆年度的奖金在上一年度的奖金基础上提高 γ,那么需要对问题 1 及问题 2 的模型作一些修正。

用 y'_n 表示第一年发的资金额,其他仍采用前面的记号及处理方法,则应有

$$\begin{cases} r_k M_k = y'_n \quad n=1,2,\cdots,n-1,n\neq 3 \\ r_3 M_3 = (1+\gamma)y'_n \end{cases} \tag{1'}$$

$$r_n M_n = y'_n + M \tag{2'}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = M \tag{3'}$$

由(1)′ ~ (3)′ 式得到

$$y'_n = \frac{y_n}{T_n} \tag{4'}$$

其中

$$T_n = 1 + \frac{\gamma}{r_3 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}} \tag{4''}$$

$$\begin{cases} M_k = \frac{1}{r_k} y'_n \, k = 1,2,\cdots,n-1,k\neq 3 \\ M_3 = \frac{1+\gamma}{r_3} y'_n \end{cases} \tag{5'}$$

$$M_n = \frac{M}{r_n} \cdot \frac{1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{r_i}+\frac{\gamma}{r_3}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}+\frac{\gamma}{r_3}} \tag{6'}$$

记

$$\eta'_n = \frac{y'_n}{M} = \eta_n / T_n \tag{7'}$$

根据 n 取值的不同,可得与(21) ~ (25)式及(31) ~ (35)式类似的公式,不过此时 η'_n 已无周期可言。上式给出了 n 年内每年(除 $k=3$ 外)的资金额 y'_n 与 M 的比值,据此得到 $n=10$ 年,$M=5\times 10^7$ 元,$\gamma=0.2$ 的各年用于发放奖金本金的最佳分配表见表 1.8(最后一年除外)。

表 1.9 和表 1.10 分别给出了模型 3.1 及模型 3.2 的各年用于发放奖金本金的最佳分配表。

表 1.8　最佳投资 M_k 分配表(单位:万元精确到 0.1 万元, $\gamma = 0.2$)

M_k \ k		1	2	3	4	5	6	7	8	9
模型一		107.9	105.7	103.1	101.3	98.5	96.7	94.8	92.5	90.8
模型二		125.3	122.7	119.8	115.9	113.9	108.9	107.0	104.8	102.2
模型三	A	105.6	103.5	121.2	99.2	96.5	94.7	92.8	90.6	88.9
	B	122.6	120.2	140.7	113.5	111.5	106.6	104.7	102.6	100.1

表 1.9　M = 5000 万元, n = 10 年基金使用最佳方案(单位:万元)

	存 1 年定期	存 2 年定期	存 3 年定期	存 5 年定期	取款数额(到期本息和)	每年发放奖学金数额
第一年初	107.875194	105.707057	204.4444159	4581.97359		
第一年末					109.816947	109.816947
第二年末					109.816947	109.816947
第三年末	107.875194				217.692141	109.816947
第四年末					109.816947	109.816947
第五年末	107.875194	105.707057	204.4444159	4691.790281	5109.816947	109.816947
第六年末					109.816947	109.816947
第七年末					109.816947	109.816947
第八年末	107.875194				217.692141	109.816947
第九年末					109.816947	109.816947
第十年末					5109.816947	109.816947

表 1.10　M = 5000 万元,问题 3 中 n = 10 年基金使用最佳方案(单位:万元)

	存 1 年定期	存 2 年定期	存 3 年定期	存 5 年定期	取款数额(到期本息和)	每年发放奖学金数额
第一年初	105.650679	103.527252	220.429705	4570.392364		
第一年末					107.552392	107.552392
第二年末					107.552392	107.552392
第三年末	105.650679				234.713549	129.062870
第四年末					107.552392	107.552392
第五年末	105.650679	103.527253	220.429705	4678.147602	5107.552392	107.552392
第六年末					107.552392	107.552392
第七年末					107.552392	107.552392
第八年末	105.650679				213.203071	107.552392
第九年末					107.552392	107.552392
第十年末					5107.552392	107.552392

三、结　　论

本文给出了两种优化基金投资方案,得到了每年奖金额与投资期限 n 的关系,并就 $n = 10$ 年及 $n = 12$ 年,$m = 5 \times 10^7$ 元,给出了具体结果。我们还证明了,对于单纯存款模型,每年奖金占基金总额的最大比例为 2.1963%;对于可存款可购国库券模型,这一比例可高达 2.6392%。

参考文献

[1] 陈恩水,孙志忠."基金使用计划"模型和评述. 工程数学学报,2002,Vol19, 建模专辑

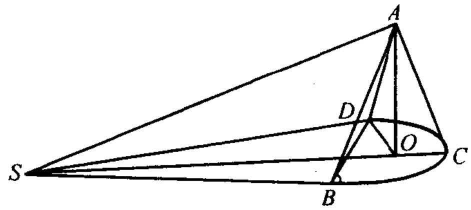
[2] 姜启源. 数学模型. 北京:高等教育出版社,1998

[3] 朱道元. 数学模型精品案例. 南京:东南大学出版社,1999

第二章　煤矸石堆积问题

问题　煤矿采矿时，会产出废料 —— 煤矸石。在平原地区，煤矿不得不征用土地堆放煤矸石。通常矸石的堆放方法是：

架设一段与地面角度约为 $\beta = 25^\circ$ 的直线形上升轨道（角度过大，运矸车无法装满），用在轨道上行驶的运矸车将矸石运到轨道顶端后向两侧倾倒，待矸石堆高后，再借助矸石堆延长轨道，这样逐渐堆起如下图所示的一座矸石山来。



现给出下列数据：

矸石自然堆放安息角（矸石自然堆积稳定后，其坡面与地面形成的夹角）$\alpha \leqslant 55^\circ$；

矸石容重（碎矸石单位体积的重量）约 $2\mathrm{t/m^3}$；

运矸车所需电费为 0.50 元 /(kW · h)（不变）；

运矸车机械效率（只考虑在堆积坡道上的运输）初始值（在地面上）约为 30%，坡道每延长 10m，效率在原有基础上约下降 2%；

土地征用费现值为 8 万元 / 亩，预计地价年涨幅约为 10%；

银行存、贷款利率均为 5%；

煤矿设计原煤产量为 3Mt/ 年；

煤矿设计寿命为 20 年；

采矿出矸率（矸石占全部采出的百分比）一般为 7% ～ 10%。

另外，为保护耕地，煤矿堆矸石的土地应比实际占地多征用 10%。

现在煤矿设计中用于处理矸石的经费（只计征地费及堆积时运矸车用的电费）为 100 万元 / 年，这笔钱是否够用？试制订合理的年度征地计划，并对不同的出矸率预测处理矸石的最低费用。

本问题是判断在一定寿命年限内煤矸石堆积的费用够不够用的问题，由于该问题中的几何体的形状一定，所以实际上该问题只要给出煤矸石堆积总费用与几