# 线性代数入门

李世达

近代数学知识丛书 JINDAISHUXUEZHISHICONGSHU

四川教育出版社

近代数学知识丛书

# 线性代数入门

李世达

四川教育出版社
一九八五年·成都

责任编辑　韩承训
特约编辑　胡师度
封面装帧　邱云松

近代数学知识丛书　　**线性代数入门**

---

四川教育出版社出版　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　国营五二三厂印刷

---

开本 787×960 毫米 1/32 印张 4.75 字数 90 千
1985 年 4 月第 1 版　　1985 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—30,700 册

---

书号：　7344·48　　　　定价：0.82 元

## 内 容 提 要

本书作为一种数学入门读物，主要介绍线性代数的基本概念、基本性质和基本运算，包括行列式、矩阵及线性方程组等内容。文字浅显，讲解清楚，并选有不少典型例题和练习，以利初学者学习。

本书可供中学生课外阅读，也可供中学教师和一般数学爱好者参考。

# 写在前面

从小学跨入中学，特别是步入高中以后，你将碰到许多完全陌生的东西，你将会发现数学天地是那样广阔，那样令人神往而又眼花缭乱，你可能会感到新奇，也可能会因无从下手而产生惶惑……其实，万事入门难，入门前或许不知所云，入了门便“不过如此”了。

这套知识小丛书将帮助你度过“入门难”这一关。它用生动而浅显（有时还很有趣）的语言，准确而明晰的阐述，将近代数学中一些基本的概念、理论和运算一步一步展开，象一级级台阶，将你引入门去，使你并不感到突然和十分吃力。许多地方还从生活现象入手，你读起来象是在聊家常，毫无枯燥之感。所选的例题和练习也将帮助你加深理解。当然，所谓入门，不过是给你一把小小的钥匙而已，一旦“入”得“门”去，那广阔的天地便由你自由驰骋，因而也就不再是这套书的任务了。

这套丛书所收书目见后勒口所列，大多为中学教学所涉及；少数关系不甚密，可辅你开拓视野，有兴趣者也不妨一读。对于中学教师来说，这套丛

书也不失为良友，对提高教学质量或能助以一臂之力。

这本《线性代数入门》由李世达同志撰写。四川大学数学系胡师度副教授对原稿进行了认真的审核加工，谨此表示谢意。由于编者水平所限，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编 者 一九八四年三月

# 目 录

# 一 行列式

我国古代，在用筹算中的算筹表示联立一次方程未知量的系数时，就有了行列式的萌芽——排列的方式。日本学者吸收这种思想。在1683年，关孝和（Seki Takakusu）对行列式的概念和它的展开已有了清楚的叙述。到十八世纪，瑞士数学家克莱姆（G. Cramer）和法国数学家拉普拉斯（P. S. Laplace）建立了行列式理论。

在这章里，主要介绍行列式的定义，以及讨论它的性质和计算方法。

## 1·1 行列式的定义

### 1. 二阶和三阶行列式

在中学数学教学中，讨论解二元和三元的一次方程组时，引入了二阶、三阶行列式的概念。用符号表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad ①$$

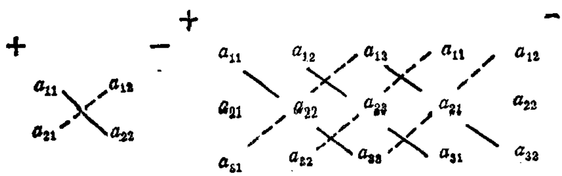
称为**二阶行列式**，其中 $a_{11}$、$a_{12}$、$a_{21}$、$a_{22}$ 称为它的**元素**，横排叫做**行**，纵排叫做**列**。这里对行列式的元素 $a_{ij}$ 用了两个足标，第一个足标表示它在第

$i$行，第二个足标表示它在第 $j$ 列。例如，$a_{21}$ 为行列式中第二行第一列的元素。

用同样方法，三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad ②$$

上面定义的二阶、三阶行列式都是一些项的代数和，可用对角线原则取乘积和定正负号。该原则可用图形描述如下：




其中，实线连接的元素的乘积取正号，虚线连接的元素的乘积取负号。比如：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3) - 1\cdot 1 = -7,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 + 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot(-4)\cdot 3 - 2\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot(-4)\cdot 5 - 2\cdot 1\cdot 3 = 10$$

现在我们分别对二阶、三阶行列式的定义进行分析。先从二阶行列式①看到：

(1) 式①的右边的每一项都是两个元素的乘积，这两个元素分别处于行列式的不同的行和不同的列上。

(2) 式①的右边总共有两项。

(3) 式①的右边有一项带正号是$a_{11}a_{22}$，有一项带负号是$a_{12}a_{21}$。

再从三阶行列式的定义同样看到：

(1) 式②的右边的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素分别处于行列式的不同的行和不同的列上。

(2) 式②的右边总共有六项。

(3) 式②的右边有三项带正号，它们是$a_{11}a_{22}a_{33}$、$a_{12}a_{23}a_{31}$、$a_{13}a_{21}a_{32}$；有三项带负号，它们是$a_{13}a_{22}a_{31}$、$a_{12}a_{21}a_{33}$、$a_{11}a_{23}a_{32}$。

从三阶行列式第（3）条来看，行列式的项所带正负号是有一定规律的。如果把元素的一个足标按1、2、3次序排好，则另一个足标有六种排列。它们是

带正号的：1、2、3，2、3、1，3、1、2； ③

带负号的：3、2、1，2、1、3，1、3、2。 ④

为了确定行列式每一项的正负号，需要引入排列和逆序。

**2. 排列**

把$n$个不同的数排成一列，叫做$n$个不同数的**排列**。对$n$个不同数有多少种不同的排列呢？从$n$个数中任取一个数放在第一个位置上，共有$n$

种取法；又从剩下的 $n-1$ 个数中任取一个放在第二个位置上，共有 $n-1$ 种取法；这样继续下去，直到最后剩下一个数放在第 $n$ 个位置上，只有 1 种取法；所以总共有

$$n\cdot(n-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

种排列。

在 $n$ 个不同的数中，规定了一种先后标准次序（例如由小到大），在这 $n$ 个数的一个排列中，如果有两个数的先后次序与标准次序不同时，就称有一个**逆序**。逆序的总数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序的总数为奇数的排列称为**奇排列**。

例如：1、2、3、4四个数字的排列有

$$\begin{matrix}1234 & 1243 & 1342 & 1324 & 1423 & 1432\\ 2134 & 2143 & 2341 & 2314 & 2413 & 2431\\ 3124 & 3142 & 3241 & 3214 & 3412 & 3421\\ 4123 & 4132 & 4231 & 4213 & 4312 & 4321\end{matrix} \qquad ⑤$$

共 $4!=24$ 种排列。

其中如 1324 只有(32)一个逆序，故为奇排列。又如 4312 有(41)、(31)、(42)、(32)、(43)五个逆序，也为奇排列。对于 3241 有(31)、(21)、(41)、(32) 四个逆序，为偶排列。

从上面 24 种排列中，可以看到有一半是奇排列，有一半是偶排列。

又如三个数的排列，总共有 6 种，③中的是偶排列，④中的是奇排列。

在上面的⑤中，任取一个排列，如4312，若把1和2互换位置，则得新排列4321，它有六个逆序，比原来增加了一个逆序；如果把3和1互换位置，则得4132有四个逆序，比原来减少了一个逆序。从这个例子清楚看到，当把大的数码换在小的数码之前时，就增加了一个逆序；大的换在小的后面时，自然就减少了一个逆序。因此得到：

若在某排列中，交换任意相邻两个数的位置，则变更了排列的奇偶性。也就是说，在某个排列中经过交换相邻两个数后，本来是奇排列的变成了偶排列，本来是偶排列的变成了奇排列。如上述例子中的4312本是奇排列，无论交换1和2的位置，或者交换3和1的位置，都变成了偶排列。为了以后证明行列式的性质，我们还可进一步得出：

**定理 1** 一个排列中任意两个数互换位置，排列变更了奇偶性。

证明：设已给定了$n$个数的一个排列，用$i$和$j$表示互换位置的两个数。

首先假设$i$和$j$是相邻两数，经互换后，$i$和$j$与其他数之间的逆序不变，如果$(ij)$是自然顺序（即小的排在前，大的排在后），经互换成$(ji)$，增加了一个逆序。如果$(ij)$有一逆序，经互换成$(ji)$，减少了一个逆序。显然，互换$i$、$j$就要改变原排列的奇偶性。

其次，假设排列为：

$$\cdots i a_1 a_2 \cdots a_s j \cdots, \qquad ⑥$$

把 $i$ 和 $j$ 互换位置得新排列：

$$\cdots j a_1 a_2 \cdots a_s i \cdots, \qquad ⑦$$

要证明排列⑥和⑦有相反的奇偶性。

由前面已知，互换相邻两数改变一次奇偶性，这就引导我们考虑，对排列⑥，先把 $i$ 与 $a_1$ 互换，变为

$$\cdots a_1 i a_2 \cdots a_s j \cdots,$$

再把 $i$ 与 $a_2$ 互换，变为

$$\cdots a_1 a_2 i \cdots a_s j \cdots,$$

这样继续下去，把 $i$ 与$a_3$，…，$a_s$ 依次互换而成

$$\cdots a_1 a_2 \cdots a_s i j \cdots. \qquad ⑧$$

由⑥变为⑧，作了 $S$ 次互换．然后又把 $j$ 依次与 $i$，$a_s$，$a_{s-1}$，$\cdots a_2$，$a_1$ 互换，最后换成了排列⑦。这样，从⑧变为⑦又作了 $S+1$ 次互换．按照这样方法，从⑥到⑦前后一共互换相邻两数 $2s+1$ 次，即改变了奇数次的奇偶性，所以互换 $i$ 和 $j$ 的位置改变了排列的奇偶性。[证毕]

### 3. $n$ 阶行列式

从二阶和三阶行列式的定义，看出有这样一些共同规律：(1) 每一项都是位于不同行和不同列的元素的乘积；(2) 二阶行列式有 2! 项，三阶行列式有 3! 项；(3) 如果某个项中元素的一个足标按标准顺序排列，而另一个足标构成偶排列，那末这个项带正号，若为奇排列则带负号。我们把这些规律推广到 $n$ 阶。

设有 $n^2$ 个数排列成 $n$ 行 $n$ 列：

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}
\end{matrix}
\qquad ⑨
$$

用位于不同行与不同列上的 $n$ 个元素的所有可能的乘积组成行列式的项，以行的标准顺序排列表示成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \qquad ⑩$$

这些元素的第二个足标 $j_1$，$j_2$，…，$j_n$ 是由 $1,2,\cdots,n$ 所组成的某一个排列。$n$ 个数有 $n!$ 种排列，一个排列对应一项，所以形如⑩的项共有 $n!$ 项。如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列，对应的项带正号；如果是奇排列则带负号。由此我们给出 $n$ 阶行列式的定义：

$n^2$ 个数排列成的 $n$ 行 $n$ 列

$$D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}$$

称为 **$n$ 阶行列式**。其值为 $n!$ 项之和

$$D=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad ⑪$$

式中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 所组成的一个排列，$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 取遍 $1,2,\cdots,n$ 的一切排列求和，$t$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。

例如，对四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

则有 $$D=\sum_{(j_1j_2j_3j_4)}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

根据定义，它有 4！=24 项（由此可见，四阶行列式不能如二阶、三阶行列式那样用对角线法则计算，那将只有 8 项）。四个数的排列有 24 种，在⑤中一个排列对应一项。所以

$$\begin{aligned}D=&a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}\\&-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}\\&-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}\\&+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}\\&+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}\\&-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}\\&-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}\\&+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.\end{aligned}$$

对于 $n$ 阶行列式⑪中的通项，还可变个形式出现：

**定理 2** $n$ 阶行列式的项也可写成

$$(-1)^{k+l}a_{i_1p_1}a_{i_2p_2}\cdots a_{i_np_n}. \tag{12}$$

其中足标 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 和 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 都是 $1,2,\cdots,n$的一个排列，$k$ 是 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，$l$ 是 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

证明：这里我们只要证明⑫就是形如⑪中的通项 $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 就行了。

因为在⑫中任意互换两个元素的次序乘积不变，而它们的两个足标同时在改变，$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数增加或减少一个，$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数同时增加或减少一个，但是

$$k+l \text{ 与 } (k\pm 1)+(l\pm 1)=\begin{cases}k+l+2\\ k+l\\ k+l-2\end{cases}$$

的奇偶性相同。

如果经过互换乘积⑫中元素的次序，使得第一个足标按自然顺序 1,2…$n$ 排列（它的逆序数为0），而第二个足标变为 $j_1j_2\cdots j_n$（它的逆序数为 $t$）。因为 $k+l$ 与 $0+t$ 具有相同的奇偶性，故有

$$(-1)^{k+l}a_{i_1p_1}a_{i_2p_2}\cdots a_{i_np_n}$$
$$=(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

所以⑪中的项可以写成⑫。［证毕］

例如，四阶行列式中任取一项 $(-1)^3a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，可以写成$(-1)^{4+1}a_{32}a_{21}a_{43}a_{14}$，它们只变更了元素相乘的次序，其积不变而且所带正负号也相同。

虽然定义了 $n$ 阶行列式，而从上面例子可以看到，四阶行列式有 24 项，如果是五阶行列式，就有 $5!=120$ 项，显然，从行列式的定义出发来计算行列式是非常麻烦的。这就需要对行列式进一步研究，讨论它的性质，从而引出计算方法。

## 1·2 行列式的性质

本节介绍行列式的几个基本性质，这些内容对于行列式的应用，行列式的计算，以及研究行列式的理论，都是非常有用的。

**性质 1** 行列式转置后，其值不变。即，如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

则有 $D=D'$。

证明：在行列式 $D$ 中任取一项，应用1·1节定理 2 写成

$$(-1)^{k+l}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \qquad ①$$

这里 $k$ 是排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，$l$ 是排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。这乘积的所有元素也在行列式 $D'$ 中不同的行和不同的列上，但在 $D'$ 中的位置却分别为

$a_{i_1j_1}$ 位于第 $j_1$ 行第 $i_1$ 列上，

$a_{i_2j_2}$ 位于第 $j_2$ 行第 $i_2$ 列上，

…… …………

$a_{i_nj_n}$ 位于第 $j_n$ 行第 $i_n$ 列上，

故在 $D'$ 中来看，它所带正负号为 $(-1)^{l+k}$，它与①中的 $(-1)^{k+l}$ 相等，这说明行列式 $D$ 的每一项都会一模一样地出现在行列式 $D'$ 中。但因 $D$ 和 $D'$ 都恰好含有 $n!$ 项，故必有 $D=D'$。